Московский Технический Университет Связи и Информатики



## Кафедра Радиотехнических Систем

### реферат по

### избыточным кодам

Преподаватель: Смердова Н. Е.

Группа: РТ 9505

Студент: Матвеев А. Н.

Дата сдачи: Май 1999 года.

*Москва, 1999 г.*

Вступление.

Известно, что каналы, по которым передается информация, практически никогда не бывают идеальными (каналами без помех). В них почти всегда присутствуют помехи. Отличие лишь в уровне помех и их спектральном составе. Помехи в каналах образуются по различным причинам, но результат воздействия их на передаваемую информацию всегда один – информация теряется (искажается).

Для предотвращения потерь информации в канале были придуманы избыточные коды (коды с избыточностью). Преимущество избыточного кода в том, что при приеме его с искажением (количество искаженных символов зависит от степени избыточности и структуры кода) информация может быть восстановлена на приемнике.

Существуют избыточные коды с обнаружением (они только обнаруживают ошибку) и коды с исправлением (эти коды обнаруживают место ошибки и исправляют ее).

Для различных помех в канале существуют различные по своей структуре и избыточности коды. Обычно избыточность кодов находится в пределах 10…60% или чуть больше. Избыточность 1/4 (25%) применяется при записи информации на лазерные диски и в системах цифрового спутникового ТВ.

Классификация кодов.

Известно большое число помехоустойчивых кодов, которые классифицируются по различным признакам. По­мехоустойчивые коды можно разделить на два больших класса: блочные и непрерывные. При блочном кодировании последова­тельность элементарных сообщений источника разбивается на от­резки и каждому отрезку ставится в соответствие определенная последовательность (блок) кодовых символов, называемая обыч­но кодовой комбинацией. Множество всех кодовых комбинаций, возможных при данном способе блочного кодирования, и есть блочный код.

Длина блока может быть как постоянной, так и переменной. Различают равномерные и неравномерные блоч­ные коды. Помехоустойчивые коды являются, как правило, рав­номерными.

Блочные коды бывают разделимыми и неразделимыми. К разделимым относятся коды, в которых символы по их назначению могут быть разделены на информационные символы, несущие ин­формацию о сообщениях и проверочные. Такие коды обознача­ются как (*n, k*), где *n*- длина кода, *k*- число информационных символов. Число комбинаций в коде не превышает 2*^k*. К нераздели­мым относятся коды, символы которых нельзя разделить по их назначению на информационные и проверочные.

Коды с постоянным весом характеризуются тем, что их кодо­вые комбинации содержат одинаковое число единиц: Примером такого кода является код “3 из 7”, в котором каждая кодовая комбинация содержит три единицы и четыре нуля (стандартных телеграфный код № 3).

Коды с постоянным весом позволяют обнаружить все ошибки кратности *q=1,...,n* за исключением случаев, когда число еди­ниц, перешедших в нули, равно числу нулей, перешедших в еди­ницы. В полностью асимметричных каналах, в ко­торых имеет место только один вид ошибок (преобразование ну­лей в единицы или единиц в нули), такой код дозволяет обнару­жить все ошибки. В симметричных каналах вероятность необна­руженной ошибки можно определить как вероятность одновременного искажения одной единицы и одного нуля:

где *Pош* вероятность искажения символа.

Среди разделимых кодов различают линейные и нелинейные. К линейным относятся коды, в которых поразрядная сумма по модулю 2 любых двух кодовых слов также является кодовым словом. Линейный код называется систематическим, если первые *k* символов его любой кодовой комбинации являются информаци­онными, остальные (*n- k*) символов — проверочными.

Среди линейных систематических кодов наиболее простой код (*n,* *n-k*), содержащий один проверочный символ, ко­торый равен сумме по модулю 2 всех информационных символов. Этот код, называемый кодом с проверкой на четность, позволяет обнаружить все сочетания ошибок нечетной кратности. Вероятность необнаруженной ошибки в первом приближении можно определить как вероятность искажения двух символов:

Подклассом линейных кодов являются циклические коды. Они характеризуются тем, что все наборы, образованные циклической перестановкой любой кодовой комбинации, являются также кодо­выми комбинациями. Это свойство позволяет в значительной сте­пени упростить кодирующее и декодирующее устройства, особен­но при обнаружении ошибок и исправлении одиночной ошибки. Примерами циклических кодов являются коды Хэмминга, коды Боуза - Чоудхури - Хоквингема (БЧХ — коды) и др.

