**История развития понятия "функция"**

Функция — одно из основных математических и общенаучных понятий. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира.

**Пропедевтический период (с древнейших времен до 17 века)**

Идея функциональной зависимости восходит к древности. Ее содержание обнаруживается уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами. В первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур. Так, вавилонские ученые (4 – 5 тыс. лет назад) пусть и несознательно, установили, что площадь круга является функцией от его радиуса посредством нахождения грубо приближенной формулы: S=3r2. Примерами табличного задания функции могут служить астрономические таблицы вавилонян, древних греков и индийцев, а примерами словесного задания функции — теорема о постоянстве отношения площадей круга и квадрата на его диаметре или античные определения конических сечений, причем сами эти кривые выступали в качестве геометрических образов соответствующей зависимости.

Введение понятия функции через механическое и геометрическое представления (17 век)

Начиная лишь с 17 века в связи с проникновением в математику идеи переменных понятие функции явно и вполне сознательно применяется.

Путь к появлению понятия функции заложили в 17 веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт; они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Введено было единое обозначение: неизвестных — последними буквами латинского алфавита: x, y, z, известных — начальными буквами того же алфавита: a, b, c,... и т. д. Под каждой буквой стало возможным понимать не только конкретные данные, но и многие другие; в математику пришла идея изменения. Тем самым появилась возможность записывать общие формулы.

Кроме того, у Декарта и Ферма (1601 – 1665) в геометрических работах появляется отчетливое представление переменной величины и прямоугольной системы координат. В своей "Геометрии" в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы; он систематически рассматривал лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения — формулы. В 1671 году Ньютон под функцией стал понимать переменную величину, которая изменяется с течением времени (он называл ее "флюентой").

В "Геометрии" Декарта и работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции носило, по существу, интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых — функция от абсцисс (x); путь и скорость — функция от времени (t) и т. п.

**Аналитическое определение функции (17 – начало 19 века)**

Само слово "функция" (от латинского functio — совершение, выполнение) впервые было употреблено немецким математиком Лейбницем в 1673 г. в письме к Гюйгенсу (под функцией он понимал отрезок, длина которого меняется по какому-нибудь определенному закону), в печати он его ввел с 1694 года. Начиная с 1698 года Лейбниц ввел также термины "переменная" и "константа". В 18 веке появляется новый взгляд на функцию как на формулу, связывающую одну переменную с другой. Это так называемая аналитическая точка зрения на понятие функции. Подход к такому определению впервые сделал швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667 – 1748), который в 1718 году определил функцию следующим образом: "функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных". Для обозначения произвольной функции от x Бернулли применил знак j(x), называя характеристикой функции, а также буквы x или e; Лейбниц употреблял x1, x2 вместо современных f1(x), f2(x). Эйлер обозначил через f: y, f: (x + y) то, что мы ныне обозначаем через f(x), f(x+y).

Наряду с этим Эйлер предлагает использовать буквы F, Y и другие. Даламбер сделал шаг вперед на пути к современным обозначениям, отбрасывая двоеточие Эйлера; он пишет, например, jt, j (t+s).

Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 году ученик Бернулли Эйлер (во "Введении в анализ бесконечного"): "Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств". Так понимали функцию на протяжении почти всего 18 века Даламбер (1717 – 1783), Лагранж (1736 – 1813), Фурье (1768 – 1830) и другие видные математики. Что касается Эйлера, то он не всегда придерживался вышеуказанного определения; в его работах понятие функции подвергалось дальнейшему развитию в соответствии с запросами математического анализа.

В "Дифференциальном исчислении", вышедшем в свет в 1755 году, Эйлер дает общее определение функции: "Когда некоторые количества зависят друг от друга таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называют функцией вторых". "Это наименование, — продолжает далее Эйлер, — имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество определяется с помощью других".

Как видно из представленных определений, само понятие функции фактически отождествлялось с аналитическим выражением. Новые шаги в развитии естествознания и математики вызвали и дальнейшее обобщение понятия функции.

Одним из нерешенных вопросов, связанных с понятием функции, по поводу которого велась ожесточенная борьба мнений, был следующий: можно ли одну функцию задать несколькими аналитическими выражениями?

Большой вклад в разрешение спора Эйлера, Даламбера, Бернулли и других ученых 18 века по поводу того, что стоит понимать под функцией, внес французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830), занимавшийся в основном математической физикой. В представляемых им в Парижскую АН в 1807 – 1811 гг. "Мемуарах по теории распространения тепла в твердом теле", Фурье привел и первые примеры функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями.

