**S.Gran "A Course in Ocean Engineering"**

**Article 4.7 - FATIGUE**

Перевод с английского выполнил Панов О.Г. (г. Якутск). Буду рад вашим замечаниям, пожеланиям и предложениям, которые можно послать по адресу: filepark@hotmail.com. Оригинал находится на <http://www.dnv.no/ocean/course.htm>.

**Часть 4.7 УСТАЛОСТЬ**

Термин “усталость” в большинстве случаев используют для описания потери рабочих качеств или способности к функционированию после длительной работы без перерыва. Иногда он относится к временному режиму так, что прочность восстанавливается после некоторого перерыва в работе (релаксации). Он, также, может применяться к долговременным состояниям, в которых прочность не восстанавливается никогда. Непосредственное влияние может казаться безобидным, но если деформирование повторяется все время, то рабочие качества снижаются и, в конце концов, могут быть полностью утрачены.

Усталость в металлах относится к явлениям последнего вида (из опис. выше). Это процесс, который является необратимым и который может, в конечном счете, привести к разрушениям, таким как сломанные железнодорожные рельсы, потерянные зубья в шестернях, треснутый вал двигателя вертолета, негерметичность корабельного дна и т.д. Для того чтобы случилась авария, нет необходимости в чрезвычайно сложных условиях, ранее конструкции могли выдержать и большие нагрузки. Однако обычным свойством конструкция является то, что они могут находиться в эксплуатации значительную часть их проектного ресурса. Т.о., они повторно подвергаются внешнему воздействию, день за днем, год за годом. Каждый период воздействия вносит незначительный, но необратимый вклад в процесс усталости. Это может случиться, если даже все вызванные внешней нагрузкой напряжения, несомненно, находятся в линейной, упругой области, намного ниже предела прочности материала.

Основными внешними воздействиями, которые ведут к усталостному разрушению, являются циклические, т.е. периодические силы, они вносят соответствующие компоненты внутренних циклических напряжений. Силы такого рода изначально присутствуют во вращающихся механизмах, используемых в автомобилях и станках. В XIX-м веке в первых паровозах происходили катастрофические усталостные разрушения. В связи с этим, немецкий железнодорожный инженер А.Велер (*A.Woehler*) провел первые систематические лабораторные испытания на усталость (примерно 1860 г.).

Усталостные разрушения были также исследованы на стальных тонкостенных конструкциях, таких как мосты и опоры ЛЭП, которые часто были подвержены колебаниям вызванным ветром и другими факторами окружающей среды. В морских сооружениях, действие волн – это основной источник усталостных повреждений, проблема стала более острой с введением полностью сварных стальных корпусов. Трагической демонстрацией этого были “суда свободы” (*Liberty vessels*), которые в большом количестве были сварены вместе для обеспечения доставки грузов в Атлантике во время Второй Мировой Войны. Более 1000-чи, из примерно 5000-ч построенных кораблей, получили значительные повреждения из-за трещин в корпусах, и по этой причине, 2300 были полностью потеряны.

Сварные соединения оказались особенно чувствительны к усталости. Одной из основных причин этого является большая вероятность того, что соединения содержат неоднородности, такие как включения, полости, шероховатость поверхности и другие известные факторы, влияющие на зарождение трещин. Второй причиной является то, что нагрев и охлаждение во время сварки ведет к высоким остаточным напряжениям, которые ведут к увеличению скорости роста трещин и повреждений.

Усталостное разрушение предполагает разделение на три этапа. На начальном этапе, или этапе зарождения, появляются микротрещины. На этапе роста трещин, трещины растут с увеличением скорости под действием периодических внешних сил. На этапе разрушения, конструкция спонтанно разрушается, потому что оставшееся поперечное сечение слишком мало для противодействия внешним силам. Ранее представленный начальный этап отнимает часть усталостного ресурса конструкции, от 50 до 75%. Однако, более точные исследования на микроскопическом уровне показали, что микротрещины появляются уже после выработки 1% ресурса. К тому же, небольшие поверхностные дефекты, выступающие в роли источников зарождения трещин, уже могут присутствовать при поставке изделия производителем.

Обычно различают малоцикловую и многоцикловую усталость. При малоцикловой усталости, окончательное разрушение происходит приметно после 103 циклов и менее. При многоцикловой усталости, разрушение происходит после 103−109 циклов. В данной статье, мы рассматриваем только с многоцикловую усталость. Это вызвано тем, что морские конструкции рассчитывают на воздействие 107−109 волновых циклов во время их эксплуатации и примерно на то же число циклов напряжений.

Есть два различных подхода к прогнозированию усталостного ресурса, а именно, метод Палмгрена-Майнера (*Palmgren-Miner*), основанный на эмпирических S-N кривых и метод механики разрушения, основанный на теории Париса-Ергодана (*Paris-Ergodan*) с эмпирическими d*a*/d*N* кривыми. Метод Палмгрена-Майнера позволяет прогнозировать весь ресурс элемента, т.е. как начальный этап, так и фазу распространения, в то время как метод механики разрушения имеет дело только с фазой распространения.

Данная статья в основном относится к описанию усталости в морских конструкциях, таких как корабли и прибрежные сооружения, из-за напряжений вызванных волнами. Возникновение напряжений является статистическим, случайным процессом описанным функциями распределения вероятностей, как для малых, так и для больших промежутков времени. Для большого интервала времени мы можем использовать функции вероятности и статистические методы, определенные включая экстремальные (предельные) значения. Перечень наиболее важных интервалов времени дан в главе 4.7.1.

