**Интерпретации существования в математике**

Гутнер Г.

**1 Основные стратегии доказательства существования**

Важной задачей, которую мы должны решить, проводя исследование онтологии математического дискурса, состоит в выяснении тех традиционных способов, которыми математика устанавливает существование своих предметов. Для этого следует обратить внимание на математические предложения, утверждающие о чем-либо, что оно "существует". Рассмотрение доказательств таких предложений позволяет понять, в каком смысле употреблено в нем это слово. Способ доказательства существования проясняет, прежде всего, интерпретацию существования в том или ином утверждении.

Если попытаться разобрать основные математические тексты (т.е. тексты, производимые математиками разного класса и уровня и читаемые в сообществе, имеющем к математике какое-либо отношение), то при самом поверхностном анализе можно увидеть три способа доказательства существования и, соответственно, три способа определить онтологический статус предмета исследования.

Первый (и, возможно, наиболее распространенный) способ доказательства состоит в непосредственном построении объекта, в существовании которого предстоит убедиться. В качестве классических областей применения такого рода доказательств принято указывать евклидову геометрию, алгебру и, отчасти, теорию чисел [18]. Однако, важно понимать, что его употребление вполне естественно и для вполне "нефинитных" областей, например, для функционального анализа. Чтобы обратить внимание на некоторые важные особенности такого способа доказательства, уместно обратиться к примеру. Одна из известных теорем функционального анализа утверждает, что для любого сжимающего отображения произвольного полного метрического пространства в себя существует единственная неподвижная точка этого отображения. Это утверждение доказывается так: в метрическом пространстве выбирается произвольная точка, данное сжимающее отображение применяется сначала к этой точке, потом к получившемуся в результате его применения образу этой точки, потом к образу образа и т.д. Выясняется, что возникающая при этом последовательность имеет предел и этот предел - точка пространства, не изменяющаяся при применении к ней данного отображения.

Как в формулировке этой теоремы, так и в ее доказательстве фигурируют лишь общие термины. Доказательство, однако, проведено так, что все общие термины в нем можно заменить на единичные. Так, задав некоторое полное метрическое пространство (допустим, фиксированный отрезок прямой линии), т.е. указав вполне определенный единичный предмет, обладающий всеми требуемыми свойствами, и задав какое-то конкретное сжимающее отображение на нем, мы можем, пользуясь прописанной в доказательстве схемой, указать на некоторый, также вполне определенный, единичный предмет, обладающий всеми требуемыми свойствами (т.е. являющийся неподвижной точкой отображения). Указание единичного предмета - важнейший момент такого рода рассуждений. Хотя само оно и проводилось как бы абстрактно, т.е. безотносительно каких-либо единичностей, однако возможность работы с ними и составляет его реальный смысл. Любой, включенный в рассуждение индивидуальный предмет получает в ходе его полную определенность (ясность онтологического статуса) в силу его отличимости от любого другого предмета, указанного каким-либо иным способом. Итак, о каком-либо предмете можно сказать, что он существует, если приведена конечная схема, которая, будучи применена к указанному вполне определенному объекту (или конечному набору объектов), приводит к построению рассматриваемого предмета. Тот факт, что схема, на которую мы ссылались в нашем примере, содержала построение бесконечной последовательности, еще не нарушает конструктивности определения существования. Предел последовательности есть вполне определенный объект, построение которого, при заданной сходящейся последовательности, вовсе не требует таких запредельных абстракций, как актуальное предъявление всей бесконечной последовательности. Выяснить, например, что последовательность xn = 1/2n сходится к 0, можно с помощью легко завершаемой процедуры. Последнее верно, конечно, не для любой последовательности. Но в разобранном нами примере такую последовательность указать можно. (Например, если задать отображение, которое каждой точке отрезка будет ставить в соответствие точку, расположенную в два раза ближе к фиксированному концу отрезка.) Но именно эта возможность и важна для определения существования в конструктивном смысле. Слово "существует" в рамках рассмотренной нами интерпретации должно быть прочитано именно как "существует единичный предмет, на который можно непосредственно указать".

Конечно же математическое рассуждение не ограничивается такими, завязанными на вполне определенный единичный предмет, построениями. Математический анализ постоянно имеет дело с такими предметами, которые не могут быть вполне определены с помощью конечной процедуры построения. Самый характерный пример - иррациональное число, которое определяется либо как последовательность рациональных чисел, либо как сечение на множестве рациональных чисел. В любом случае такое определение предмета предполагает предъявление какой-то бесконечной совокупности и о его существовании уже невозможно говорить в рассмотренном выше смысле. Тем более это невозможно, если речь идет о последовательностях или о бесконечных множествах вещественных чисел. Названные предметы, тем не менее, весьма активно изучаются в анализе. В математике принято два способа говорить о существовании этих неконструируемых предметов.

