**Греческая математика**

**1. Рождение математики в Элладе**

Появление этой науки в 6 веке до н.э. до сих пор кажется чудом. В течение 20 или 30 предыдущих веков народы Древнего Востока сделали немало открытий в арифметике, геометрии и астрономии. Но единую математическую науку они не создали, да и не пытались ее создать. Эллинам же это удалось с первой попытки, в течение одного столетия. Что подготовило их к такому подвигу"

На полтораста лет раньше - в середине 8 века до н.э. - эллины пережили культурную революцию. Под влиянием финикийцев они изобрели свой алфавит, включив в него гласные буквы. Тогда же были записаны поэмы Гомера. Они стали первым учебником культуры, доступным каждому эллину - даже неграмотному. Ведь стихи нетрудно выучить наизусть! В ту же эпоху начались Олимпийские игры. На этих "съездах доброй воли" раз в 4 года встречались и дружески общались самые активные и просвещенные граждане из всех городов Эллады. Число таких городов с середины 8 века начало быстро расти, за счет заморской колонизации.

Скудная почва Эллады приводила к перенаселению каждого быстро развивающегося города. Тогда несколько десятков или сотен семей вместе переправлялись за море и селились на берегу - рядом с местными "варварами". У них эллины покупали зерно и различное сырье, в обмен на продукты своего ремесла. Разведав окрестные моря и земли, эллины знакомились с культурой соседних народов, учились у них и сами пытались их просветить. Все это происходило в форме народной самодеятельности, без приказа властей. Жители городской республики - полиса - ежедневно обсуждали на улицах и площадях все волнующие их вопросы: от видов на урожай и настроения окрестных варваров до заморских вестей, привезенных заезжим купцом.

Самые интересные вести приходили из царств Ближнего Востока: из Египта и Ассирии, а после гибели Ассирийской державы - из поделивших ее владения Вавилонии и Мидии. В середине 6 века до н.э. все эти земли попали под власть нового народа - персов, которые установили прочный мир в своей огромной империи. Теперь многие любознательные эллины смогли безопасно путешествовать по землям Персидской державы: одни - с торговыми целями, другие - в надежде приобщиться к мудрости древних египтян и вавилонян.

Дома такой путешественник возбуждал жадное любопытство сограждан. Но не во всем ему верили на слово. Например, он говорил, будто в Египте стоят рукотворные холмы из камня - гробницы древних царей, высотою в 200 или 300 локтей каждая. Неужели он сам измерил их высоту" Как он это сделал" Пусть докажет, что его слова - правда!

И еще: он сказал, что мудрые египтяне умеют предсказать срок будущего затмения Луны или Солнца. Пусть объяснит, как они это делают! И когда мы увидим очередное затмение в нашем городе"

Видимо, первым греком, который научился убедительно отвечать на такие вопросы, стал Фалес из города Милета; он жил между 625 и 547 годами до н.э. Известно, что в 585 году до н.э. Фалес впервые предсказал эллинам солнечное затмение. Позднее эллины признали Фалеса одним из семи великих мудрецов основателей греческой культуры и науки.

Сделал ли Фалес какие-то новые открытия в математике" Может быть, и нет. Не исключено, что все приписываемые ему теоремы были прежде известны, как факты, египтянам и вавилонянам. Но заслуга Фалеса в том, что он превратил эти сведения и рецепты в доказанные теоремы. Фалес приделал к научным фактам "корни", ведущие к простейшим утверждениям - тем, которые доступны интуиции обычного человека. Слушая рассуждения Фалеса, любой гражданин Милета мог прийти к мысли, что не обязательно принимать на веру всю древнюю мудрость. Каждое открытие мудрецов можно проверить и повторить, следуя несложным правилам умозаключений. Сами эти правила знакомы любому горожанину по опыту политических споров в народном собрании.

Таким образом, Фалес превратил древнюю и священную ученость в предмет сомнений и доказательных споров. Искушенные в спортивных состязаниях, эллины не знали до той поры сложных интеллектуальных игр, вроде шахмат. С легкой руки Фалеса, геометрия стала первой такой игрой. Вскоре она сделалась в Элладе почетным и увлекательным занятием, как бы национальным видом спорта - наравне с политикой. В геометрии появились "гроссмейстеры", которые превзошли достижения Фалеса и начали открывать такие математические истины, которые не снились древним мудрецам.

Первым в ряду этих героев оказался Пифагор с острова Самос: он жил примерно с 580 по 500 год до н.э. Около 540 года до н.э. Пифагор основал в греческом городе Кротоне на побережье Южной Италии первый "математический клуб", больше похожий на тайное религиозное братство.

**2. Первая научная школа Эллады**

Стоя у истока греческой науки, Пифагор был вынужден заниматься всем сразу: арифметикой и геометрией, астрономией и музыкой. И цель он себе поставил богатырскую: разобраться в строении Вселенной и человеческого общества (от движения звезд до политической борьбы), а на основе такого знания исправить все, что происходит в мире не наилучшим образом. Решить вторую часть этой задачи Пифагор не сумел. На старости лет он погиб в городской усобице, пытаясь установить в Кротоне "республику ученых". Но в постижении Вселенной через математику Пифагор сделал огромный шаг вперед. Он первый заметил, что сила и единство науки основаны на работе с ИДЕАЛЬНЫМИ объектами. Например, прямая линия - это не тетива натянутого лука и не луч света: ведь они имеют небольшую толщину, а линия толщины не имеет. То же относится к геометрической плоскости и поверхности воды в спокойном озере, или к числу 5 и пяти пальцам на руке. Идеальные объекты (будь то числа или фигуры) встречаются только в математическом рассуждениии - зато там без них не обойтись. Только для них верны строгие научные выводы! Поэтому математика является как бы "вторым зрением" человека: она открывает разуму идеальные объекты, тогда как обычные чувства говорят нам о свойствах природных тел. Но если так, то какое из двух зрений важнее" Пифагор не сомневался на этот счет. Конечно, идеальные объекты важнее природных тел, поскольку о них мы знаем все - и знаем наверняка. Несовершенные природные тела являются лишь грубоватым подобием идеальных математических сущностей. Но где можно увидеть эти сущности в чистом виде"