Примером нелинейного кода является код Бергера, у которо­го проверочные символы представляют двоичную запись числа единиц в последовательности информационных символов. Напри­мер, таким является код: 00000; 00101; 01001; O111O; 10001; 10110; 11010; 11111. Коды Бергера применяются в асиммет­ричных каналах. В симметричных каналах они обнаруживают все одиночные ошибки и некоторую часть многократных.

Непрерывные коды характеризуются тем, что операции коди­рования и декодирования производятся над непрерывной последо­вательностью символов без разбиения ее на блоки. Среди непре­рывных наиболее применимы сверточные коды.

Как известно различают каналы с независимыми и группирующимися ошибками. Соответственно помехоустойчивые коды можно разбить на два класса: исправляющие независимые ошибки и исправляющие пакеты ошибок. Далее будут рассматриваться в основном коды, исправляющие независимые ошибки. Это объясняется тем, что хотя для исправления пакетов ошибок раз­работано много эффективных кодов, на практике целесообразнее использовать коды, исправляющие независимые ошибки вместе с устройством перемежения символов или декорреляции ошибок. При этом символы кодовой комбинации не передаются друг за другом, перемешиваются с символами других кодовых комбинаций. Ес­ли интервал между символами, принадлежащими одной кодовой комбинации, сделать больше чем “память” канала, то ошибки в пределах кодовой комбинации можно считать независимыми, что и позволяет использовать коды, исправляющие независимые ошибки.

Блочные коды. Построение кодеков.

Линейные коды.

Из определения следует, что любой линейный код *(п, k)* мож­но получить из *k* линейно независимых кодовых комбинаций пу­тем их посимвольного суммирования по модулю 2 в различных сочетаниях. Исходные линейно независимые кодовые комбина­ции называются базисными.

Представим базисные кодовые комбинации в виде матрицы размерностью *n*X*k*

(7.7)



В теории кодирования она называется порождающей. Тогда про­цесс кодирования заключается в выполнении операции: **B=AG**,

где А*-* вектор размерностью *k,* соответствующий сообщению, В- вектор размерностью *п,* соответствующий кодовой комби­нации.

Таким образом, порождающая матрица (7.7) содержит всю не­обходимую для кодирования информацию. Она должна хранить­ся в памяти кодирующего устройства. Для двоичного кода объем памяти равен *k*X*n* двоичных символов. При табличном задании кода кодирующее устройство должно запоминать 

двоичных символов.

Две порождающие матрицы, которые отличаются друг от дру­га только порядком расположения столбцов, задают коды, ко­торые имеют одинаковые расстояния Хэмминга между соответствующими кодовыми комбинациями, а следовательно, одинако­вые корректирующие способности. Такие коды называются экви­валентными.

В качестве базисных комбинаций часто выбирают кодовые комбинации, содержащие по одной единице среди информационных символов. При этом порождающую матрицу удается записать в канонической форме (7.8)

где *I*- единичная *k*X*k* подматрица, *P*-*k*X*(n-k)-* подматрица проверочных символов, определяющая свойства кода. Матрица задает систематический код. Можно показать, что для лю­бого линейного кода существует эквивалентный систематический код.

Линейный *(п, k)* код может быть задан про­верочной матрицей Н размерности *(r*Х*п).* При этом комбинация *В* принадлежит коду только в том случае, если вектор В ортого­нален всем строкам матрицы Н, т. е. если выполняется равенство (7.9)

где т—символ транспонирования матрицы. Так как это равенство справедливо для любой кодовой комбинации, то

Каноническая форма матрицы Н имеет вид (7.10)

где *P* - подматрица, столбцами которой служат строки подмат­рицы *Р* (7.8), I-единичная *r*X*r* подматрица. Подставляя (7.10) в (7.9), можно получать *п—k* уравнений вида (7.11)

которые называются уравнениями проверки. Из (7.11) следует, что проверочные символы кодовых комбинаций линейного кода образуются различными линейными комбинациями информаци­онных символов. Единицы в любой *j*-й строке подматрицы Р, входящей в проверочную матрицу (7.10), указывают, какие информационные символы участвуют в формировании *j*-го провероч­ного символа.

Очевидно, что линейный *(п, k)* код можно построить, исполь­зуя уравнения проверки (7.11). При этом первые *k* символов ко­довой комбинации информационные, а остальные *п-k* симво­лов - проверочные, образуемые в соответствии с (7.11).



С помощью проверочной матрицы сравнительно легко можно построить код с заданным кодовым расстоянием. Это построение основано на следующей теореме: *кодовое расстояние линей­ного (п, k) кода равно d тогда и только тогда, когда любые d-1 столбцов проверочной матрицы этого кода линейно независимы, но некоторые d столбцов проверочной матрицы линейно зависимы.*

Заметим, что строки проверочной матрицы линейно независи­мые. Поэтому проверочную матрицу можно использовать в ка­честве порождающей для некоторого другого линейного кода (*п,* *п-k*), называемого двойственным.