Первый неконструктивный способ интерпретации существования связан с законом исключенного третьего. На нем основаны все доказательства от противного. Приведем еще один пример. Одна из центральных теорем анализа утверждает, что если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел. Доказательство этого факта часто проводят, предположив, что данная последовательность нефундаментальна (т.е. не удовлетворяет критерию Коши). Из этого предположения легко выводится, что последовательность в таком случае и не ограничена, что противоречит условиям теоремы. Далее же на основании закона исключенного третьего утверждается фундаментальность рассматриваемой последовательности, а соответственно и наличие предела. Никаких указаний на какое-либо конкретное число, могущее быть пределом последовательности, равно как и на способ его вычисления, нет ни в формулировке, ни в доказательстве теоремы. Мы, конечно, можем усмотреть здесь какую-то схему, которая может быть применена к заданной последовательности, т.е. к определенному единичному предмету. Но к построению другого единичного предмета (в существовании которого и требуется удостовериться) предложенная схема не приведет. Это предмет останется предметом гипотетическим. Нет никаких реальных критериев для того, чтобы отличить его от какого-либо другого. Брауэр, о взглядах которого на проблему существования мы будем более подробно говорить в дальнейшем, считал, что философским основанием для такого типа рассуждений является реализм (или "платонизм"), неправомерно перенесенный на математические объекты [65]. Утверждая, что бесконечная последовательность (которую мы не построили и не можем построить) должна быть либо фундаментальной, либо нефундаментальной, мы верим в некоторое действительное положение дел, существующее независимо от нас в каком-то идеальном мире. Наше суждение об этом положении дел может быть истинным или ложным, сама же реальность, никак не связана с нашими собственными действиями. Брауэр считал неправомерным использование закона исключенного третьего потому, что по его убеждению математические объекты и их отношения не есть независимая от субъекта реальность, о которой можно лишь истинно или ложно судить, а есть продукт собственной деятельности субъекта. Можно не принимать такую точку зрения, но трудно, по-видимому, отрицать, что онтологический статус предмета, определенный подобным образом, остается довольно сомнительным. Мы начинаем оперировать с предметом, присутствие которого непосредственно не удостоверено. Можно сказать, что такой предмет не существует в подлинном смысле, а как будто существует. Не имея возможности предъявить его в нашем рассуждении, мы рассуждаем так, как если бы он существовал (как если бы был построен). Установив существование с помощью закона исключенного третьего, часто имитируют непосредственное указание на этот предмет, вводя для него имя, участвующее далее во всех рассуждениях. Другой способ понимания существования в отношении предметов математики также связан скорее с предположением о существовании (по крайней мере, если сопоставлять его с конструктивным предъявлением индивида). Введение целых классов предметов осуществляется с помощью мыслительного хода, подобного тому, который был предпринят при введении отрицательных чисел для учета расходов и долгов в разных финансовых операциях или введении иррациональных (а затем и комплексных) чисел при решении алгебраических уравнений. Всякий раз в рассуждение вводится некий квази-объект, который не указывается конструктивно. Про него лишь говорится, что он может участвовать в различных манипуляциях с числами наравне с числами "настоящими" (например, рациональными). Для него придумывается специальный значок, который подставляется в формулы. Причем результатом применения к нему этих формул оказывается вполне определенное, вычисляемое число. Сам же этот квази-объект по существу оказывается отождествлен с тем значком, который подставляется вместо него в формулу.

Что же позволяет считать такие квази-объекты существующими. Здесь оказывается уместна та интерпретация существования, на которой настаивал Пуанкаре: критерием существования является свобода от противоречия. Все те формулы, в которые подставляются введенные для таких предметов значки, не должны противоречить друг другу. Более ясным этот критерий становится при обращении к аксиоматическому построению математики. Паункаре писал: "Если мы ... имеем систему постулатов, и если мы можем доказать, что эти постулаты не заключают в себе противоречия, то мы вправе рассматривать их как определения одного из тех понятий, которые фигурируют в этой системе предложений" ([48] с.373). Еще яснее такая интерпретация становится видимо, если прибегнуть к более поздней терминологии. Предмет существует, если он оказывается термом в непротиворечивой теории. Такой подход к проблеме существования сразу же ставит проблему непротиворечивости. Мы обсудим это подробнее, когда будем разбирать взгляды Гильберта.

Нашей ближайшей задачей будет углубление названных здесь интерпретаций существования. Каждая из них имеет достаточно солидную философско-математическую базу. Построение такой базы требует выявления ряда предпосылок, неявно присутствующих в любом математическом дискурсе. Сознательное прописывание такого рода предпосылок (т.е. работа, которую можно назвать уже чисто философской) не раз предпринималось ведущими математиками. К анализу взглядов некоторых из них мы сейчас обратимся.

**2 Концепция существования у Кантора**

В работах Георга Кантора есть ряд пассажей, в которых он довольно точно объясняет, что следует считать существующим в математике. Обратим внимание, прежде всего, на следующее высказывание.