Конечно, на небе! Ведь видно, что звезды и планеты - это идеальные точки, а Луна и Солнце - идеальные шары. Земля, видимо, тоже шар - но далекий от идеального. А все звезды расположены на поверхности огромной прозрачной сферы, которая равномерно вращается вокруг Земли. Солнце, Луна и пять планет движутся по небу иначе - значит, они не прикреплены к звездной сфере, а лежат на особых сферах. Если бы еще удалось понять связи между восемью небесными сферами: измерить их радиусы, или хотя бы отношения этих радиусов...

Такова первая научная модель мира, предложенная Пифагором. Согласно ей, все природные тела и процессы суть искаженные подобия идеальных тел и движений - а закономерности идеальных объектов выражаются с помощью чисел. Короче говоря: числа правят миром через свойства геометрических фигур! Но если так, то любые свойства чисел приобретают особое (даже мистическое) значение. Есть числа четные - а есть нечетные; есть простые, и есть составные. И еще есть дроби - то есть, отношения натуральных чисел; их Пифагор из осторожности называл не числами, а "величинами". О том, что возможны даже иррациональные числа, Пифагор долгое время не подозревал...

Конечно, столь замечательную модель надо проверить на практике. Пифагор занимался этим делом всю жизнь. Начал он с большой удачи: обнаружил связь между высотой звука и длиной того инструмента (флейты, или струны), который издает звук. Оказалось, что благозвучие (симфония) возникает, когда длины разных струн относятся между собою, как близкие целые числа: 2/1, 3/2, 4/3 и так далее.

Из этого факта Пифагор сделал смелый вывод: весь мир упорядочен с помощью дробей! Например, окружность имеет длину, в 22/7 раза превышающую ее диаметр. Правда, не ясно, как это доказать... Зато ясно, как вычислить отношение длины диагонали квадрата или куба к длине ребра этой фигуры. Это можно сделать на основе знаменитой теоремы Пифагора!

Согласно ей, сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника. Пифагор проделал необходимые вычисления и получил удивительный результат: отношение диагонали квадрата к его стороне не может быть равно никакой дроби!

Пифагор был потрясен. Значит, даже среди идеальных тел геометрии не господствует полная симфония! Этот факт нужно скрыть от невежд до той поры, когда знатоки разберутся до конца в гармонии математического мира! Так и было сделано. Поэтому учение Пифагора не отразилось в какой-либо книге, а передавалось из уст в уста - со строгим запретом откровенничать с чужаками.

После смерти Пифагора союз его учеников распался, и первая научная школа Эллады перестала существовать. Подойдя вплотную к открытию иррациональных чисел, пифагорейцы не сумели сделать последний шаг. Они также не успели создать стереометрию - геометрию фигур в пространстве, среди которых особенно выделяются правильные многогранники. Сколько их в природе" Куб, тетраэдр и октаэдр были давно известны; пифагорейцы добавили к ним додекаэдр, но икосаэдр не заметили. А без стереометрии не получается удобная астрономия! Создать все это сумели только ученые из Афинской школы.

**3. Афинское содружество ученых: школа Платона**

В Афинах с 511 года до н.э. процветала демократическая республика. Здесь не было никаких секретов, обсуждению подвергалось все: от сообщений о том, что с неба выпал железный дождь, до преданий о том, как финикийцы за три года проплыли вокруг Африки и вернулись в Средиземное море мимо Геркулесовых столпов (так эллины называли горы по берегам пролива Гибралтар). Высочайший накал культурной жизни и научных споров привлекал в Афины самых талантливых ученых Эллады. Среди них был Анаксагор из Клазомен - последний питомец научной школы Милета. Он жил примерно в 500-428 годах до н.э. и около 460 года до н.э. переехал в Афины, где стал другом прославленного политика Перикла.

По складу ума Анаксагор был противоположен Пифагору: не математик, а физик, предпочитающий измерения и расчеты строгим логическим доказательствам. Он не верил ни в каких богов, кроме (может быть) Мирового Разума, а все небесные тела считал подобными Земле (то есть - не идеальными). Например, Солнце - это раскаленный камень, а метеориты - осколки Солнца, упавшие на Землю. Луна же - холодный шар, освещаемый Солнцем и равный ему: это заметно во время солнечных затмений. А как можно вычислить диаметр Солнца или Луны"

Очень просто: нужно спросить купцов, прибывающих в Афины вскоре после солнечного затмения! В каких городах Эллады видели полное затмение, а в каких - частичное" Расстояния между городами нам известны; по ним мы рассчитаем размер лунной тени на Земле, равный диаметру самой Луны или Солнца! Сказано - сделано. На основе опросов и расчетов Анаксагор заключил, что диаметр Луны или Солнца примерно равен диаметру полуострова Пелопоннес, где расположена Спарта. Так впервые стереометрия была успешно применена в астрономии и стала самостоятельной наукой - хотя не столь полной и строгой, как планиметрия. Например, связь между площадью круга и объемом шара оставалась не известна еще 200 лет - пока ее не выяснил Архимед.