Кодирующее устройство для линейного (*п,k*) кода (рис. на предыдущей стр.) состоит из *k*-разрядного сдвигающего регистра и *r=п-k* бло­ков сумматоров по модулю 2. Информационные символы одно­временно поступают на вход регистра и на выход кодирующего устройства через коммутатор К. С поступлением *k*-го информаци­онного символа на выходах блоков сумматоров в соответствии с уравнениями (7.11) формируются проверочные символы, которые затем последовательно поступают на выход кодера. Процесс декодирования сводится к выполнению операции

, где *S* — вектор размерностью *(п-k)*, называемый синдромом, *В*- вектор принятой кодовой комбинации.

Если принятая комбинация *В* совпадает с одной из разрешенных В (это имеет место тогда, когда либо ошибки в принятых символах отсутствуют, либо из-за действия помех одна разрешенная кодовая комбинация переходит в другую), то

В противном случае S≠O, причем вид синдрома зависит только от вектора ошибок *е*. Действительно,

где В- вектор, соответствующий передаваемой кодовой комби­нации. При S=0 декодер принимает решение об отсутствии оши­бок, а при S≠O - о наличии ошибок. По конкретному виду синдрома можно в пределах кор­ректирующей способности кода указать на ошибочные символы и их исправить.

Декодер линейного кода (рис. на следующей стр.) состоит из *k*- разрядного сдвигающего регистра, *(п-k)* блоков сумматоров по модулю 2, схе­мы сравнения, анализатора ошибок и корректора. Регистр слу­жит для запоминания информационных символов принятой кодо­вой последовательности, из которых в блоках сумматоров формируются проверочные символы. Анализатор ошибок по конкретно­му виду синдрома, получаемого в результате сравнения формиру­емых на приемной стороне и принятых проверочных символов, оп­ределяет места ошибочных символов. Исправление информацион­ных символов производится в корректоре. Заметим, что в общем случае при декодировании линейного кода с исправлением ошибок в памяти декодера должна храниться таблица соответствий между синдромами и векторами ошибок. С приходом каждой кодовой комбина­ции декодер должен перебрать всю таблицу. При небольших зна­чениях *(п-k)* эта операция не вызывает затруднений. Однако для высокоэффективных кодов длиной *п*, равной нескольким десяткам, разность *(п-k)* принимает такие значения, что перебор таблицы оказывается практически невозможным. Например, для кода (63, 51), имеющего кодовое расстояние *d=5*, таблица состоит из 2^12 = 4096 строк.



Задача заключается в выборе наилучшего (с позиции то­го или иного критерия) кода. Следует заметить, что до сих пор общие методы синтеза оптимальных линейных кодов не разра­ботаны.

Циклические коды.

Циклические коды относятся к классу линейных системати­ческих. Поэтому для их построения в принципе достаточно знать порождающую матрицу.

Можно указать другой способ построения циклических кодов, основанный на представлении кодовых комбинаций многочлена­ми *b(х)* вида:

где bn-1bn-2...bo - кодовая комбинация. Над данными много­членами можно производить все алгебраические действия с уче­том того, что сложение здесь осуществляется по модулю 2.

Каждый циклический код *(n, k)* характеризуется так назы­ваемым порождающим многочленом. Им может быть любой мно­гочлен *р(х)* степени *n-k*. Циклические коды характеризуются тем, что многочлены *b(x)* кодовых комбинаций делятся без остатка на *р(х)*. Поэтому процесс кодирования сводится к отысканию многочлена *b(x)* по известным многочленам *a(х)* а *р(х)*, делящегося на *р(х)*, где *a(х)-* многочлен степени *k-1*, соответствующий информацион­ной последовательности символов.

Очевидно, что в качестве многочлена *b(x)* можно использо­вать произведение *a(х)р(х)*. Однако при этом информационные и проверочные символы оказываются перемешанными, что затруд­няет процесс декодирования. Поэтому на практике в основном применяется следующий метод нахождения многочлена *b(x)*.

Умножим многочлен а(х) на и полученное произведение разделим на *р(х)*. Пусть (7.12)

где *m(х)*- частное, а *с(х)*- остаток. Так как операции сумми­рования и вычитания по модулю 2 совпадают, то выражение (7.12) перепишем в виде: (7.13)



Из (7.13) следует, что многочлен делится на *р(х)* и, следовательно, является искомым.