"Во-первых, мы можем считать целые числа действительными (здесь, очевидно, имеется в виду "действительно существующими" - Г.Г.) постольку, поскольку они занимают на основе определений вполне определенное место в нашем рассудке, вполне ясно отличаются от всех остальных составных частей нашего мышления, находятся к ним в определенных отношениях и, таким образом, определенным образом видоизменяют субстанцию нашего духа." Такого рода реальность Кантор называет "интрасубъективной" или "имманентной", которую он отличает от реальности "транссубъективной" или "транзиентной". Последняя приписывается числам "постольку, поскольку их приходится рассматривать как выражения или отображения процессов во внешнем мире, противостоящем интеллекту". Внешний мир, что немаловажно, включает как "телесную", так и "духовную природу". "Для меня - пишет далее Кантор - не подлежит никакому сомнению, что оба эти вида реальности всегда совпадают в том смысле, что какое-нибудь понятие, принимаемое за существующее в первом отношении, обладает в известных, даже бесконечно многих отношениях транзиентной реальностью." ([31], c.79)

Итак "транзиентная реальность", будучи трансцендентным интеллекту внешним миром, все же совершенно адекватно представлена определенными понятиями. Эта определенность и должна служить своего рода критерием существования. Поскольку основные усилия Кантора направлены на обоснование реальности объектов создаваемой им теории бесконечных множеств, то речь должна идти главным образом об определенности этих множеств и их элементов. Если нам удастся установить их ясную "отличимость от всех остальных составных частей нашего мышления", то мы можем быть уверены, что они совершенно адекватно представляют предметы внешнего мира (причем, скорее "духовной" нежели "телесной" природы - поскольку речь идет о бесконечных множествах). Поэтому математика "при развитии своих идей должна считаться единственно лишь с имманентной реальностью своих понятий и не обязана вовсе проверять также их транзиентную реальность" (с. 79-80; курсив Кантора). Здесь уместно следующее рассуждение, проводимое Кантором несколько ранее. "Многообразие (совокупность, множество) элементов,принадлежащих любой сфере понятий, я называю вполне определенным, если на основе его определения и вследствие логического принципа исключенного третьего становится возможным рассматривать внутренне определенным как то, является или не является его элементом любой объект из этой сферы понятий, так и то, равны или нет друг другу два принадлежащих множеству объекта, несмотря на формальные различия в способах их задания." ([31], c. 50-51; Курсив Кантора).

Выяснять принадлежит ли данный предмет указанному множеству, а также устанавливать его тождественность с другим предметом на основании закона исключенного третьего, можно лишь предположив у него наличие определенных свойств. Последнее означает, что предмет рассматривается как сущность, могущая выступать в качестве субъекта суждения. Такой предмет должен быть введен в рассуждение с помощью родо-видового определения, т.е. опять же через указание его существенных свойств. Следовательно Кантор склонен рассматривать множество именно как класс сущностей объединенных на основании определенной общности признаков. Поскольку в его теории сами множества могут рассматриваться как элементы других множеств, то значит и сами эти классы следует считать сущностями. Любая сущность-множество задается с помощью набора определяющих свойств своих элементов, через которые устанавливаются также и свойства самой этой сущности.

Объекты своей теории Кантор вводит с помощью отвлечения общих признаков, присущих классу сходных предметов. Именно так он определяет понятия мощности и порядкового типа. Обе названные характеристики он рассматривает как общее свойство множеств "возникающее путем абстрагирования от всех особенностей". В частности Кантор пишет: "Тем, что мы мыслим только о том, что является общим для всех множеств, принадлежащих одному и тому же классу, мы получаем понятие мощности или валентности" ([31], c. 248; курсив Кантора). Точно также пишет он и о порядковых типах: "Я рассматриваю целые числа и порядковые типы как универсалии, которые относятся к множествам и получаются из них, когда абстрагируются от свойств элементов" (c. 269). Из последнего отрывка очевидно, что Кантор пытается рассматривать трансфинитные числа по аналогии с конечными целыми числами. Последние действительно можно рассматривать как результат абстрагирования от особенных свойств конечных множеств. Так число четыре есть то общее, что присуще четырем яблокам, четырем ножкам стула, четырем углам квадрата и т.д. - это весьма традиционное представление, восходящее к Аристотелю. Кантор же склонен рассматривать любое множество как сущность. Оно должно считаться существующим, если каждый его элемент вполне определен. Тогда и само множество вполне определено и его существенный признак (т.е. его порядковое число) также рассматривается как вполне определенное. Кантор, по-видимому, склонен субстантивировать и эти существенные признаки. Он даже пытается описать их в аристотелевских категориях материи и формы, утверждая, что совокупность элементов множества следует рассматривать как материю порядкового числа, а порядок, существующий между этими элементами, как форму (c. 270-271). (См. примечание 1)