Мы знаем теперь, что Анаксагор ошибся в оценке диаметра Луны примерно в 5 раз, а в оценке размера Солнца - еще больше, поскольку Солнце дальше от Земли, чем Луна. Однако математическая основа метода Анаксагора безупречна - если учесть зону частичного (а не только полного) солнечного затмения. Но современников Анаксагора волновали иные проблемы. Астроном подвергся осуждению благочестивых афинских граждан. Как он смеет измерять размеры бога Гелиоса (Солнца) и богини Гекаты (Луны)" Это - кощунство и богохульство! Астронома привлекли к суду, и даже заступничество Перикла не помогло; Анаксагор предпочел покинуть Афины. Вскоре после его изгнания в Афинах родился мальчик Аристокл; позднее он стал учеником Сократа и получил прозвище Платон - "Широкоплечий".

Платон жил в 427-347 годах до н.э. и характером напоминал Пифагора. Он тоже хотел постичь весь мир и исправить в нем все, что неправильно. Но через сто лет после Пифагора всем было ясно: в науке не надо секретничать! В 387 году до н.э. Платон основал Академию - первый общедоступный университет Европы, который действовал более 8 веков - до 529 года. Свое название эта школа получила от имени древнего героя Академа. Ему была посвящена роща, в которой прогуливались ученики Платона, ведя бесконечные споры обо всем на свете. Требование к участникам споров было одно: хорошее знание геометрии. Кто ее освоил - тот может постичь все, что пожелает, ибо геометрия правит всем миром! При этом сам Платон, кажется, не сделал крупных открытий в математике: основные теоремы геометрии были уже всем известны, а споры кипели вокруг их осмысления. Например: есть ли предел дробления природных тел" Демокрит из Абдеры считает, что существуют мелкие частицы - атомы, которые нельзя разделить пополам. Напротив - Зенон из Элеи уверен, что каждый отрезок можно неограниченно делить пополам, не достигая неделимой точки. Кто из них прав" Может быть, правы оба - но в разных областях" Допустим, что Зенон прав относительно идеальных математических сущностей, а Демокрит прав относительно природных тел. В таком случае получают разумное решение предложенные Зеноном парадоксы - вроде Ахиллеса и черепахи, которую быстроногий герой никогда не догонит.

Но если прав Демокрит, то геометрам нужно подумать о форме загадочных атомов. Это, наверное, самые совершеннвые тела - вроде правильных многогранников, которых в природе всего 5 (как было доказано). Интересно, атомы каких веществ имеют форму тетраэдра, куба и октаэдра" Может быть, такова форма атомов воздуха, воды и огня"

Если же прав Зенон, то путем последовательного деления пополам можно сколь угодно точно установить длину любого отрезка - даже диагонали квадрата, которая несоизмерима с его стороной. Интересно: можно ли таким путем узнать точную длину окружности и площадь круга"

Эта задача не покорилась ученикам Платона. Они не смогли построить циркулем и линейкой ни отрезок с длиною, равной длине данной окружности, ни квадрат с площадью, равной площади данного квадрата. Так проблема "квадратуры круга" вошла в число классических задач древности - наряду с удвоением куба и трисекцией угла.

В середине 4 века до н.э. наследники Платона поднялись на вершину классической геометрии - но в то же время достигли пределов этой науки. После этого школа Платона разделилась. Одни питомцы Академии принялись наводить порядок в уже освоенном мире планиметрии и стереометрии; другие старались выйти за его пределы с помощью новых методов работы.

Самым упрямым и непослушным из учеников Платона был Аристотель из Стагиры. Он жил с 384 по 322 год до н.э., и после смерти учителя основал в Афинах свою школу - Ликей. Позднее Аристотель уехал в Македонию, где стал учителем царевича Александра - будущего завоевателя Эллады и восточных стран. Аристотель считал, что главные открытия в геометрии уже сделаны. Пора переносить ее методы в другие науки: физику и зоологию, ботанику и политику. Но самое важное орудие геометрии - это логический метод рассуждений, который ведет к верным выводам из любых верных предпосылок. Этот метод Аристотель изложил в книге "Органон"; сейчас ее называют началом математической логики.

Впрочем, для обоснования физической науки одной логики мало; нужны эксперименты, измерения и расчеты вроде тех, которые проводил Анаксагор. Ставить опыты Аристотель не любил. Он предпочитал угадывать истину интуитивно - и в итоге нередко заблуждался, а поправить его было некому. Поэтому греческая физика состояла, в основном, из гипотез: иногда гениальных, но порою грубо ошибочных. Доказанных теорем в этой науке не было.

В противоположность Аристотелю, Евдокс из Книда не выходил за рамки точных наук: математики и астрономии. Зато в этой области он превзошел Пифагора, создав первую теорию иррациональных чисел.

Основная идея Евкдокса проста: назовем "числом" (или "величиной") длину любого отрезка! В таком случае все числа можно изобразить точками на луче, ведущем из центра в бесконечность. Одна из этих точек особенно замечательна: это правый конец отрезка длины 1. Другие замечательные точки - концы отрезков, соизмеримых с единичным отрезком. Их мы называем рациональными числами.