Прогнозирование усталостного ресурса по методу Палмгрена-Майнера – это одна из основных тем этой статьи. Данные по усталости выраженные через переменные входящие в S-N кривые рассмотрены в главе 4.7.2, основной акцент сделан на сварные соединения. Когда аналитическую форму S-N кривой объединяют с распределением вероятностей для размахов напряжений, усталостный ресурс может быть найден в закрытой математической форме. Такие формулы получают в главе 4.7.3, они имеют большое значение в инженерных приложениях. К тому же, к формулам для случайной нагрузки добавляют выражения для усталости, вызванной нестационарными переменными напряжениями. Это важно, например, в случае с прибрежными кранами.

Поскольку напряжения вызванные волнами являются случайными, то также будет существовать и погрешность, связанная с прогнозируемым ресурсом. В главе 4.7.4 рассматривается только естественная дисперсия ресурса, т.е. погрешность вызванная случайной природой циклических нагрузок. Это явление рассматривается через переменные входящие в уравнение Фоккера-Планка (*Fokker-Planck*), а также с помощью простой модели случайных блужданий.

Последние две главы посвящены механике разрушения. Глава 4.7.5 дает краткое описание модели роста трещины, ее фундаментальной и экспериментальной основы. В главе 4.7.6 рассматривается процесс развития трещины через переменные входящие в функцию вероятности. Это может найти применение в оценке усталостного ресурса, а также определит влияние начальных дефектов на расчетный ресурс.

Есть множество литературы по усталости и разрушению металлов. Часть 4.7 затрагивает лишь немногие избранные области, которые некоторым образом связаны с теориями обсуждаемыми во всей этой книге. Общий обзор процесса усталости материалов, в основном в деталях машин, можно найти в работе /1/. Можно рекомендовать работу /2/, как хороший справочник по усталости. В качестве руководства в практическом использовании правил и законов по этой теме можно посоветовать книгу /3/.

Глава 4.7.1 Нагружение вызывающее усталость.

**Источники переменных сил.** Корабли и морские конструкции испытывают циклические колебания напряжений, имеющие различное происхождение и частоту. Некоторые наиболее важные их виды представлены в табл. 4.7.1, а примеры диаграмм на рис. 4.7.1.

Табл. 4.7.1 Источники циклических напряжений в морских конструкциях.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тип и источник периодических напряжений | Средний период | Число циклов за время эксплуатации |
| Вибрации от механического оборудованияРезонансные вибрации вызванные волнамиИзгибающие напряжения вызванные волнамиМедленно меняющиеся силы вызванные волнами и ветромЕжедневные и приливно-отливные напряженияКолебания напряжений в связях корпуса судна на тихом ходе | 0,1 сек.1 сек.10 сек.10 мин.1 день1 неделя | 109108107106105104 |

Наверное, до сих пор, циклы напряжений, вызванные действием механизмов, являются самым распространенным источником усталостных разрушений. При данной скорости вращения, напряжения являются строго периодическими с целочисленными гармоническими составляющими. Т.о., в малом интервале времени амплитуды напряжений, безусловно, являются постоянными. Однако в больших промежутках времени с переменной скоростью вращения, колебательные резонансы с прилегающими стальными конструкциями и др. вызовут беспорядочность уровня напряжений.

В основных элементах конструкции и соединениях, напряжения вызванные волнами вносят основной вклад в процесс усталости. Они (напряжения) случайны как в коротких, так и в больших интервалах времени и всегда должны быть описаны распределениями вероятностей.



Рис. 4.7.1 Избранные диаграммы, показывающие действие циклических сил в морских конструкциях: a) Напряжения в корпусе танкера вызванные волнами в трех различных состояниях моря; b) Колебания в прибрежных кранах поднимающих грузы с и на транспортные корабли; c) Низкочастотный изгиб корпуса, вызванный изменением распределения груза в танкере; d) Ежедневные деформации в судне, происходящие из-за воздействия солнечного света; e) Растяжение швартовочного троса у дрейфующего танкера пришвартованного носом к рейдовому причалу; f) Напряжения в вале гребного винта небольшого рыболовного судна; g) Циклические силы действующие на элемент вызванные вихрем (моделирование на ЭВМ).

**Статистические распределения напряжений.** Что касается усталости, то обычно принимают во внимание размах напряжений. Ниже он обозначен через *S*. Если цикл напряжений имеет максимальное значение *σmax*, а затем минимальное *σmin*, то размах напряжений будет *S=σmax-σmin*. Основное гамма распределение будет выбрано как стандартное распределение для размаха напряжений. То же самое будет сделано при предсказании предельных значений. Основной причиной этого является то, что около нуля статистические моменты нецелочисленного порядка, которые часто появляются в формулах усталости, могут быть получены через аналитические выражения. Впрочем, это также может быть в случае основного бета распределения (2.2.5) и основного *F*-распределения (2.2.64), которые также могут быть использованы, когда это удобно.