**3 Брауэровская интерпретация существования**

Выше мы выделили такое понимание существования предмета в математике, которое основано на возможности непосредственно указать на этот предмет с помощью определенной завершенной процедуры. Иными словами, предмет существует тогда, когда может быть сконструирован. Утверждение, что такая интерпретация существования является атрибутом интуиционистской школы (существенным признаком, отличающим ее от других школ) давно стало общим местом. Выразительная формула - "esse=construi" - рассматривается (и, очевидно, не без основания) как девиз всего этого направления. Важно, впрочем, иметь в виду, что приведенная фраза принадлежит Карлу Попперу, весьма критично относившемуся к интуиционизму ([46], c. 473-479). Как бы точно ни характеризовало попперовское выражение интуиционистское понимание существования, оно нуждается в серьезном углублении.

Конструктивность математических объектов не появляется в математике интуиционистской школы как нечто само собой разумеющееся. По крайней мере для Брауэра (о котором мы и будем говорить в дальнейшем) она оказывается необходимым следствием анализа когнитивной деятельности человека. Структура математического рассуждения (как его представляет Брауэр) отражает прежде всего эту деятельность, более того, является наиболее чистым ее выражением.

Брауэровская математика (как и вся математика интуиционистской школы) чаще всего рассматривается в контексте кризиса оснований, вызванного обнаружением известных парадоксов и антиномий. Поэтому в требовании конструктивности математических объектов видят, главным образом, попытку устранить из математики самую возможность противоречия. Однако сам Брауэр, очевидно, идет гораздо дальше этой попытки. В целом ряде его работ обнаруживается не столько математический, сколько чисто философский интерес автора. Во всяком случае в тех статьях, на которые мы намерены в дальнейшем опираться, Брауэр озабочен не обоснованием корректности математических процедур, а исследованием когнитивной деятельности мысли как таковой. При этом он имеет явное намерение основать принцип существования в математике на исходных структурах мысли. Им предпринимается попытка трансцендентального анализа, призванного обосновать основные математические понятия как производные от форм интеллектуальной деятельности.

Брауэр представляет когнитивную активность человека в виде последовательности ясно отличимых друг от друга восприятий. В работе "Об основаниях математики" он писал так: "Человек наблюдает в мире последовательности событий, причинные цепи, разворачиваемые во времени. Основным феноменом этого наблюдения является сама интуиция времени, в которой происходит повторение восприятий или действий. Эта интуиция обнаруживается как последовательность моментов, разбивающих жизнь на последовательность вещей, качественно отличимых друг от друга" ([65], c. 99). Не само по себе восприятие определяет структуру мысли. Брауэр выделяет нечто, называемое "элементарный акт мысли", который описывает как "разделение моментов жизни на качественно различные части, которые, будучи разделены лишь временем, могут быть снова объединены". (См. примечание 2)Из этого, не очень ясного высказывания можно заключить, что акт мысли не есть простое действие или восприятие, связанное с определенным моментом времени. Элементарный акт мысли состоит именно в различении моментов. Иными словами элементарный акт мысли производит выделение некоторых отличных друг от друга индивидов, причем отличие их определяется разделяющими их временными промежутками. Производится, таким образом, организация времени, в котором, как в некоторой аморфной среде, выделяются фиксированные дискретные моменты. Это значит, что деятельность мысли определена двумя основными интуициями: дискретная последовательность и непрерывная среда (линейный континуум).

Естественным примером такой расчленяющей деятельности является деление отрезка прямой линии при нанесении на него последовательности точек. Само построение отрезка, отличимого от других отрезков, его выделение в качестве отдельного восприятия можно считать элементарным актом мысли. Но серия других элементарных актов, состоящих в делении построенного отрезка, позволяет различать в его пределах другие восприятия, части этого отрезка. Сами восприятия, (См. примечание 3) будучи ограничены какими-то границами (концы отрезка) могут быть безгранично делимы. Мы полагаем, что именно это имел в виду Брауэр, когда писал: "Возможность мысленного объединения нескольких единиц, связанных некоторым промежутком, никогда не исчерпывается вставлением новых единиц" ([55], c. 245). В результате процедуры деления отрезка мы структурируем ранее нерасчлененное единство и создаем определенную дискретную последовательность в пределах непрерывной среды. Таким образом мы все больше определяем эту самую среду, устанавливая отношения ее частей.

Две основные интуиции мысли находятся, следовательно, в состоянии постоянного взаимного определения и дополнения. Дискретная последовательность моментов структурирует аморфную среду, нечто постоянно недоопределенное, остающееся между названными моментами. (См. примечание 4)Приведенный нами геометрический пример является парадигмальным для описания любой когнитивной деятельности. Последняя, как видно, состоит в различении моментов восприятий в непрерывной временной среде и расчленении и уточнении самих восприятий.