Из трудов Фурье следовало, что любая кривая, независимо от того, из скольких и каких разнородных частей она состоит, может быть представлена в виде единого аналитического выражения и что имеются также прерывные кривые, изображаемые аналитическим выражением. В своем "Курсе алгебраического анализа", опубликованном в 1721 г., французский математик О. Коши обосновал выводы Фурье. Таким образом, на известном этапе развития физики и математики стало ясно, что приходится пользоваться и такими функциями, для определения которых очень сложно или даже невозможно ограничиться одним лишь аналитическим аппаратом. Последний стал тормозить требуемое математикой и естествознанием расширение понятия функции.

**Идея соответствия (19 век)**

В 1834 году в работе "Об исчезании тригонометрических строк" Н. И. Лобачевский, развивая вышеупомянутое Эйлеровское определение функции в 1755 г., писал: "Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано и аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать, или оставаться неизвестной... Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе".

Еще до Лобачевского аналогичная точка зрения на понятие функции была высказана чешским математиком Б. Больцано. Таким образом, современное определение функции, свободное от упоминания об аналитическом задании, обычно приписываемое Дирихле, неоднократно предлагалось и до него. В 1837 году немецкий математик П. Л. Дирихле так сформулировал общее определение понятия функции: "y есть функция переменной x (на отрезке a < x < b), если каждому значению x на этом отрезке соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие — аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами".

Примером, соответствующим этому общему определению, может служить так называемая "функция Дирихле" j(x).

Эта функция задана двумя формулами и словесно. Она играет известную роль в анализе. Аналитически ее можно определить лишь с помощью довольно сложной формулы, не способствующей успешному изучению ее свойств. Таким образом, примерно в середине 19 века после длительной борьбы мнений понятие функции освободилось от рамок аналитического выражения, от единовластия аналитической формулы. Главный упор в основном общем определении понятия функции делается на идею соответствия.

Во второй половине 19 века после создания теории множеств в понятие функции, помимо идеи соответствия была включена и идея множества. Таким образом, в полном своем объеме общее определение понятия функции формулируется следующим образом: если каждому элементу x множества А поставлен в соответствие некоторый определенный элемент y из множества В, то говорят, что на множестве А задана функция y = f(x), или что множество А отображено на множество В. В первом случае элементы x множества А называют значениями аргумента, а элементы их множества В — значениями функции; во втором случае x — прообразы, y — образы. В современном смысле рассматривают функции, определенные для множества значений x, которые, возможно, и не заполняют отрезка a < x < b, о котором говорится в определении Дирихле. Достаточно указать, например, на функцию-факториал y = n, заданную на множестве натуральных чисел. Общее понятие функции применимо, конечно, не только к величинам и числам, но и к другим математическим объектам. Например, к геометрическим фигурам. При любом геометрическом преобразовании мы имеем дело с функцией. Другими синонимами термина "функция" в различных отделах математики являются: соответствие, отображение, оператор, функционал и др.

Дальнейшее развитие математической науки в 19 веке основывалось на общем определении функции Дирихле, ставшим классическим

**Дальнейшее развитие понятия функции (20 век – ...)**

Уже с самого начала 20 века определение Дирихле стало вызывать некоторые сомнения среди части математиков. Еще важнее была критика физиков, натолкнувшихся на явления, которые потребовали более широкого взгляда на физику. Необходимость дальнейшего расширения понятия функции стала особенно острой после выхода в свет в 1930 году книги "Основы квантовой механики" Поля Дирака, крупнейшего английского физика, одного из основателей квантовой механики. Дирак ввел так называемую дельта-функцию, которая выходила далеко за рамки классического определения функции. В связи с этим советский математик Н. М. Гюнтер и другие ученые опубликовали в 30 – 40-х годах нашего столетия работы, в которых неизвестными являются не функции точки, а "функции области", что лучше соответствует физической сущности явлений. Так, например, температуру тела в точке практически определить нельзя, в то время как температура в некоторой области тела имеет конкретный физический смысл.

В общем виде понятие обобщенной функции было введено французом Лораном Шварцем. В 1936 году 28-летний советский математик и механик С. Л. Соболев первым рассмотрел частный случай обобщенной функции, включающей и дельта-функцию, и применил созданную теорию к решению ряда задач математической физики. Важный вклад в развитие теории обобщенной функции внести ученики и последователи Шварца — И. М. Гельфант, Г. Е. Шилов и др.