По существу, запись гамма распределения будет такой же, как в главе 4.5.2. В стационарном коротком интервале времени размах, т.е. удвоенная амплитуда, циклов напряжений распределяется согласно функции гамма распределения с плотностью вероятности (2.6.16). Т.к. масштабный параметр *A* будет меняться с течением времени, то мы обозначим этот параметр переменной *X* так, что распределение размахов напряжений для малого интервала времени становится:

как в (4.5.14). В некоторых случаях это будет распределение Рэлея (*Rayleigh*), тогда параметры будут

где *σs* среднеквадратическое значение (СК) компоненты напряжений. В других случаях как, например, с силами сопротивления воздействию волн, может быть также близким к экспоненциальному распределению, где в таком случае, можно взять следующие параметры

В этом случае, переменная *X* равна среднему размаху напряжений **, а также равна соответствующему среднеквадратическому отклонению *σs*. Для больших интервалов времени, мы можем принять, что параметры *a* и *h* постоянны, тогда как масштабный параметр *X* изменяется в соответствии со вторым гамма распределением с функцией плотности вероятности:

Параметры *b*, *j* и *B* могут быть получены из регулярных долгосрочных измерений или из расчетов колебательных напряжений основанных на долгосрочной статистике колебаний. Обычно, (4.7.4) дается как распределение зависящее от времени, а именно как (4.5.15). Однако, т.к. развитие усталости является типичным процессом зависящим от количества циклов, то более точные результаты получаются при использовании распределения зависящего от числа циклов (4.5.21). Оно применяется, когда есть степенное соотношение вида (4.5.17) между средним периодом и средним уровнем напряжений.

**Распределение размаха напряжений для больших интервалов времени.** Т.к. усталость это продолжительный процесс, то большинство входных данных по нагрузке будет соответствовать распределению размахов напряжений для больших отрезков времени. Для того чтобы его получить, размах напряжений в каждом стационарном состоянии моря заданный (4.7.1) должен быть оценен через вероятность возникновения этого состояния заданную выражением (4.7.4). Т.о., для больших интервалов времени размах напряжений обычно задают с помощью интеграла

Для этого распределения, момент *Mm* главного, не обязательно целочисленного, порядка *m* может быть точно найден как

В некоторых случаях этот момент является достаточным для оценки усталостного ресурса при среднеквадратических значениях напряжений имеющих гамма распределение. Для того, чтобы найти собственно плотность вероятности *f(S)*, выражение (4.7.5) может быть интегрировано аналитически, но лишь в ограниченном числе случаев. В большинстве случаев, приближенное гамма распределение может быть найдено различными путями. Это подробно описано в главе 4.5, а здесь будет лишь подведен итог.

Функция плотности вероятности для распределения размахов напряжений для больших интервалов времени может быть записана как в (4.5.23):

где параметры *d*, *k* и *D* определены как функции неизвестных параметров *a*, *h*, *b*, *j* и *B*. Есть, по крайней мере, три метода для их получения:

1. Элементарный метод, глава 4.5.1;
2. Метод логарифмических моментов, глава 4.5.3;
3. Метод седловой точки (метод перевала), глава 4.5.5.

Элементарный метод, глава 4.5.1, широко использует удобные свойства двухпараметрового распределения Вейбулла (*Weibull*). Однако, т.к. это частный случай основного гамма распределения, то можно заранее принять, что все параметры формы распределения равны единице. Это предполагает, что в распределениях вероятностей (4.7.1), (4.7.4) и (4.7.7) будет

Масштабный параметр *D* в заданном большом интервале времени вычисляют из (4.5.12) и параметр наклона *k* находят из таблицы 4.5.1. В действительности, масштабный параметр *D* связанный с предельной амплитудой для большого интервала времени, обозначенной в (4.5.12) через *Yc*, часто бывает удобен, т.к. усталостный ресурс и вероятность перегружения описываются во многом одними и теме же переменными.

Метод логарифмических моментов, глава 4.5.3, используют для получения точных значений для первых трех логарифмических моментов для распределения вероятностей (4.7.7). Параметр формы *d* определяют из (4.5.35). Затем, параметр наклона *k* вычисляют из (4.5.36), и наконец, масштабный *D* параметр находят из (4.5.37). Этот метод дает хорошее соответствие в центральной области распределения и, т.о., наиболее пригоден для расчетов на усталость. Метод является наиболее общим, т.к. все параметры формы распределения *a*, *b* и *d* в (4.7.8) могут иметь произвольные значения.

Метод седловой точки, глава 4.5.5, является асимптотическим методом, который дает наилучшие результаты для оценки предельных напряжений. Он может быть удобен для усталостных целей из-за его численной простоты. Здесь параметр формы *d* задан выражением (4.5.82). Параметр наклона *k* задан (4.5.86), масштабный параметр *D* (4.5.87). Подобно элементарному методу, этот метод определяет не только предельные напряжения, но еще и напряженное состояние для короткого интервала времени, при котором появление этого цикла предельных напряжений наиболее вероятно. Это условие определяют с помощью масштаба напряжений *Xc*, данного в (4.5.92) и продолжительности (4.5.95) измеренной за *n* циклов. Метод седловой точки требует, чтобы параметр формы для малого отрезка времени *a* в (4.7.1) был равен единице.

**Коэффициент концентрации напряжений.** Прежде, размах напряжений *S* вводился без дальнейшего пояснения. Однако, в усталости элементов конструкции и тем более в механике разрушения, важно рассматривать напряжения на верном структурном уровне, а также верную компоненту тензора напряжений или комбинацию компонент. Для этих целей, вводят коэффициент концентрации напряжений в качестве связи между общими и местными напряжениями.