Многочлен имеет следующую структуру: первые *n-k* членов низшего порядка равны нулю, а коэффициенты осталь­ных совпадают с соответствующими коэффициентами информа­ционного многочлена *а(х)*. Многочлен *с(х)* имеет степень мень­ше *n-k*. Таким образом, в найденном многочлене *b(x)* коэффициенты при *х* в степени *n-k* и выше совпадают с информацион­ными символами, а коэффициенты при остальных членах, опре­деляемых многочленом *с(х)*, совпадают с проверочными сим­волами. На основе приведенных схем умножения и деления многочле­нов и строятся кодирующие устройства для циклических кодов.



В качестве примера приведена схема кодера и декодера для кода (см. рис.) с порождающим многочленом:

Код имеет кодовое расстояние *d=3,* что позволяет ему исправ­лять все однократные ошибки.

Принятая кодовая комбинация одновременно поступает в бу­ферный регистр сдвига, служащий для запоминания кодовой ком­бинации и для ее циклического сдвига, и на устройство деления на многочлен *р(х)* для вычисления синдрома. В исходном состоянии ключ находится в положении *1.* После семи тактов буферный ре­гистр оказывается загруженным, а в регистре устройства деления будет вычислен синдром. Если вес синдрома больше единицы, то декодер начинает производить циклические сдвиги комбинации в буферном регистре при отсутствии новой комбинации на входе и одновременно вычислять их синдромы s*(x)*x*i*modp*(x)* в устрой­стве деления. Если на некотором 1-м шаге вес синдрома окажет­ся меньше 2, то ключ переходит в положение 2, обратные связи в регистре деления разрываются. При последующих тактах ошиб­ки исправляются путем подачи содержимого регистра деления на вход сумматора по модулю 2, включенного в буферный регистр. После семи тактов работы декодера в автономном режиме ис­правленная комбинация в буферном регистре возвращается в ис­ходное положение (информационные символы будут занимать старшие разряды).

Существуют и другие, более универсальные, алгоритмы деко­дирования.

К циклическим кодам относятся коды Хэмминга, которые яв­ляются примерами немногих известных совершенных кодов. Они имеют кодовое расстояние d=3 и исправляют все одиночные ошибки. Среди циклических кодов широкое применение нашли коды Боуза- Чоудхури- Хоквингема (БЧХ).

Сверточные коды

Методы описания сверточных кодов.

Кодер СК содержит регистр памяти для хранения опреде­ленного числа информационных символов и преобразователь информационной последовательности в кодовую последовательность. Процесс кодирования производится непрерывно. Скорость кода *R=k/n*, где *k* - число информационных символов, одновременно поступающих на вход кодера, *n* - число соответствующих им символов на выходе кодера. Схема простого кодера показана на рис. 1.1а.



Информационные двоичные символы *u* поступают на вход регистра с *К* разрядами. На выходах сумматоров по модулю 2 образуются ко­довые символы a(1) и a(2). Входы сумматоров соединены с определенными разрядами регистра. За время одного ин­формационного символа на выходе обра­зуются два кодовых символа (*R= 1/2*). Возможно кодирование и с другими скоростями. При скорости 2/3 на вход кодера одновременно поступает *k=2* информационных символа, на выходе при этом образуется *n=3* кодовых символа. Схема такого кодера показана на рис. 1.1,6.

Рассматриваемый код называется сверточным, постольку последователь­ность кодовых символов а может быть определена как свертка информационных символов *u* с импульсным откликом кодера. На рис. 1.2 показано прохожде­ние единичной последовательности *u=100…* через кодер.

Символы a(1) и a(2) на его выходе образуют импульсный отк­лик h= 00111011 00... Таким образом, если на входе кодера действует произвольная информационная последователь­ность и, то последовательность на его выходе есть сумма по модулю 2 всех импульсных откликов, обусловленных действием смещенных во времени символов 1. Сверточный кодер, как автомат с конечным числом состоя­ний, может быть описан диаг­раммой состояний. Диаграмма представляет собой направлен­ный граф и описывает все воз­можные переходы кодера из од­ного состояния в другое, а так­же содержит символы выходов кодера, которые сопровожда­ют эти переходы.



Первоначально кодер находится в состоянии 00, и поступление на его вход информационного символа *u=0* перевозят его также в состояние 00. При этом на выходе кодера будут символы a(1)a(2)=00. На диаграмме этот переход обозна­чается петлей 00, выходящей из состояния 00 и вновь возвращающейся в это состояние. Далее, при поступлении символа *u=1* кодер переходит в состояние 10, при этом, на выходе будут символы a(1)a(2)=11. Этот переход из состояния 00 в состояние 10 обозначается пунктирной линией. Далее воз­можно поступление на вход кодера информационных симво­лов 0 либо 1. При этом кодер переходит в состояние 01 либо 11, а символы на выходе будут 10 либо 01 соответствен­но. Процесс построения диаграммы заканчивается когда бу­дут просмотрены все возможные переходы из одного состоя­ния во все остальные.