**Методические рекомендации**

Школьный курс изучения функции строится по аналогии с развитием в истории понятия функции.

До 7 класса идет накопление знаний, необходимых для введения понятия функции. Рассматриваются зависимости площадей фигур от длины их сторон, радиусов; решаются задачи, в которых одна величина зависит от другой и т. д. Этот курс можно назвать пропедевтическим.

В 7 классе впервые дается определение понятия "функция".

Дается определение функции на основе идеи зависимости и соответствия одной величины от другой. После введения определения понятия можно рассказать о том, где люди встречались с функциональными зависимостями, кто впервые ввел этот термин и что означает само слово "функция". Также в этом классе изучаются различные способы задания функции. Можно более подробно рассказать о табличном способе задания функции как о наиболее старом: привести примеры из истории математики, рассказать о значении и роли математических таблиц для математиков прошлых столетий. Примерами могут служить таблицы квадратов, кубов чисел, арифметических и квадратных корней, которые учащиеся могут увидеть на форзацах своих учебников, которыми они будут пользоваться позже.

Чуть позже можно познакомить учащихся с тем, что функция может быть не только от одной переменной, но и от нескольких. Полезно будет рассказать о французском математике Николе Ореме и его работе "О конфигурации качества", в которой он высказал идею функциональной зависимости от одной, двух и трех переменных и ее графическом изображении.

В 9 классе еще раз дается определение функции на основе идеи зависимости одной переменной от другой: "Функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y". Можно дать учащимся задание проследить в истории математики, на каком этапе развития понятия функции появляется такое определение и кто его вводит. Кроме того, в этом классе вводится символическое обозначение функции. Учащимся необходимо рассказать, кто ввел эту запись.

В 10 – 11 классах вводится современное понятие функции как соответствия между двумя множествами: "числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от D". Снова нужно проследить, когда появляется впервые такое определение, в чем его отличие от ранее существовавших.

Одному – двум учащимся можно предложить подготовить доклад на тему "История развития понятия функции". Можно дать сравнение уже известных им определений функции с новым определением после того, как этот доклад будет представлен в классе.

Нужно напомнить учащимся о том, что математика возникла из практических нужд человека, отсюда необходимо введение нового определения функции. Здесь нужно сказать о проблеме, с которой столкнулись физики, в частности, Поль Дирак; упомянуть его дельта-функцию, которая выходит далеко за рамки классического определения функции. Необходимо также сказать о работах, в которых неизвестными являются не функции точки, а "функции области", что лучше соответствует физической сущности явления.

Нужно также сказать и о том, что на этом развитие понятия функции не остановилось (понятие обобщенной функции) и, скорее всего, будет изменяться дальше, приспосабливаясь к нуждам науки.

**Заключительное занятие по теме "функция"**

Построение занятий в форме лекций полезно в хорошо подготовленных классах, где школьники способны воспринимать новый материал, хорошо ориентируются в изученном материале.

К сожалению, таких классов в современной школе становится все меньше и меньше, поэтому заключительное занятие я предлагаю провести по следующему плану: лекционный материал об истории развития понятия функции, проверку и закрепление знаний, решение примеров и задач необходимо чередовать. Важно проследить связь понятия "функция" с другими предметами, с повседневной жизнью.

Лекцию, читаемую учителем, слушать, безусловно, приятнее, но для учеников лучше принять непосредственное участие в подготовке урока.

Для проведения занятия я предлагаю раздать сообщения (на 3 – 5 минут каждое). Необходимо каждому из докладчиков помочь в работе над сообщением, продумать с ним план выступления, попытаться предугадать вопросы, которые могут последовать из аудитории.

Темы сообщений могут быть следующими (часть докладов можно взять из представленного реферата, переработав их предварительно для имеющегося уровня знаний учеников):

Понятие функции в математике до 17 века.

Функции вокруг нас (рассказ о значении функции в жизни человека).

Понятие функции через механическое и геометрическое представление (Виет, Декарт).

Функции в физике и геометрии.

Аналитическое определение функции (2 человека: история + конкретные примеры).

Идея соответствия.

Примеры использования понятия функции в естествознании (химия, биология).

Современное состояния понятия "функция" (готовит учитель для наиболее сильных классов).

О проведении урока следует объявить за 3 – 4 недели, подготовить стенгазету с анонсами предстоящих докладов.

Сам урок можно провести в виде конференции на тему: "Нужна ли нам функция". Желательно вовлечение в диспуты всех учеников класса.

Приложение

Бернулли Иоганн (1667 – 1748 гг.)