Но, согласно Пифагору, есть отрезки, не соизмеримые с единичным отрезком. Их длины (которые мы называем иррациональными числами) тоже можно сравнивать между собой. Например, соизмерима ли диагональ единичного куба с диагональю единичного квадрата" Оказывается, нет - потому, что их отношение (равное ..6) - иррациональное число. Таким образом, иррациональные числа распадаются на классы чисел, соизмеримых друг с другом. Один из таких классов порожден числом ..2, другой - числом ..3, третий - числом ..6. А что дальше" Можно доказать, что для любого простого числа Р число ..Р иррационально; первым это сделал ровесник и однокашник Евдокса - афинянин Тэетет. Несколько позже другой афинянин - Евклид - доказал, что множество простых чисел бесконечно. Значит, множество всех чисел (или всех отрезков) похоже на бесконечный архипелаг. Лишь один его остров составлен из рациональных чисел! Так мал оказался "симфоничный" мир Пифагора в рамках огромной математической Вселенной...

Большинство геометров Эллады испугались нежданной бесконечности и не стали изучать ее свойства. Только Тэетет заметил, что в множестве иррациональных островов есть свой порядок. До одних островов можно добраться из рациональной гавани с помощью линейки и циркуля - за один ход, или за несколько ходов. До других островов так добраться нельзя: по этой причине некоторые задачи на построение неразрешимы. Например, построить биссектрису угла совсем легко; построить правильный пятиугольник гораздо сложнее, а разделить произвольный угол на три равные части не удается. Мы знаем сейчас причину такой разницы: первые две задачи сводятся к решению квадратных уравнений, а трисекция угла требует решения кубического уравнения. Но эллины не знали таких понятий, как многочлен или алгебраическое уравнение. Они не владели даже позиционной системой счисления. Без такого аппарата греческая арифметика (в отличие от геометрии) не имела опоры в наглядном воображении ученых, и не могла помочь геометрии при решении ее самых трудных задач.

Нам сейчас кажется странным, что Евдокс не развил теорию чисел в более простом направлении. Ведь он фактически открыл числовой луч. Почему он не открыл числовую прямую, введя нуль и отрицательные числа" Видимо, Евдокс попал в плен к придуманному им самим определению: числа суть длины отрезков. Что такое отрезок длины (-2)" Чем он отличается от отрезка длины 2" На такой вопрос Евдоксу было бы нечего ответить. Другое дело, если бы отрицательные числа уже были в ходу у математиков Эллады. Например, такое число может обозначать долг купца - если положительное число изображает его имущество. Тогда имущество нищего придется изобразить нулем! Но увы - это "купеческое" представление о числах сложилось где-то на Ближнем Востоке через 5-6 веков после открытий Евдокса...

**4. Математическая Вселенная Евклида**

По сравнению с Платоном и его современниками, следующему поколению математиков пришлось жить в ином мире. В 338 году до н.э. царь Филипп Македонский разгромил ополчение греческих полисов; кончилась эпоха демократии, началась имперская эпоха. Сын Филиппа - Алекандр завоевал весь Ближний Восток, вплоть до Индии. Наследники Александра стремились удержать завоеванное не только силой меча, но и внедрением греческой культуры в умы новых подданных. Обученные Аристотелем, эти новые цари - Птолемей в Египте, Селевк в Сирии и Иране, Антигон в Малой Азии - считали греческую науку важнейшей частью эллинской культуры. Поэтому в новых греческих столицах на Востоке сразу появились общедоступные библиотеки, а при них - первые "научно-исследовательские институты". Самым известным учреждением этого рода стал Музей ("храм всех муз") в Александрии Египетской. Здесь собрались сильнейшие ученые грекоязычного мира, и начался новый расцвет науки. Самое заметное различие в положении науки "при царях" и "при демократии" - в том, что достижения ученых перестали волновать столичную толпу. Наука (как и политика) сделалась "спортом для избранных", хотя школьников продолжали учить геометрии и арифметике. Но большая часть учителей теперь не занималась научным творчеством; поэтому понадобились хорошие учебники. С этой целью Аристотель написал "Физику", "Зоологию" и "Органон", а Евклид - знаменитую книгу "Начала", первую и лучшую энциклопедию элементарной математики.

Если бы Евклид захотел только создать хороший школьный учебник - он легко достиг бы этой цели. Но через сто лет его имя забылось бы, заслоненное именами новых авторов. Мы знаем, что получилось иначе: книга Евклида прожила 20 веков, прежде чем у нее появились достойные соперницы. Дело в том, что Евклид сумел навести порядок во всем мире идеальных математических объектов - подобно тому, как Пифагор наводил порядок в реальном мире с помощью идеальных понятий. И пока "зоопарк" этих понятий не расширился более чем вдвое по сравнению с эпохой Евклида - не было нужды в иных книгах на ту же тему. Только в конце 18 века Эйлер добавил к "Началам" Евклида свои "Основы" - первую энциклопедию новой алгебры и математического анализа.

Мы очень многое знаем об Эйлере; почему мы так мало знаем о личности Евклида" Он родился в Афинах, учился в Академии. В начале 3 века до н.э. переехал в Александрию и там работал в Музее. Наверняка у него было много учеников. Но никто не оставил об учителе таких сочных рассказов, какие сохранились о Платоне или Аристотеле. Известно лишь, что на вопрос царя Птолемея: нельзя ли попроще объяснить содержание геометрии тем, кто не силен в этой науке" - Евклид резко ответил: "В геометрии нет царской дороги!"