Решетчатая диаграмма является разверткой диаграммы состояний во времени. На решетке состояния показаны узлами, а пе­реходы соединяющими их линиями. После каждого пере­хода из одного состояния в другое происходит смещение на один шаг вправо. Решетчатая диаграмма дает наглядное представление всех разрешенных путей, по которым может продвигаться кодер при кодировании. Каждой информацион­ной последовательности на входе кодера соответствует един­ственный путь по решетке. Построение решетки производится на основе диаграммы состояний. Исходное состояние S(1)S(2)=0. С поступлением очередного символа *u=0* либо *1* воз­можны переходы в состояния 00 либо 10, обозначаемые вет­вями 00 и 11. Процесс следует продолжить, причем через три шага очередной фрагмент, решетки будет повторяться. Пунктиром показан путь 11100001..., соответствующий по­ступлению на вход кодера информационной последовательности 1011...

Для описания кодера последовательности символов на его входе и выходе представляют с использованием оператора задержки:

Здесь индексы в скобках обозначают: *i*- номер входа коде­ра, *1≤ j≤ n*, *j*- номер выхода кодера, *1≤i≤ k*. Индексы без скобок (0, 1, 2, ...) обозначают дискретные моменты времени.

Процесс кодирования может быть представлен как умножение многочлена входной информационной последователь­ности *u(D)* на порождающие многочлены кода G(j)(D), кото­рые описывают связи ячеек регистра кодера с его выходами (1.1):

# Порождающий многочлен представим в виде ряда (1.2):

СК можно также задавать порождающей матрицей (1.3):

 Порождающая матрица состоит из сдвигов базисной по­рождающей матрицы (верхняя строка матрицы О), которая, в свею очередь, состоит из элементар­ных матриц *Gi*, *0≤i≤k-1*, содержащих *k* строк и *n* столб­цов. Элементами этих матриц двоичных кодов являются сим­волы 0 и 1.

Как при использовании блоковых кодов, процесс кодирования может быть представлен в матричной форме: *A=UG* (1.4)

,где *U*- полубесконечная матрица входных информационных символов, *А*- полубесконечная матрица символов на выходе кодера.

Декодирование сверточных кодов.

Алгебраические методы декодирования основаны на ис­пользовании алгебраических свойств кодовых последователь­ностей. В ряде случаев эти методы приводят к простым реа­лизациям кодека. Такие алгоритмы являются неоптимальными, так как используемые алгебраические процедуры декодирования предназначены для исправления конкретных (и не всех) конфигураций ошибок в канале. Алгебраические методы отождествляют с поэлементным приемом последо­вательностей, который для кодов с избыточностью, как известно, дает худшие результаты, чем прием в целом.

Вероятностные методы декодирования значительно ближе к оптимальному приему в целом, так как в этом случае де­кодер оперирует с величинами, пропорциональными вероят­ностям, оценивает и сравнивает вероятности различных ги­потез и на этой основе выносит решения о передаваемых сим­волах.

Пороговое декодирование.

Вероятностные методы декодирования достаточно сложны в реализации, хотя и обеспечивают высокую помехоустойчи­вость. Наряду с ними широко применяют более простые ал­горитмы. Для этой цели используют класс СК, допускающих пороговое декодирование.

Рассмотрим систематический код со скоростью 1/2 и мно­гочленами:

Схема кодека на рисунке. Моделью двоичного канала являются сумматоры по

модулю 2, на входы которых, кроме кодовых последовательностей а(1) и а(2), поступают ошибки е(1) и е(2). Декодер содержит аналог кодера, в котором принятым символам формируется копия проверочной последовательности. В формирователе синдрома (сумматоре по моду­лю 2) образуется последовательность синдромов, которая поступает на вход синдромного регистра. Наборам ошибок соответствуют определенные конфигурации синдромов последовательности *S*. Если количество ненулевых синдромов превышает определенный порог, на выходе порогового элемента появляется символ коррекции, который в корректоре исполь­зуется для исправления ошибки в информационном символе.



*Список использованной литературы:*

1. *Радиотехнические системы передачи информации, под ред. В. В. Калмыкова*
2. *Сверточные коды в системах передачи информации, учебное пособие*