Швейцарский математик. Был сотрудником Лейбница в разработке дифференциального и интегрального исчислений, в области которых им был сделан ряд открытий. Дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений, продвинул разработку методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, поставил классическую задачу о геодезических линиях и нашел характерное геометрическое свойство этих линий, а позднее вывел их дифференциальное уравнение.

Больцано Бернард (1781 – 1848 гг.)

Чешский математик, философ, теолог. Первым (1817) выдвинул идею арифметической теории действительного числа. В его сочинениях можно найти ряд фундаментальных понятий и теорем анализа, обычно связываемых с более поздними исследованиями других математиков. В "Парадоксах бесконечного" (изд. 1851) Больцано явился предшественником Кантора в исследовании бесконечных множеств.

Даламбер Жан Лерон (1717 – 1783 гг.)

Французский математик, механик, философ. Основные математические исследования относятся к теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дал (1748) метод решения дифференциального уравнения второго порядка с частными производными, выражающего малые колебания бесконечной однородной струны (волнового уравнения), в виде суммы двух произвольных функций. Ему принадлежат также важные результаты в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений первого и второго порядков. В теории рядов его имя носит широко употребительный достаточный признак сходимости. В алгебре дал первое (не вполне строгое) доказательство основной теоремы о существовании корня у алгебраического уравнения. Много труда вложил в "Энциклопедию наук, искусств, ремесел", для которой он написал всю физико-математическую часть.

Декарт Рене (1596 – 1650 гг.)

Французский философ, математик, физик. Он является одним из основоположников аналитической геометрии. В его главном математическом труде "Геометрия" (1637) впервые введено понятие переменной величины, создан метод координат (декартовы координаты), введены общепринятые теперь значки для переменных величин (x, y, z, ...) буквенных коэффициентов (a, b, c, ...), степеней (x3, a5, ...). Декарт положил начало ряду исследований свойств уравнений; сформулировал правило знаков для определения числа, положительных и отрицательных корней (правило Декарта); поставил вопрос о границах действительных корней и выдвинул проблему приводимости (представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения двух функций такого же рода); указал, что уравнение третьей степени разрешимо в квадратных радикалах и его корни находятся с помощью циркуля и линейки, когда оно приводимо.

Дирак Поль Адриен Морис (1902 – 1984 гг.)

Английский физик-теоретик, один из основателей квантовой механики. Основные труды в математике по функциональному анализу и математической физике (уравнение Дирака, дельта-функция Дирака, статистика Ферми-Дирака). Нобелевская премия (1933).

Дирихле Петер Густав Лежен (1805 – 1859 гг.)

Немецкий математик. Основные труды по теории чисел и математическому анализу. Впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда (так называемый признак Дирихле), дал (1829) строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье функций, имеющей конечное число максимумов и минимумов.

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646 – 1716 гг.)

Немецкий математик, физик, философ, изобретатель, историк, языковед. В математике его важнейшей заслугой является разработка (наряду с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления. Дал определения дифференциала и интеграла, разработал правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного любой постоянной степени, дал определения экстремальных точек и точек перегиба, установил взаимно обратный характер основных операций анализа — дифференцирования и интегрирования. Заложил основы теории рядов и теории дифференциальных уравнений. Им предложены математические символы и термины, вошедшие во всеобщее применение - функция, дифференциал, дифференциальные уравнения, алгоритм, координаты, алгебраические и трансцендентные кривые, модель и др. Изобрел счетную машину и первый интегрирующий механизм, предвосхитил некоторые идеи матлогики, изложил начала теории определителей.

Лобачевский Николай Иванович (1792 – 1856 гг.)

Русский математик. Создатель (1826) неевклидовой геометрии. Дал (1834) метод приближенного решения алгебраических уравнений высших степеней; внес значительный вклад в теорию определителей. В области анализа Лейбниц получил новые результаты в теории тригонометрических рядов. Им же установлен один из наиболее удобных методов приближенного решения уравнений (метод Лобачевского).

Ньютон Исаак (1643 - 727 гг.)