Рискованно делать глубокие выводы из одной фразы; но ясно, что Аристотель никогда не говорил таких слов царю Филиппу Македонскому. Возможно, Евклид был демократ по убеждению и не одобрял того факта, что геометрия стала "придворной" наукой" Может быть, не случайно он употребил слова "царская дорога"" Так называли систему отличных дорог, проложенных в Персидской империи. Двигаясь по ним, небольшая армия македонцев за 4 года покорила весь Ближний Восток. Покорила - но не освоила; науку же нужно осваивать, а не покорять! Таков, видимо, был смысл выговора, сделанного греческим ученым египетскому царю. А ведь Птолемея в Египте считали живым богом! Вероятно, Евклида царь просто терпел - и то недолго, а потом его подвергли забвению. Но книга осталась жить, и число ее читателей превысило число подданных царя Птолемея.

Как же выглядит в трактате Евклида математическая вселенная, составленная из фигур и чисел" С фигурами работать проще: каждый видел их на чертежах и может вообразить мысленно. Поэтому Евклид не дает строгих определений основных объектов геометрии: точки, линии, прямой, поверхности, плоскости. Вместо этого даны словесные описания важнейших свойств этих фигур. Например: "Точка есть то, что не имеет частей"; "Линия - это длина без ширины"; "Окружность - это кривая, которая около каждой точки устроена одинаково".

Самые общие свойства фигур, которые многократно используются в рассуждениях и не выводятся из более глубоких фактов - эти свойства Евклид назвал аксиомами. Например: "Все прямые углы равны между собой", или "Целое больше части".

Кроме аксиом, Евклид ввел ПОСТУЛАТЫ: это утверждения о свойствах основных геометрических конструкций. Например: "Через две точки проходит лишь одна прямая", или "Через точку вне прямой на плоскости проходит лишь одна прямая, не пересекающая эту прямую". Это последнее утверждение называют пятым постулатом Евклида.

Конечно, представить всю геометрию в виде идеального здания из определений, аксиом, постулатов и теорем Евклид не сумел. Ведь каждое необходимое утверждение кому-то покажется скучной мелочью, а каждое интересное утверждение у кого-нибудь вызовет возражение. И это хорошо: в науке важнее всего те утверждения, которые сами интересны и не очевидны, и их отрицания обладают тем же свойством. Таков оказался пятый постулат Евклида о параллельных прямых на плоскости.

Он имеет два возможных отрицания. Во-первых, можно предположить, что через точку вне прямой не проходит НИ ОДНА прямая, не пересекающая данную прямую; то есть, что параллельных прямых на плоскости вовсе нет! Во-вторых, можно предположить, что таких прямых через одну точку проходит НЕСКОЛЬКО; может быть, их бесконечно много. Евклид не рассматривал такие возможности. Он старался сжато и полно описать единственно возможный ("плоский") геометрический мир. Только в 19 веке другие математики - Гаусс и Лобачевский, Больяи и Риман - задумались о возможном существовании многих разных геометрических миров. Тогда выяснилось, что новые миры отличаются от старого евклидова мира всего одной-двумя аксиомами. Достаточно заменить пятый постулат Евклида одним из его возможных отрицаний - и мы попадаем в иной мир, носящий имя Лобачевского или Римана.

Но Евклида больше беспокоило другое. Какие факты геометрии нужно вкючить в создаваемую энциклопедию, а какими придется пренебречь, поскольку они не совсем ясны" Например, в "Началах" используются всего две разные линии - прямая и окружность. Но в эпоху Евклида уже были известны эллипс, парабола и гипербола. Сам Евклид изучал эти кривые, даже написал о них особую книгу (которая не сохранилась - но послужила основой для сходной книги Аполлония). Почему он ни словом не упомянул о новых кривых в "Началах""

Видимо, потому, что Евклид и его современники не знали об этих линиях всего, что им хотелось знать. Например, как вычислить площадь, ограниченную эллипсом или параболой" Как провести касательную к эллипсу или гиперболе в данной точке" Это сумел сделать только Архимед - через полвека после Евклида. Автор "Начал" этого не умел - и предпочел умолчать о сложных кривых, чтобы не смущать умы новичков-геометров необоснованными рассуждениями. Видимо, Евклид был прав; так же поступают авторы современных учебников или той энциклопедии, которую вы читаете.

Иначе получилось с арифметикой: здесь Евклид сам был перевопроходцем. Но беда в том, что у эллинов не было удачной системы обозначений даже для натуральных чисел. Вместо цифр греки пользовались буквами; позиционной системы для записи больших чисел они не знали. Поэтому даже обычная (для нас) таблица умножения имела в Элладе вид довольно толстого свитка. А работать с числами, когда они изображены буквами, очень не просто! Этим занимается особая наука - алгебра; современники Евклида о ней не подозревали.

В арифметике Евклид сделал три значительных открытия. Во-первых, он сформулировал (без доказательства) теорему о делении с остатком. Во-вторых, он придумал "алгоритм Евклида" - быстрый способ нахождения наибольшего общего делителя чисел или общей меры отрезков (если они соизмеримы). Наконец, Евклид первый начал изучать свойства простых чисел - и доказал, что их множество бесконечно. Но правда ли, что любое целое число разлагается в произведение простых чисел единственным способом" Доказать это Евклид не сумел - хотя располагал всеми необходимыми для этого средствами.

Только через 5 веков после Евклида александриец Диофант заполнил этот пробел строгим рассуждением. Он уже владел понятием отрицательного числа и "играл в арифметику" так же уверенно, как семью веками раньше Пифагор "играл в геометрию", работая с плоскими фигурами. Но создать богатую теорию чисел и уравнений эллины не успели вплоть до гибели Римской империи и гибели античной цивилизации в бурях 4-5 веков.