Например, как упоминалось в главе 3.8.6, эквивалентный брус (корпус судна рассматривается как балка) может быть подвергнут в средней части вертикальному изгибающему моменту *M*. Этот изгибающий момент вносит общие продольные напряжения *σglobal* в корпусе корабля. Соотношение между ними выражается через модуль сечения корпуса *W*, определенный в (3.1.18) так, что *σglobal* =*M*/*W*. Посмотрите рис. 4.7.2. Теперь предположим, что в корпусе есть прямоугольный люк. Продольные напряжения вдоль поперечного края люка обязательно равны нулю так, что в прилегающей области корпуса вызываются более высокие напряжения, особенно в углах. Предполагается, что местное значение продольных напряжений пропорционально общему напряжению, соотношение задается теоретическим (геометрическим) коэффициентом концентрации напряжений *Kt*, так, что *σlocal* =*Ktσglobal*.

Рис. 4.7.2 Концентрация напряжений, обусловленная наличием люка в корпусе корабля. Общие продольные напряжения, вызванные изгибающим моментом, на которые оказывает влияние люк, порождают концентрацию напряжений в углах.

В некоторых конструкциях, например в соединениях труб, коэффициент концентрации напряжений будет изменяться вблизи замкнутого контура края элемента в достаточно сложном образце, являясь причиной роста вплоть до критических значений, часто называемых “*hot spots*” (т.е. области повышенных напряжений). В некоторых данных по усталости, таких как в первом издании работы /6/, элементы конструкции классифицируют согласно показателю влияния надреза (эффективного коэффициента концентрации напряжений) *Kf*, который используют при построении усталостных кривых. Эффективный коэффициент концентрации напряжений является более определенным коэффициентом концентрации напряжений, преобразованным для того, чтобы учесть конкретную усталостную прочность материала. Для хрупких материалов эффективный коэффициент концентрации напряжений *Kf* близок к теоретическому коэффициенту *Kt*. Для пластичных материалов он может быть значительно ниже, отклонение задается индивидуальным коэффициентом чувствительности материала к концентрации напряжений.

Мы будем рассматривать размах напряжений *S* в описанных выше функциях вероятности как номинальные напряжения. Это может относится к общим, местным и сублокальным напряжениям в зависимости от обстоятельств, в основном к тем типам напряжений, которые необходимы для S-N кривых. Некоторые S-N кривые требуют, чтобы коэффициент концентрации напряжений включал компоненты номинальных напряжений. Другие S-N кривые учитывают возможные коэффициенты концентрации напряжений в соответствующем элементе конструкции.

В механике разрушения тензор номинальных напряжений относится к компонентам сублокальных напряжений, т.к. они появляются в области растрескивания, когда трещин еще нет. Действительное физическое напряженное состояние описывают с помощью переменной интенсивности локальных напряжений, которая связана с номинальными напряжениями геометрической функцией, а она, в свою очередь, зависит от размера трещины. Однако более подробно это будет описано в главе 4.7.5.

Глава 4.7.2 Данные по усталости.

Как уже упоминалось во введении, в принципе, есть два различных метода для предсказания усталостного ресурса, а именно, метод Палмгрена-Майнера и метод механики разрушения. Оба метода полагаются на лабораторные данные, но различных типов. Первый метод основан на S-N кривых, он будет рассмотрен в этой главе. Метод механики разрушения основан на d*a*/d*N* кривых, он будет кратко затронут в главе 4.7.5.

**Общая информация по S-N кривым.** S-N кривые показывают число циклов *Nf*, которое образец может выдержать до разрушения. Все циклы в испытании имеют определенный размах напряжений или амплитуду и измерение на одном образце дает одну точку на кривой. Естественно, общая тенденция такова, что чем меньше размах напряжений *S*, тем больше ресурс *Nf*. Кроме того, участки кривых зависят от нескольких физических факторов и могут быть представлены в различных математических формах. Для этого мы можем дать определение двух основных типов:

1. S-N кривые с логарифмическим масштабом на обеих осях (далее – логарифмические кривые), которые являются линейными или кусочно-линейными, при этом log*S* находится напротив log*N*.
2. S-N кривые с логарифмическим масштабом на одной из осей (далее – полулогарифмические), которые являются линейными, при этом размах напряжений *S* на линейной шкале находится напротив log*N*.

Рис. 4.7.3 Схема изображающая различные S-N кривые, в данном случае для сварных стальных соединений.

Кривые могут содержать, либо не содержать предел усталости (предел выносливости) *S0*, т.е. нижний предел размаха напряжений *S*, ниже которого ресурс бесконечен. Для сварных стальных соединений чаще всего используют S-N кривые в логарифмической форме. S-N кривые для нержавеющей стали, надрезанных стальных элементов, алюминия, проволочных тросов и т.д. чаще всего представлены в полулогарифмической форме. Примеры логарифмических S-N кривых показаны на рис. 4.7.3. Примеры полулогарифмических кривых есть на рис. 4.7.6.

**Сварные стальные соединения.** Усталостные трещины в стальных конструкциях часто ограничены сварными соединениями. Опыт показывает, это является причиной того, что усталостные повреждения ограничены этими областями. Данные S-N кривые рекомендованы для расчета сварных стальных соединений имеющих формы показанные в табл. 4.7.3. В дальнейшем мы будем ссылаться на различные формы кривых, как то:

1. S-N кривые без предела усталости, такие как I и IV.
2. S-N кривые с пределом усталости, такие как II и III.
3. Билинейные S-N кривые, такие как V.