Математика представляет собой наиболее чистое и, по-видимому, наиболее развернутое выражение такой деятельности. Френкель и Бар-Хиллел приводят следующее высказывание Брауэра: "Изначальная интуиция математики и всякой интеллектуальной деятельности представляет собой основу всех наблюдений за какими-бы то ни было изменениями, поскольку при этих изменениях игнорируются все качественные свойства" ([55], c. 240; курсив наш - Г.Г.).

Отвлечение от всякого чувственного содержания дискретной последовательности различающих актов мысли и создает представление целого числа, точнее, последовательности целых чисел, счета. При этом континуум, который Брауэр также называет основной интуицией, оказывается как бы в подчиненном положении. Он должен быть определен в ходе развертывания дискретной (числовой) последовательности.

Числовая последовательность оказывается для Брауэра основным математическим объектом. Конструирование, которое, согласно замечанию Поппера, является единственным онтологически значимым для математики процессом, следует рассматривать именно как конструирование числовых последовательностей. Впрочем, такое конструирование часто является не самоцелью, а скорее способом определения непрерывного протяженного предмета. Последний, конечно, не есть реальность, данная до всякого построения. Он - среда, а не вещь. Существует то, что происходит в этой среде, точнее, что создается субъектом, действующим в пределах, заданных этой средой. Создается же им дискретная числовая последовательность. Основополагающим отношением для любой последовательности является отношение 'до-после' (отношение порядка). Это отражает ведущую роль интуиции времени в математике. Структура различия, вносимая субъектом в среду, является временной структурой. Основным различением, существующим между создаваемыми элементами, является различение во времени. Определенность предмета возникает, однако еще при одном условии, которое и делает, на наш взгляд, окончательно ясной роль конструктивности. Необходимо принять во внимание еще одну важную характеристику когнитивной деятельности, на которую указывает Брауэр. "Человеческое поведение включает попытку удерживать достаточно длинную цепь 'вещей' с тем, чтобы иметь возможность перейти мысленно от последней к более ранней. Результатом такого действия является обнаружения правила, закона, формирующего последовательность" ([65], с. 99).

Коль скоро когнитивная деятельность подразумевает удержание в мысли некоторого единства, чего-то целого, явленного в последовательных восприятиях (или действиях), то математика должна, выражая эту способность, конструировать единый предмет из многих элементов последовательности. "Человеческое понимание основано на конструировании обычных математических систем так, что каждый индивидуальный элемент жизни связан с соответствующим элементом системы" (Там же). Конструкция, таким образом, оказывается необходима потому, что создает единство многих конструктивных элементов (различенных моментов или восприятий). Конструирование, следовательно, лежит в основе человеческого понимания всякого предмета вообще. Благодаря созданной конструкции, предмет предстает человеку как существующий. Особенно это важно коль скоро речь идет о протяженном предмете, представление которого связано с длением, с непрерывно длящимся восприятием. Смысл конструирования тогда состоит в создании целостной структуры различимых элементов в текучей и неопределенной среде.

Брауэром, следовательно, была реализована трансцендентальная установка, причем в том виде, в каком она прописана у Канта. К онтологической проблематике он подходит со стороны анализа рассуждения и выясняет как должен быть устроен предмет, чтобы фигурировать в рассуждении в качестве существующего. Более того, Брауэр выясняет, что предмет должен быть для этого создан в результате конструктивной деятельности, разворачиваемой во времени. Такая конструктивная деятельность сводится к созданию единой структуры - именно так понятый математический объект может рассматриваться как существующий. Единая структура, с другой стороны, развертывается согласно закону, правилу, устанавливаемому для ряда "вещей" или восприятий. По-видимому трудно интерпретировать это правило иначе, как действие способности суждения, как установление обобщающей гипотезы для совокупности установленных ранее фактов.

**4 Интерпретация существования в философии математики Гильберта**

Понимание существования математического предмета в рамках формального направления в математике представляется, на первый взгляд, совершенно противоположным интуиционистскому. В книге Френкеля и Бар-Хиллела ([55], c. 322), утверждается, что Гильберт скорее всего солидаризировался бы в этом вопросе с Пуанкаре, отождествляя существование со свободой от противоречия. Следующий пассаж из работы Гильберта "О понятии числа" уточняет и подтверждает эту точку зрения.

"В доказательстве непротиворечивости установленных аксиом я усматриваю вместе с тем и доказательство существования совокупности действительных чисел или - употребляя выражение Кантора - доказательство того, что система действительных чисел является 'консистентным' (готовым) множеством..." И далее: "...под множеством действительных чисел мы должны, согласно этой точке зрения, понимать не совокупность всевозможных законов, которым будут следовать элементы фундаментальных последовательностей, а скорее - как это было изложено выше - систему вещей, взаимоотношения которых задаются с помощью ранее указанной конечной и замкнутой системы аксиом." ([15], c. 320).