**5. Наследники Евклида: Эратосфен и Архимед**

Напротив, в привычной геометрии эллины успели продвинуться заметно дальше Евклида. Третий век до н.э. украшен славными именами Аристарха и Архимеда, Эратосфена и Аполлония. Все они были скорее универсалы, чем "чистые" математики. Аристарха считают астрономом, поскольку он первый обосновал гипотезу о том, что все планеты обращаются вокруг Солнца. Но рассуждение Аристарха - это чистая стереометрия, в духе Анаксагора.

Разница в том, что Аристарх изначально предположил: Солнце может иметь иной размер, чем Луна! Так в старой задаче появилась новая неизвестная величина. Чтобы справиться с нею, нужно добавить еще одно уравнение, а для этого - изобрести новый метод наблюдения небес. Аристарх сделал это, рассуждая просто и красиво.

Земля, Луна и Солнце - это три шара; их центры лежат в одной плоскости. Когда мы видим ровно половину лунного диска, освещенную Солнцем - луч нашего зрения образует прямой угол с осью, соединяющей центры Солнца и Луны. Чтобы узнать отношение сторон в этом огромном прямоугольном треугольнике, надо измерить в нем хоть один угол. Мы можем это сделать, наблюдая Солнце и Луну одновременно - на рассвете, или на закате. Выполнив эти наблюдения и расчеты, Аристарх сделал вывод: лунный диаметр втрое меньше земного, а диаметр Солнца в семь раз больше, чем диаметр Земли.

Эти оценки так же грубы, как расчеты Анаксагора. Но верен главный вывод Аристарха: Солнце больше Земли, поэтому Земля вращается вокруг Солнца! Так астрономия получила, наконец, от геометрии верную модель Солнечной системы. Увы - модель Аристарха оказалась слишком груба для астрономических предсказаний. Поэтому большинство звездочетов не верили ей, а пользовались более могучей вычислительной техникой Гиппарха.

Большее доверие вызывал у своих современников ученик Аристарха - Эратосфен. Он жил в 276-194 годах до н.э. и многие годы возглавлял Александрийский Музей. Ученики дали ему прозвище "Бета" - по имени второй буквы алфавита, поскольку Эратосфен был "вторым специалистом" в очень многих областях. "Альфой" в математике был его лучший друг и ровесник - Архимед из Сиракуз (280-212 годы до н.э.)

В арифметике Эратосфен стал вторым гроссмейстером - после Евклида. Он составил первую таблицу простых чисел ("решето Эратосфена") и заметил, что многие простые числа группируются в пары близнецов: таковы 11 и 13, 29 и 31, 41 и 43. Евклид доказал, что множество всех простых чисел бесконечно. Верно ли то же самое для чисел-близнецов" Эта задача не покорилась Эратосфену. Знать бы ему и его насмешливым питомцам, что она не будет решена даже через 22 столетия! В наши дни "проблема близнецов" остается единственной не решенной задачей, которая досталась нам от Античности. Справятся ли с нею математики 21 века"

В стереометрии (то есть, в математической астрономии и географии) Эратосфен был более удачлив. Он составил карту неба с 675 звездами, вычислив их координаты в градусах (Этот способ численного хранения геометрической информации изобрел Евдокс). Далее последовала карта известных Эратосфену областей Земли: от Британии до Цейлона, от Балтики и Каспия до Эфиопии. Оставалось узнать размер земного шара и его положение по отношению к Солнцу - то есть, угол наклона земной оси к той плоскости, в которой движутся Земля и Солнце. То и другое Эратосфен сумел рассчитать на основе несложных наблюдений и простых картинок. Например, для определения радиуса Земли оказалось достаточно узнать расстояние от Александрии до Сиены (Асуана) и измерить высоту Солнца в полдень одновременно в этих двух городах (которые они лежат на одном меридиане).

Но мало кто из эллинов поверил этому расчету. Ведь получалось, что вся известная грекам Ойкумена (населенная часть Земли) составляет меньше одной сотой доли от поверхности земного шара. "Не может быть, чтобы мы так мало знали!" - таков был единодушный приговор просвещенных жителей Александрии. Что поделать! Только ученые (и то не все и не всегда) смеют догадываться о том, как мал объем их знаний - даже вместе с догадками...

Успешно проверив географию с помощью геометрии, Эратосфен решил проверить историю с помощью арифметики. Он знал, что от эпохи Пифагора и Фалеса его отделяют примерно 300 лет. Но какой срок отделяет Пифагора от Гомера, или от героев Троянской войны" Что творилось в те далекие времена в Египте" Сколько веков простояли до той поры великие пирамиды" Эратосфен был уверен, что все природные факты можно упорядочить с помощью здравого смысла и строгой математики. В датировке Троянской войны он ошибся менее чем на сто лет! Так что были основания для веры во всемогущество точных наук у ученых Александрийской эпохи...

Наибольшее основание для такой уверенности имел Архимед из Сиракуз - величайший ученый в истории Эллады и во всей Античности. По интересам он был скорее физик (как Анаксагор или Аристарх), но по методам работы - универсальный геометр и начинающий алгебраист. Юность он провел в Александрии, учась у Аристарха и Конона - ученика Евклида. Там он подружился с Эратосфеном. Всю жизнь друзья переписывались, причем Эратосфен представлял собою весь коллектив Александрийского Музея. Архимед же один стоил целой академии наук.