Все кривые построены на основе кривой I, которая имеет аналитическую, логарифмическую форму:

Безразмерный параметр *m* определяет наклон кривой. *S1* – масштабный параметр, который имеет ту же размерность, что и размах напряжений *S*. Он может быть понят как фиктивный размах напряжений, который определяет усталостные повреждения после одного цикла. Если *S* представляет вместо размаха напряжений (двойной амплитуды) единичную амплитуду напряжений, то *S1* также должен быть преобразован с амплитуду напряжений (половину размаха). Чаще всего в литературе используют альтернативный параметр *A*. Однако, это может вызвать затруднения при смене единиц измерения. Для описания ресурса статистически, при данном размахе напряжений, обычно принимают, что *A* является нормальным логарифмом так, что log*A* нормален при данном среднем значении и среднеквадратическом отклонении. Номинальное значение *A* обычно дано как 95.5% выживаемости, как показано в табл. 4.7.2. Стандартные значения, закрепленные за параметрами *m* и *S1* (или log*A*), обычно определяют ряд классов усталости: B, C, D, E, F, F2, G, W, T и X.

Табл. 4.7.2 Параметры стандартных классов S-N кривых

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Класс усталости | *m* | *S1* в *N*/*мм2*Размахнапряжений | Log10*A*97.5% от показателей выживаемости | *E*(log10*A*)Среднее значение | *σ*(log10*A*)Стандартное отклонение |
| BCDEFF2GWTX | 4.03.53.03.03.03.03.03.03.04.1 | 5656783911482101558577752862615412113073640 | 15.0113.6312.1812.0211.8011.6311.3911.2012.1614.60 | 15.369714.034212.600712.516912.237012.090011.752511.566212.660615.4400 | 0.18210.20410.20950.25090.21830.22790.17930.18460.24840.4200 (xxx) |

log означает log10

Для соответствующих классов, значения параметров даны в табл. 4.7.2, выраженные через *m* и *S1*, вместе со статистическими параметрами для log*A*. Данный тип сварных соединений, в таком случае, относится к наиболее типичному классу усталости. Некоторые, избранные элементы конструкций, относящиеся к классам E, F и G показаны на рис. 4.7.4. Более полный обзор сварных соединений и рекомендованных классов усталости есть в ряде работ, например /3/, /4/ и /6/.

В то время как класс усталости связан с типом элемента конструкции, форма S-N кривой, относящаяся к рис. 4.7.4, связана с окружающей конструкцию средой. Поэтому, для различных условий эксплуатации существует несколько отличающийся подход, который может быть определен следующим образом:

* Кривая I: Основная кривая при использовании в упрощенных исследованиях и в обычных условиях. Численно, параметры кривой *m* и *S1* (или log*A*) даны в табл. 4.7.2. Для больших напряжений, кривые других типов идентичны кривой I, за исключением кривой IV, где время до разрушения сокращено на половину.

**Британский стандарт** /4/, предложил кривые II и III, следующим образом:

* Кривая II: Элементы в коррозионной среде. Предел усталости *Nf*=2x108. (xxx) Размах напряжений ниже этого уровня не способствует процессу усталости.
* Кривая III: Элементы в воздушной среде. Предел усталости *Nf*=2x107. (xxx)

**Департамент по энергоснабжению** /5/, предложил кривые IV и V:

* Кривая IV: Элементы в коррозионной среде, без защитного покрытия. Срок службы сокращается до 0,5*Nf* (log*Nf* уменьшен на 0,30) по сравнению с основной кривой.
* Кривая V: Элементы в воздушной среде и элементы в морской воде с адекватной катодной защитой. Кривая имеет излом в точке *Nf*=107, так, что напряжения ниже этого уровня имеют конечное последовательно уменьшающееся влияние на процесс усталости.

Конкретно эти случаи и их сочетания были приняты с изменениями или без них и для некоторых других условий эксплуатации, таких как в /3/ и /6/.

Рис. 4.7.3 Избранные сварные соединения согласно классам усталости.

Глава 4.7.3 Замкнутый вид формул усталостного ресурса.

**Общие соображения.** В большинстве эмпирических исследований усталости оценивались повреждения и трещины, возникшие под влиянием синусоидальных колебаний напряжений с постоянной амплитудой. Однако, представленные выше циклические нагрузки, в частности колебания напряжений вызванные волнами, всегда случайны. Следовательно, для того, чтобы применить результаты лабораторных испытаний к предсказанию усталостных повреждений в морских конструкциях, необходимо сделать некоторые допущения в суммировании вкладов в процесс усталости последовательных циклов напряжений с переменной амплитудой. В таком случае, процесс может быть описан и оценен статистически. Формула Палмгрена-Майнера определяет накопленные усталостные повреждения через переменные входящие в коэффициент использования *η*:

 где *S* – амплитуда напряжений или размах напряжений (т.е. двойная амплитуда),

*η* − коэффициент использования, свидетельствующий о разрушении при *η*=1,

*n*(*S*) – действительное число циклов с амплитудой напряжений или размахом *S*,

*N*(*S*) – число циклов до разрушения *Nf* при амплитуде напряжений или размахе *S*.

Сумма взята по всем уровням напряжений. Если *n* циклов напряжений вообще, которое случайно распределено с плотностью вероятности *f*(*S*), то это означает, что число циклов напряжений между *S* и *S*+d*S* равно *nf*(*S*). Следовательно, коэффициент использования (4.7.10) может быть вычислен с помощью интеграла

Число циклов до разрушения *N*(*S*) определяют с помощью соответствующей кривой Велера, или S-N диаграммы, обычным делом является подобрать математическую кривую, предпочтительно прямую линию, к эмпирическим точкам на этой S-N диаграмме.