Обратим, прежде всего, внимание на серьезность расхождения Гильберта с Брауэром. Он (Гильберт) совершенно недвусмысленно говорит о множестве действительных чисел, как о существующем объекте. Такое допущение абсолютно невозможно для Брауэра, поскольку множество действительных чисел, понятое к тому же как совокупность "вещей", начисто исключается всякой интуицией и не может быть сконструировано. Мы очевидно имеем дело с принципиально иной философской установкой, выражающейся, в частности, в попытке иначе (чем основываясь на понятии конструктивности) определить онтологический статус предмета.

С другой стороны, однако, не нужно глубокого проникновения в суть формальной математики, чтобы увидеть множество черт, сближающих ее с интуиционистской. Прежде всего, обращает на себя внимание слово "финитность", использованное самим Гильбертом в качестве основной характеристики своего метода рассуждения. Сам этот термин, явно указывающий на завершенность осуществляемых процедур (т.е., по сути, на конструктивность), мог бы быть применен и к интуиционистской математике. Если же говорить о попытках определения финитности, предпринимавшихся именно в рамках гильбертовской школы, то они подчас вызывают полное ощущение того, что речь идет об основных посылках интуиционизма. Френкель и Бар-Хиллел, например, в качестве окончательной формулы финитного метода рассуждения приводят следующую цитату из Ж. Эрбрана (известного математика - ученика Гильберта): "Всегда рассматривается лишь конечное и определенное число предметов и функций, функции эти точно определены, причем определение позволяет произвести однозначное вычисление их значений; никогда не утверждается существование какого-либо объекта без указания способа построения этого объекта; никогда не рассматривается (как вполне определенное) множество всех предметов X какой-либо бесконечной совокупности" ([55], c.321). Наверное любой представитель интуиционистского или конструктивного направления опознал бы в приведенном отрывке описание своего собственного метода рассуждения. Речь однако идет об основных принципах формального метода. Заметим, кстати, что приведенное определение явно противоречит цитированному выше рассуждению Гильберта о существовании множества всех действительных чисел. Последнее никак не является объектом, для которого можно указать способ построения, однако Гильберт считает его существующим. Объясняется ли такое противоречие лишь тем, что приведенное здесь описание принадлежит не Гильберту, а математику, который мог в чем-то расходится со своим учителем? Или слова Эрбрана о существовании нужно понимать несколько иначе, чем те же самые слова, написанные интуиционистом?

В книге Гильберта и Бернайса [18] также есть описание финитного метода рассуждения. Важным уточнением по отношению к определению Эрбрана является, прежде всего, указание на наглядность финитного объекта. Лучшим примером, иллюстрирующим эту наглядность, является рассуждение, проводимое в формальной алгебре ([18], c. 56-58). Имея запас букв (переменных) и специальных знаков, мы, действуя в рамках этой дисциплины, конструируем объекты (полиномы), руководствуясь заранее заданными правилами. Начиная с простейших объектов, состоящих из одной буквы, мы можем построить множество разнообразных и весьма сложных объектов. В рамках, обусловленных правилами процедур, могут доказываться различные утверждения и устанавливаться свойства конструируемых объектов. Но каким бы ни было проводимое рассуждение, его справедливость может быть проверена наглядно, поскольку оно всегда непосредственно представлено перед глазами. Узнать что-либо о предмете означает построить его, любой предмет алгебры возникает под руками исследователя и процедура его возникновения полностью доступна наблюдению. Финитное рассуждение характеризуется в [18] как "прямое содержательное рассуждение, совершающееся в виде мысленных экспериментов над наглядно представимыми объектами." (с. 59).

Если бы, занимаясь математикой, мы могли бы постоянно оставаться в рамках финитного рассуждения, то естественно было бы понимать существование математического объекта в смысле его конструктивности. Однако предметы математики очень часто не являются финитными объектами. В [18] приводится целый ряд примеров того, как в математике возникают предметы, которые невозможно сконструировать и которые не могут быть представлены наглядно. Уже арифметика требует использования нефинитных рассуждений, прибегая к "tertium non datur" для обоснования высказываний о целых числах. Число, о свойствах которого мы судим на основании закона исключенного третьего, не представлено наглядно, и может не быть доступно конструированию с помощью конечной процедуры (с. 62-64).

Математический анализ, в его классическом изложении, практически полностью основан на рассуждениях о нефинитных предметах. Нефинитным является действительное число (о чем мы говорили выше), определяемое через бесконечную совокупность целых чисел (с. 64-67). Но анализ не ограничивается рассмотрением бесконечной совокупности целых чисел - он обращается к предметам "еще более нефинитным" (если можно так выразиться), рассматривая бесконечные совокупности действительных чисел в качестве актуально данных предметов. Рассуждения, используемые при этом, никак не могут апеллировать к наглядности. Естественно, что обращение к конструктивности, как критерию существования, оказывается бессмысленным для математического анализа. Говоря точнее, этот критерий заставляет считать названные (нефинитные) предметы своего рода химерами, странными измышлениями математиков, которые попросту не существуют.