Гения в науке можно распознать по тому, как быстро он осваивает достижения предшественников и как неудержимо бросается вперед с этого стартового рубежа. Для Архимеда стартовыми опорами стали Евклид и Евдокс. Высшим достижением Евдокса была геометрическая теория чисел, которая привела к построению числового луча из точек. Высшее достижение Евклида - это вычисление объема пирамиды методом "исчерпания", когда фигура разбивается на тонкие ломтики-призмы, а их объемы суммируются с помощью арифметики.

Сопоставив эти две теории, Архимед понял, что любую плоскую или пространственную фигуру можно разбить на мельчайшие области-песчинки (как Евдокс разбил на точки луч), а потом суммировать площади или объемы песчинок, как Евклид суммировал объемы ломтиков пирамиды. При этом арифметика и геометрия работают, как две руки - передавая задачу из ладони в ладонь, пока она не будет решена. Конечно, это трудное ремесло - даже два разных ремесла; но Архимеду то и другое было по плечу.

Несмотря на неудобную запись чисел, Архимед уверенно суммировал последовательности натуральных чисел, или их квадратов, или кубов. Используя эти суммы и не зная таких понятий "из будущего", как многочлен и интеграл, Архимед, по сути дела, интегрировал многчлены - и ни разу не ошибся в этой работе! Сначала он вычислил площадь фигуры, ограниченной отрезками параболы и прямой. Затем были найдены объемы тел, полученных при вращении этой фигуры вокруг разных осей; по этим данным Архимед нашел центр тяжести плоской фигуры. Сейчас такие задачи решают студенты-математики, сдающие зачет на первом курсе; но сделать это впервые в истории было гораздо трудней!

Покорив первые вершины в неведомом хребте Математического Анализа, Архимед пожелал новых подвигов. Его увлекла главная проблема астрономии - движение планет вокруг Солнца. Архимед был уверен: существует простое описание этого движения, и найти его можно тем же "методом песчинок"! Конечно, понадобятся точные измерения положений планет; придется очень много вычислять; и, наверное, полезны будут механические модели Солнечной системы...

Пройти этот путь до конца Архимед не сумел. Великая проблема движения планет была решена только 18 веков спустя. Ради этого результата были потрачены жизни трех замечательных ученых: астронома Браге, вычислителя Непира и математика Кеплера. В своей работе они использовали алгебраический аппарат, изобретенный учеными итальянцами - а также числовые координаты на плоскости, введенные Декартом. Без этих новых понятий (не говоря уже о позиционной системе записи чисел) "метод песчинок" не обладал нужной мощностью; с ними он превратился в могучий Математический Анализ. Архимед предвидел это будущее - но не мог ни достичь его одним прыжком, ни убедить своих коллег-современников присоединиться к его геройскому штурму.

В 212 году до н.э. гордый консул Метелл, взяв штурмом Сиракузы, доставил в Рим небывалый трофей: металлическую модель Солнечной системы из подвижных сфер и окружностей, изготовленную самим Архимедом. Тот экспериментировал с нею, когда нехватало прямых наблюдений над звездами и планетами. В наши дни такой прибор называют "механическим аналоговым компьютером". Римляне с изумлением глядели на чудесную игрушку, вертели ее так и сяк... Как это похоже на современного ребенка, который играет за экраном компьютера, не подозревая о том, на что способна эта машина!

**6. Закат греческой математики**

Во 2 веке до н.э. расцвет греческой науки прекратился. Это было неизбежно: толпу на улицах имперских столиц теперь волновали совсем иные проблемы, чем квадратура круга или движение Марса среди звезд. Математика стала игрой для избранных, и приток талантливой молодежи в ряды ученых сократился. Поэтому уменьшилось число крупных астрономов и геометров, живущих одновременно и побуждающих друг друга к новым открытиям. Теперь юноши постигали науку по книгам, а не по лекциям или письмам действубющих исследователей. Эти книги годами или десятилетиями пылились в библиотеках в ожидании достойного читателя. Так исчезло могучее ученое сообщество Эллады; осталась редкая россыпь гениев, не способных жить без научного творчества и способных заниматься им в одиночку.

Самый яркий представитель этого поколения - Гиппарх из Никеи - жил между 190 и 120 годами до н.э. В юности он побывал в Александрии - но не встретил там великих ученых и поселился на острове Родос, построив там астрономическую обсерваторию. Через полвека после смерти Архимеда Гиппарх принял его дело в свои руки. Но подход Гиппарха к математике был несколько иным. Он не придавал большого значения геометрическим построениям и доказательствам, а старался по возможности заменить их расчетами. Так Гиппарх заложил основы алгебры и алгебраической (то есть, вычислительной) астрономии. Это было за 1000 лет до появления слова "алгебра" и за 700 лет до изобретения позиционной записи чисел.

Начал Гиппарх с составления новой карты звездного неба. Используя угловые координаты звезд (введенные Евдоксом), Гиппарх сравнил свою карту с теми, которые были составлены в Афинах и Александрии на два века раньше. Оказалось, что за это время все звезды сдвинулись в одну сторону на один и тот же малый угол. Значит, звездное небо обращается вокруг Земли не равномерно - либо сама Земля вращается вокруг своей оси не равномерно, а покачиваясь, подобно волчку! Итак, сложное движение звезд разлагается в сумму двух равномерных вращений по окружности. Может быть, и планеты движутся так же - но еще сложнее" Попробуем разложить их наблюдаемое движение среди звезд в сумму нескольких равномерных вращений с разными центрами!