**Основная логарифмическая S-N кривая.** В случае логарифмической S-N кривой, такой как кривая I на рис. 4.7.3, число циклов до разрушения *N*(*S*) может быть записано как в (4.7.9). Если это выражение подставить в (4.7.11), то мы получим коэффициент использования:

где *Mm* – определяют как статистический момент с порядком распределения размаха напряжений *m*. Если образец подвергается *n* циклам нагружения за стационарный короткий период времени (скажем, приблизительно *n*=1000 в час), где размах напряжений имеет гамма распределение в соответствии с (4.7.1), то увеличение усталостного коэффициента использования будет

где мы применили формулу моментов (2.6.18) для гамма распределения.

Для больших отрезков времени, элемент имеет циклы напряжений с гамма распределением (4.7.7). Параметры *d*, *k*, и *D* можно определить с помощью одного из методов упомянутых выше, в главе 4.7.1. Соответственно, коэффициент использования после *n* циклов (скажем, *n*=108 за 20 лет) равен

В данном случае, эта величина может быть найдена проще и точнее при использовании (4.7.6). Что дает

Часто, полные функции гамма распределения могут быть вычислены на карманном калькуляторе с функцией факториала (!) применимой для дробных чисел. Следовательно, может быть использовано выражение (2.6A.8)

Кроме того, гамма функция включена в таблицу в приложении B, в конце книги.

**S-N кривые с пределом усталости.** Предел усталости (выносливости) означает, что циклы напряжений с амплитудой меньше, чем предельное значение *S0* не вносят свой вклад в сумму Майнера (4.7.9). Кривые II и III на рис. 4.7.3 именно такого вида. Учитывая этот предел, (4.7.9) следует записать как

Объединение этой S-N кривой с распределением напряжений (3.1.1) дает прирост в сумме Майнера для коротких интервалов, после *n* циклов:

которая заменяет выражение (4.7.13). Неполная гамма функция *Γ*(\_;\_) определяется в выражениях с (2.6.3) по (2.6.8). Соответственно, в диапазоне больших отрезков времени усталостный коэффициент использования, наработанный в течении *n* циклов напряжений распределенных в соответствии с (4.7.7), становится

который заменяет (4.7.14). Точная формула соответствующая (4.7.15) не найдена.

Численное определение функций (4.7.18) и (4.7.19) требуется не всегда, т.к. на основе этих формул может быть построена диаграмма усталости, мы называем ее C-N диаграммой, которая применяется для процессов со случайными нагружениями, таким же образом, как используется S-N кривая для регулярных синусоидальных напряжений. Посмотрите рис. 4.7.5. Формально коэффициент использования *η* в (4.7.18) и (4.7.19) может быть записан подобно (4.7.10):

Здесь *n*(*C*) – действительное число циклов напряжений в условиях с масштабным коэффициентом *C*. Переменная *C* аналогична *X* в (4.7.1) в случае малого интервала времени и *D* в (4.7.7) в случае большого. Таким же образом, *N*(*C*) – это число циклов до разрушения для процесса случайного нагружения с масштабом *C*, как следует из диаграммы. Сумма взята по всем условиям нагружения. Это описано более подробно в работе /8/.

Рис. 4.7.5 Пример C-N диаграммы, это кривая показывающая число циклов до разрушения. Амплитуды напряжений соответствуют распределению Вейбулла и имеют параметры распределения *l*, *h*, *С* /8/. Данные относятся к соединениям класса X.

**Билинейные S-N кривые.** S-N кривые имеющие предел усталости, упомянутые в предыдущей главе, не вносят вклад в процесс усталости при достаточно малом размахе напряжений, а именно меньше *S0*. Но все же, конструкции обладают чувствительностью к малым нагрузкам, которая увеличивается с возрастом. Небольшая амплитуда, которая не влияет на усталость, когда конструкция новая, может внести значительный вклад, когда усталостный ресурс конструкции подходит к концу. Для того, чтобы учесть это явление, в качестве S-N кривой была предложена кривая V на рис. 4.7.3. При определенном уровне напряжений *S0*, кривая меняет наклон так, что число циклов до разрушения можно записать

Численно, параметры могут быть связаны между собой следующим образом:

Подставленные вместе с распределением размахов напряжений для большого интервала (4.7.7) в коэффициент использования *η*, они дают выражение замкнутого вида:

Дополнительная пара неполных гамма функций *Γ*(\_;\_) и *γ*(\_;\_) определена в уравнениях (2.6.3) – (2.6.8).

S-N кривые, которые разделены на большое число прямых линий, так же могут быть представлены выражениями замкнутого вида типа (4.7.26). Однако, формулы будут содержать столько членов, насколько это будет удобно для проведения численного суммирования.

**Полулогарифмические S-N кривые.** В случае полулогарифмической S-N кривой, напротив log*N*(*S*) наносят размах напряжений *S*. Прямая линия на этом графике указывает на то, что число циклов до разрушения *N*(*S*) может быть записано

где *N*(*S*) – число циклов до разрушения при размахе напряжений *S*,

*N0* – параметр S-N кривой,

*S* – размах напряжений,

*B* – параметр наклона S-N кривой.

Посмотрите примеры на рис. 4.7.6. Параметр *N0* может быть принят в качестве фиктивного числа циклов необходимого для того, чтобы вызвать разрушение, когда размах напряжений равен нулю. Естественно, усталостное разрушение при нулевой амплитуде физически невозможно. По этой причине, обязательно должен существовать предел усталости *S0*.