Английский физик, математик, механик и астроном. Одновременно с Лейбницем, но независимо от него, разработал дифференциальное и интегральное исчисления. Создавая математику непрерывных процессов, Ньютон положил в основу понятия флюксии (производной) и флюенты (интеграла). В работе "Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов" (1669, опубл. 1711) дан метод вычислений и вычислений функций — приближение бесконечными рядами, который имел впоследствии огромное значение для всего анализа и его приложений. В этом же труде изложен метод численного решения алгебраических выражений (метод Ньютона). Наиболее полное изложение дифференциального и интегрального исчисления содержится в трактате "Метод флюксий и бесконечных рядов" (1670 – 71, опубл. 1736), в котором в механических и математических выражениях сформулированы обе взаимно обратные задачи анализа, применен метод флюксий ко многим геометрическим задачам, решены задачи интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений путем представления решения в виде бесконечного степенного ряда, дана формула (бином Ньютона) для любого действительного показателя.

Орем Никола (ок.1323 – 1382 гг.)

Французский математик, физик и экономист. Доказал (ок. 1350) расходимость гармонического ряда. В 1368 г. изложил учение о степени с дробными показателями. Написанный им "Трактат о сфере" сыграл значительную роль в разработке французской научной (астрономической и географической) терминологии.

Соболев Сергей Львович (род. в 1908 г.)

Советский математик. Основные труды по теории уравнений с частными производными, математической физике, функциональному анализу и вычислительной математике. Предложил новый метод решения гиперболических уравнений с частными производными, совместно со Смирновым В. И. разработал метод функционально-инвариантных решений для динамических колебаний слоистых сред. Им начато систематическое применение функционального анализа в теории уравнений с частными производными. Им же введен класс функциональных пространств и исследовано соотношение вложения для пространств. Ввел понятие обобщенного решения уравнения с частными производными и дал первое (1935) строгое определение обобщенной функции; с помощью этих понятий рассмотрел некоторые краевые задачи для уравнения с частными производными. В области вычислительной математики Соболев ввел понятие замыкаемых вычислительных алгоритмов, дал точную оценку норм погрешности кубатурных формул.

Ферма Пьер (1601 – 1665 гг.)

Французский математик. Получил важные результаты в теории чисел, алгебре, геометрии, теории вероятности. Автор ряда выдающихся работ. Ферма является одним из создателей теории чисел, с его именем связаны великая и малая теоремы Ферма. Вместе с Декартом является основоположником аналитической геометрии. В области метода бесконечно малых дал общее правило дифференцирования степенной функции, которое распространил на любые рациональные показатели.

Фурье Жан Батист Жозеф (1768 – 1830 гг.)

Французский математик. В труде "Аналитическая теория тепла" (1822 г.) вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и разработал метод его интегрирования при различных граничных условиях. В основе его метода лежит представление функции тригонометрическими рядами (рядами Фурье). Привел первый пример разложения в тригонометрические ряды функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями. Развил предложенный Даламбером для решения волнового уравнения метод разделения (метод Фурье) переменных для изучения задач о колебаниях струны и теплопроводности стержня.

Эйлер Леонард (1707 – 1783 гг.)

Математик, физик, механик, астроном. Родился в Швейцарии. Более 30 лет работал в Петербургской АН. Список его трудов содержит около 850 названий, в их числе несколько многотомных монографий по всем основным разделам современной ему математике и ее приложениям. Заложил основы нескольких математических дисциплин. Первый систематически ввел в рассмотрение функции комплексного переменного, вывел (1743) формулы, связывающие тригонометрические функции с показательными. Эйлер создал как самостоятельную дисциплину теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, и заложил основы теории уравнений с частными производными. Его имя носят подстановки Эйлера (1768) при замене переменных в специальных интегралах, Эйлеровы интегралы (1731), метод ломаных Эйлера (1768) в численном решении обыкновенного дифференциального уравнения, Эйлеровы углы (1748) в преобразовании координат, функция и теорема Эйлера (1763) в теории чисел, прямая Эйлера (1765) в треугольнике, теорема Эйлера для выпуклого многогранника (1758), Эйлерова характеристика многообразия, задача Эйлера о Кенигсбергских мостах (1736). Обозначения: f(x) — 1734; e, p — 1736; sin(x), cos(x) — 1748; tg(x) — 1753; Dx, Sx — 1755; i — 1777.

**Список литературы**

Глейзер Г. И. История математики в школе: 7 – 8 класс. М: Просвещение, 1982.

Глейзер Г. И. История математики в школе: 9 – 10 класс. М: Просвещение, 1983.

Чистяков В. Д. Исторические экскурсы на уроках математики в средней школе. Минск: Народная освета, 1969.

Малыгин К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. М: Учпедгиз, 1958.

Математический энциклопедический словарь. М: Сов. Энциклопедия, 1988.

Энциклопедический словарь юного математика. М: Педагогика, 1989.