Такой жесткий вывод и был, собственно, сделан интуиционистской школой, реализация программы которой состояла в значительном урезании всей математики. Намерение Гильберта было прямо противоположным: обосновать корректность тех частей математики, для которых существенно обращение к принципиально нефинитным предметам. Видимо это и обусловило его обращение к той интерпретации существования, которая была в свое время предложена Пуанкаре. Разработанный Гильбертом аксиоматический подход позволял достаточно ясно сформулировать, что означает свобода от противоречия в качестве критерия существования (см. выше - о существовании совокупности действительных чисел). Доказательство существования, таким образом превращалось в доказательство непротиворечивости системы аксиом. То, как Гильберт предполагал доказывать непротиворечивость, придает понятию финитности совершенно новый смысл.

Суть стратегии Гильберта сводилась к тому, чтобы, формализовав основные методы рассуждения в математике, установить их непротиворечивость путем анализа самого рассуждения (См, напр,[11], [12], [14], [18], [50], [55], [62]). Объектом изучения стали не математические предметы, а рассуждения об этих предметах. Но рассуждение в математике, как и всякое человеческое рассуждение вообще, даже будучи обращено к бесконечному предмету, само остается конечным. Поэтому наука, изучающая рассуждения, названная Гильбертом метаматематикой, по определению имеет дело только с финитным объектом. Сама математика может сколько угодно оперировать с бесконечностью. Но это ее оперирование будет всегда выражено в виде конечного текста, записанного по определенным правилам. Требование наглядности оказывается здесь особенно важным. Мы можем быть уверены в производимых нами математических рассуждениях, если доказана их непротиворечивость. Доказательство же непротиворечивости, производимое на метауровне, может и должно быть наглядным, непосредственно очевидным. Объект, конструируемый в ходе метарассуждения, возникает у нас на глазах и его свойства (в частности, свойство непротиворечивости) оказывается наглядно представимым и непосредственно проверяемым. Здесь особую роль играет знаковая природа математического рассуждения. В нем любой (в том числе и бесконечный) предмет представлен знаком, конечным, более того, чувственным, доступным непосредственному восприятию объектом. Это обстоятельство специально подчеркивалось Гильбертом: "Кое-что уже дано в нашем представлении для применения логических выводов и для выполнения логических операций: объекты, которые имеются в созерцании до всякого мышления в качестве конкретных переживаний. Для того, чтобы логические выводы были надежны, эти объекты должны быть обозримы полностью, во всех частях; их показания, их отличия, их следование, расположение одного из них наряду с другим дается непосредственно, наглядно, одновременно с другими объектами, как нечто такое, что не может быть сведено к чему-либо другому и не нуждается в таком сведении..." И далее: "В математике предметом нашего рассмотрения являются конкретные знаки сами по себе, облик которых, согласно нашей установке, непосредственно ясен и может быть впоследствии узнан" ([15], c. 351).

Таким образом, по отношению к метаобъекту Гильберт предъявляет требования, пожалуй, более жесткие, чем Брауэр по отношению ко всем объектам математики. Последний не настаивает на "наглядности". Гильберт и Бернайс характеризуют установки интуиционизма как "расширение" финитной установки ([18], c. 71). При этом важно, что в конечном счете гильбертовская математика также основывается на определенных базовых интуициях. Френкель и Бар-Хиллел указывают, что такими интуициями для Гильберта являются первичные представления о тождестве и различии, а именно о самотождественности знака, который должен быть опознан как один и тот же при разных вхождениях в формулы и при этом отличЁн от всякого другого знака. Действительно, всякое конструирование объекта, коль скоро оно сводится к комбинирований некоторых элементарных конфигураций, подразумевает, прежде всего, способность видеть различия между разными конфигурациями и уверенно опознавать одну и ту же в различных обстоятельствах. Здесь однако уместны следующие два замечания. Во-первых, названные элементарные конфигурации, строго говоря, не являются уже знаками. Точнее, они могут быть названы знаками в силу их происхождения, поскольку именно в качестве знака выступали для математического рассуждения. В нем они действительно обозначают нечто иное - математический объект, о котором ведется рассуждение. Но как только само математическое рассуждение превращается в объект, т.е. становится предметом метаматематического рассуждения, эти знаки уже ничего не обозначают. Они выступают лишь как первичные структурные элементы, из которых складывается, как из деталей конструктора, исследуемое математическое рассуждение.