Рис. 4.7.6 Примеры полулогарифмических S-N кривых. Левый рисунок взят из /1/ и относится к стальным образцам с и без надреза, с ясно выраженным пределом усталости. Правый рисунок взят из /7/ и показывает S-N кривые для стального троса различной конструкции и в различных условиях окружающей среды.

Напротив, если мы игнорируем предел усталости, полагая *S0*=0, и введем (4.7.27) в (4.7.11), то мы получим

*Φ*(*t*) рассматривают как характеристическую функцию распределения размахов напряжений, как это определено в (2.4.8). Далее, нахождение усталостного ресурса сводится к задаче вычисления характеристической функции распределения. Для многих распределений вероятностей существуют уже известные формулы, которые можно найти в книгах по данной теме.

Если предел усталости *S0* есть, как это действительно необходимо в (4.7.27), то введение распределения размахов напряжений для большого интервала времени (4.7.7) дает коэффициент использования:

Этот интеграл может быть решен точно лишь в ограниченном числе случаев, некоторые из них будут обобщены ниже. В элементарном гамма распределении *k*=1, что дает

Неполную гамма функцию находят как в (2.6.7). Экспоненциальное распределение с *d*=*k*=1 является особым случаем, который дает

В одностороннем нормальном распределении *d*=1/2 и *k*=1, что дает

Наконец, распределение Рэлея для размахов напряжений, т.е. *d*=1 и *k*=2, дает

где *Φ* (\_) − нормированный нормальный интеграл, определенный с помощью (2.3A.1).

**Усталость вызванная неустановившейся нагрузкой.** (xxx) До сих пор мы рассматривали только стационарные (т.е. с постоянной амплитудой), случайные напряжения. До того как отойти от формул усталости замкнутого вида, будет уместно обратить внимание на конструкции, которые испытывают неустановившиеся (т.е. с переменной амплитудой) колебания после импульсной нагрузки. Прибрежный кран, нижняя запись на рис. 4.7.1b, может послужить примером этого явления. Более схематичное изображение дано на рис. 4.7.7. Когда часть груза поднимается краном, конструктивный элемент в кране испытает изменение в статическом уровне напряжений *Z*. Если статическое напряжение возвращается на начальный уровень, когда нагрузка снята, то элемент испытал один усталостный цикл напряжений с размахом напряжений *Z*. Использование основной логарифмической S-N кривой (4.7.9) показывает, что эта единичная операция подъема увеличила коэффициент использования *η* на

Рис. 4.7.7 Последовательность размахов напряжений неустановившейся реакции, полученная с помощью метода дождевого потока для подсчета циклов (*the rain-flow cycle counting method*). Жирная линия показывает квазистатический цикл напряжений с размахом *Z*.

Однако, это заниженная оценка, т.к. не учтены динамические явления. Напряженное состояние свидетельствует о том, что за отклонением от начального значения, описанным коэффициентом динамичности *Ψ*, следует последовательность неустановившихся циклов, размах напряжений которых последовательно уменьшается на величину определяемую показателем *e-αT*=*e-πλ*. Здесь, *α* − коэффициент затухания, *T* – период колебаний и *λ*=*αT*/2*π* − это относительное демпфирование (доля критического демпфирования).

До сих пор не было сказано о том, как подсчитать циклы напряжений. Предполагалось, что цикл может иметь симметричный период, полученный либо из спектральной функции (2.5.78), либо по методу порогового пересечения (*threshold crossing procedure*), как в главе 2.3.3(i). В случае неустановившихся колебаний это не работает. Однако мы можем использовать более общий метод, известный как метод дождевого потока для подсчета циклов (*rain-flow counting method*). Более подробное описание посмотрите, например, в работе /2/. Этот метод дает размахи напряжений обозначенные на рис. 4.7.7 как No 1, 2, 3 и т.д.

Подставляя эти циклы напряжений в формулу Палмгрена-Майнера (4.7.10) и проводя суммирование (без предела усталости), мы получим уточненное усталостное значение

Сравнивая с (4.7.34), очевидно, что выражение в фигурных скобках это коэффициент усиления для процесса усталости, вызванного неустановившимися колебаниями. В качестве типичных значений, мы можем подставить *m*=1 и *λ*=0,025, что дает

Скажем, коэффициент динамичности *Ψ*=1, из-за неустановившихся процессов, дает коэффициент усиления усталости равный 7. Это соответствует снижению ресурса, полученного только из изменений статической нагрузки, до 1/7. Подробности даны в работе /9/.

Глава 4.7.4 Естественная дисперсия.

В части 4.3, мы придерживались того, что экстремальное значение в последовательности случайных амплитуд имеет некоторую дисперсию или погрешность, а именно (4.3.19), даже если параметры распределения амплитуд известны точно. Мы назвали это явление естественной дисперсией экстремального значения.

Мы имеем подобный эффект и в усталости. Поскольку коэффициент использования *η* это сумма вкладов в усталость отдельных циклов напряжений, то эта сумма также обязательно будет случайной, и будет иметь некоторую дисперсию. Если все переменные данного материала и параметры распределения напряжений рассматриваются как заданные, то коэффициент использования *η*, а также прогнозируемый ресурс, все равно будут иметь погрешность вызванную естественной дисперсией.

**Распределение отдельных скачков.** Мы можем рассмотреть коэффициент использования как точку движущуюся скачкообразно вдоль координатной оси *η*. Первоначально, когда конструкция новая, эта точка расположена на *η*=0. Предполагается, что конструкция изношена или требует ремонта, когда точка проходит через *η*=1. Коэффициент использования *η*, на этом отрезке, перемещаетсяскачками

движимый вперед отдельными циклами напряжений. Вообще, Δ*ηj* – это возрастание, вызванное *j*-м циклом напряжений.