Гиппарх был великий вычислитель: он попробовал это сделать, и у него получилось. Так в науке появилась модель эпициклов. Согласно ей, каждая планета укреплена на некой сфере, которая катится по другой сфере, та - по третьей... и так далее, а центр последней сферы равномерно вращается вокруг Земли. Например, для Венеры и Меркурия хватает одного эпицикла: они обращаются вокруг Солнца, а вместе с ним вокруг Земли. Но для Марса, Юпитера и Сатурна требуется несколько промежуточных эпициклов: их центры не отмечены на небе какими-либо яркими точками...

С точки зрения современной физики, эта модель абсолютно неверна. Ведь она не учитывает разницу в размерах и массах небесных тел! Например, Солнце больше Земли - это выяснил еще Аристарх. Поэтому не оно обращается вокруг Земли, а наоборот! Как мог Гиппарх не учитывать эти факты, и как могла его неверная модель верно предсказывать наблюдаемое движение планет"

Ответ на второй вопрос математики получили лишь в начале 19 века - когда Шарль Фурье разложил любую периодическую функцию в ряд Фурье из синусов и косинусов. Оказалось, что Гиппарх делал то же самое: он разлагал периодическое движение планет в сумму равномерных круговых движений. Но Гиппарх довольствовался конечным набором слагаемых, обеспечивающим достаточную точность расчетов и предсказаний.

Верна ли гипотеза об эпициклах" Этот вопрос Гиппарху, видимо, в голову не приходил. Раз она дает верные предсказания - значит, она верна! Возразить против такого рассуждения смог бы только Ньютон, вооруженный законом всемирного тяготения и другими аксиомами физики. Но в античном мире этих аксиом никто не знал...

Оценки размеров Солнца и Луны, полученные Аристархом, также не убеждали Гиппарха. Но проверить их стоило - и Гиппарх занялся этим, используя простые геометрические соображения. Эратосфен вычислил диаметр Земли. Находясь на ее поверхности и вращаясь вместе с нею, астроном в течение ночи сдвигается на расстояние, близкое к земному диаметру. Из-за этого смещения астроному кажется, что близкая к нему Луна сдвигается на фоне далеких звезд. При этом одни звезды (заслоненные "вечерней" Луной) становятся видимы ближе к утру, а другие - наоборот. Имея карту неба с точными координатами около 1000 звезд, Гиппарх сумел измерить кажущийся сдвиг Луны за ночь, а вместе с ним - и отношение расстояния до Луны к земному диаметру.

Оно равно 30: таков был первый успех вычислительной астрономии в измерении космических расстояний. Следующий крупный успех - измерение расстояний до планет - пришел к астрономам лишь в 17 веке, после появления телескопов и точных маятниковых часов. А для будущей алгебры Гиппарх оставил другое ценное наследство: первые таблицы длин хорд, стягивающих дуги данной угловой меры. Сейчас мы называем их таблицами синусов; но это слово появилось на много веков позже.

Итак, Гиппарх первый подошел к созданию алгебры и тригонометрии. Но основателем алгебры с большей справедливостью можно считать Диофанта из Александрии: он первый начал составлять и решать алгебраические уравнения. Было это в 3 веке н.э. - когда Римская империя переживала первый кризис, а подпольная христианская религия распространилась по всему Средиземноморью. Античная ученость сохранилась лишь на редких островках - вроде Александрийской библиотеки, которая понесла огромный урон еще в 47 году до н.э. Тогда Цезарь пытался возвести Клеопатру на египетский трон; вспыхнула война, пожар уничтожил весь египетский флот и большую часть свитков библиотеки. Но математикам легче восстановить утраченное знание, чем историкам или литераторам. Поэтому в эпоху Диофанта ни одно достижение геометрии еще не было забыто. В арифметике же появилось нечто нове, неведомое Евклиду и Эратосфену: отрицательные числа.

Диофант уже свободно работал с ними; он знал, что "минус, умноженный на минус, дает плюс". Возможно, что именно он угадал это не очевидное правило - хотя понять его геометрический смысл удалось лишь в 17 веке, когда европейские математики привыкли к комплексным числам. Но понятием нуля и позиционной записью целых чисел Диофант не владел.

Книга Диофанта "Арифметика" стала основой алгебры и теории чисел. В ней автор изучал решение уравнений-многочленов в целых числах. Он решил знаменитое уравнение Пифагора: X..+ Y.. = Z.. - и таким путем нашел все прямоугольные треугольники с целыми катетами и целой гипотенузой. Оказалось, что любое несократимое решение этого уравнения имеет вид: Z = A.. + B.., Y = A.. - B.., X = 2AB, где А и В - взаимно простые числа разной четности.

Конечно, Диофант пытался решить и следующее уравнение этого типа: X.. + Y.. = Z.. - но ни одной подходящей тройки чисел он не нашел. Только через 14 столетий случайно уцелевшая книга Диофанта из Александрии попала в руки к его достойному преемнику - Пьеру Ферма их Тулузы. В итоге родилась великая теорема Ферма...

Напротив, открытия Гиппарха сохранились не случайно. Ведь астрономия во все века была популярнее математики - ввиду ее родства с неизменно процветающей астрологией. А у Гиппарха нашелся через 300 лет достойный ученик - Клавдий Птолемей. Он составил удачный учебник: "Мегале Математике Синтаксис", где изложил систему Гиппарха со всеми необходимыми обоснованиями. Это пособие приобрело огромную популярность среди астрономов и астрологов, встало вровень с великой книгой Евклида. В переводе с греческого название книги Птолемея звучит: "Правила Великого Учения". Столь длинное название средневековые европейцы сократили до второго слова: Математика, или "Учение". Так мы называем теперь геометрию, арифметику, алгебру и все науки, которые позднее родились на стыке со строгой античной мудростью.