Во-вторых, сами эти знаки (или псевдо-знаки) очевидно оказываются объектами. Они конструируются как некоторые графические конфигурации и в качестве таковых уже сами являются предметами рассуждения. Здесь необходимо вернуться к вопросу о тождестве и различии, которые у Френкеля и Бар-Хиллела названы первичными интуициями формальной математики. Такой подход к интерпретации элементарных объектов метаматематического рассуждения был подвергнут критике, например, в [57], где проблема тождества и различия рассмотрена как чисто логическая и не нуждающаяся в ссылках на интуицию. Мы предпочитаем подойти к этому вопросу иначе. Различение знаков подразумевает возможность вынесения определенного суждения о тождестве или различии тех или иных элементарных графических конструкций. Знак или комбинация знаков становится субъектом метаматематического суждения, тогда как тождество или различие выступает его предикатом. Причем этот предикат присоединяется в суждении к субъекту в зависимости от того, как именно построена (начерчена) данная конфигурация. Например, суждение о том, что графические конфигурации 'n' и 'n', находящиеся в двух различных позициях формулы xn=2n, тождественны, основано на том, что оба знака построены сообразно одной и той же графической схеме. Таким образом, вопрос о тождестве или различии конструктивных элементов математического рассуждения решается с помощью суждения, которое, впрочем, находится в жесткой корреляции с процедурой построения наглядно представимого, зримого предмета. Тот факт, что отождествляя или различая знаки, мы как правило не делаем никаких суждений, не меняет ситуацию в принципе. Возможность такого суждения всегда присутствует. Акт различения или отождествления знаков не является некоторым первичным, неразложимым актом. Он действительно выражается на логическом уровне. Первичной интуицией является здесь пространство, поскольку именно в качестве определенной пространственной конфигурации всякий знак может быть узнан и отличен от другого.

Похожее рассмотрение можно провести и относительно математического рассуждения (вывода, доказательства), поскольку оно является объектом метаматематики. Рассуждение, будучи конструкцией, появляющейся в результате комбинирования знаков, представляет собой чувственно воспринимаемый объект. Он предстает в виде определенной пространственной конфигурации, определяемой как способом сочетания составляющих его знаков, так и способом начертания самих этих знаков. Как чувственно воспринимаемый объект рассуждение выступает в качестве субъекта метаматематического суждения. Задачей метаматематики оказывается установление ряда предикатов (например, предиката непротиворечивости) для названного субъекта. Но такого рода предицирование есть не что иное как выражение определенных пространственных свойств созерцаемого (точнее создаваемого на бумаге или на доске) объекта. (См. примечание 5)Рассуждение или система аксиом обнаруживает себя как непротиворечивое (обладающее предикатом непротиворечивости) в ходе его пространственного (строго говоря, пространственно-временного) конструирования. Суждение о непротиворечивости оказывается таким образом априорным и синтетическим, в самом строгом кантовском смысле. Гильбертовская метаматематика содержит в себе все установленные Кантом элементы знания: данный в созерцании объект, являющийся в пространстве и времени, синтетическое суждение об этом объекте и, наконец, синтез продуктивной способности воображения, в результате которого этот объект конструируется.

Таким образом две соперничающие математические школы имеют один и тот же философский корень. Можно сказать, что каждая из них сделала больший акцент на одной из двух выделенных Кантом интуиций. Если Брауэр, как мы видели, считал исходной интуицию времени, явно утверждая вторичность и производность пространства, то Гильберт, вообще ничего не говоря о времени, явно рассматривал пространство и пространственное конструирование как основу математики. Очевидная кантианская родословная двух влиятельных математических традиций несомненно требует более внимательного анализа кантовского текста. Именно к рассмотрению проблемы существования в математики с позиций философии Канта мы перейдем в следующей главе.

**Примечания**

1. Хотя Кантор и пытается выстроить иерархию математических понятий, подобную родо-видовой иерархии, и рассмотреть все построенные так объекты как некие субстантивированные универсалии, предлагаемая им процедура выделения общих свойств имеет мало общего с тем абстрагированием, которое описывает, например, Боэций (см. Введение). Как мощность, так и порядковый тип бесконечного множества невозможно определить как его собственное свойство. Оно не обладает этим свойством как субстанция своим атрибутом. Мощность бесконечного множества определяется как свойство отношения множеств. Сущности можно приписывать признак, рассматривая ее саму по себе, независимо от других сущностей. Мощность множества (равно как его порядковый тип) устанавливается только для класса множеств. Поэтому подвести канторовское представление о существовании под аристотелевское учение о сущности невозможно без серьезных натяжек, хотя сам Кантор, по-видимому, хотел именно этого.

2. Цитата приводится по книге [55], с. 245.

3. В разных местах Брауэр говорит о качественно различимых частях или различимых вещах. В любом случае речь идет о дискретной последовательности событий, характеризующих когнитивную деятельность. Ряд лежащих на прямой (последовательно, друг за другом) отрезков является естественной математической моделью такой деятельности.

4. Математическое развитие этих идей содержится в брауэровской теории континуума как среды становления для свободно становящихся последовательностей. Дискретные последовательности точек, выбираемых из среды сообразно некоторому закону или согласно свободному выбору, разбивают континуум на все более мелкие части, устанавливая определенную структуру отношений между этими частями. Подробно об этом см. в [34].

5. Близкий подход к математике разрабатывается в [60] под названием "пангеометризм".