Средний период напряжений можно обозначить через *T*. По истечении времени *t*=*nT* конструкция испытывает *n* циклов напряжений и значение коэффициента использования можно записать как

Длины отдельных скачков Δ*η* принадлежат одному и тому же статистическому ансамблю и можно предположить, что они имеют одно и то же распределение вероятностей. Поэтому, для удобства, мы опишем длину скачка Δ*η* с помощью случайной величины Δ*η*=*xi*. Эта переменная связана с размахом напряжений *S* действительных циклов напряжений по всей S-N кривой. Учитывая, для удобства, основную кривую (4.7.9) это дает

Теперь, *S* – размах напряжений вызванный действием волн на конструкцию, который подчиняется гамма распределению с плотностью вероятности для больших интервалов времени (4.7.7), т.е. *g*(*d*, *k*, *D*; *S*).

Т.к. соотношение (4.7.39) согласовывается с преобразованием энергии (2.6.31), то длина скачка *xi* также подчиняется гамма распределению с функцией плотности вероятности *f*(*xi*)

как было получено в (2.6.33). Математическое ожидание  длины скачка *xi* получено из (2.6.17) как момент первого порядка

Соответствующие статистические моменты порядка 2 и 3 около нуля



и

соответственно. Для последующего использования, мы подставили обобщенные скорости *U*, *V* и *W*, определенные из выражений

В частности, *U* может интерпретироваться как средний рост коэффициента использования *η* за один цикл.

Дисперсия  длины скачка *xi* может быть получена как центральный момент второго порядка (2.4.3), что дает

Параметр *ν* − это среднеквадратическое отклонение **относительно математического ожидания длины скачка , этот параметр можно найти и в (2.4.3). Есть сходство с (2.8.34) по ширине диапазона.

Аналогично, центральный момент *μ*3(*xi*) длины скачка *xi* может быть получен из (2.4.4) и его можно записать

*λ* − это коэффициент асимметрии длины отдельного скачка. Например, для экспоненциального распределения он равен 2, а для нормального распределения 0.

Распределение вероятностей длины скачка Δ*η*=*xi* имеет характеристическую функцию *φ*(*s*), определенную в общем виде в (2.4.8) как

где *s*, в общем, может быть комплексным параметром. Разложение экспоненты в интеграле в ряд даст

Почленно интегрируя по *xi* и учитывая выражения (4.7.41) – (4.7.44) получим

Говоря физическим языком, отдельные вклады *xi* в коэффициент использования, которые вносятся напряжениями вызванными волнами, обычно довольно-таки нерегулярны. Если размах напряжений распределен экспоненциально, что часто бывает в морских конструкциях, то отдельный вклад *xi* для *m*=1 имеет среднеквадратическое относительное отклонение *ν*=4,36 и коэффициент асимметрии *λ*=19,6. Следовательно, функция плотности вероятности для отдельных приростов коэффициента использования очень широкая и в значительной степени асимметричная.

**Уравнение движения для коэффициента использования.** Коэффициент использования *η* в момент времени *t* описывают при помощи функции плотности вероятности *ρ*(*η*,*t*). Соответствующую характеристическую функцию обозначим через *Φ*(*s*,*t*), где *s* – такая же переменная, как и в (4.7.48). Ее получают с помощью преобразования плотности вероятности *ρ*(*η*,*t*)

Позже, эта характеристическая функция будет использована для вывода дифференциального уравнения в частных производных для *ρ*(*η*,*t*).

Теперь, если коэффициент использования после *n* циклов напряжений обозначен через *ηn*, как в (4.7.38), то коэффициент использования одним периодом позже будет

Согласно гипотезе Палмгрена-Майнера, вклад *xi* не зависит от предыдущих вкладов, так, что *ηn* и *xi* статистически независимы. В связи с этим, характеристические функции перемножаются, как это установлено правилом C в главе 2.4.2(iii). Т.к. эти функции уже определны в выражениях (4.7.50) и (4.7.47) соответственно, то характеристической функцией для распределения вероятностей *η* в момент времени *t*+*T* будет

Коэффициент использования *η* увеличивается скачкообразно и нерегулярно. Следовательно, он не имеет непрерывной скорости изменения, хотя можно вывести ее среднее значение из скорости роста *U* в (4.7.41). Тем не менее, можно считать, что функция вероятности *ρ*(*η*,*t*) и характеристическая функция *Φ*(*s*,*t*) изменяются во времени непрерывно. Т.о., мы можем найти производную характеристической функции по времени на примере изменения через один цикл напряжений *T*

Левую часть выражения можно заменить на производную (4.7.50) по времени, тогда как в правую часть можно подставить (4.7.52) и (4.7.49).

Если мы рассматриваем *Φ*(*s*,*t*) в качестве преобразования Лапласа (*Laplace*) по *η*, который входит в плотность вероятности *ρ*(*η*,*t*), то члены вида *sjΦ*(*s*,*t*) в (4.7.54) будут определены как преобразование Лапласа производных от *ρ*(*η*,*t*) по *η*. Формально, его можно вывести с помощью трех последовательных интегрирований по частям правого интеграла из (4.7.50). Подставленное в (4.7.54) оно даст

Первым необходимым условием для всех *η* и *t* в этом соотношении является то, что функция плотности вероятности должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных

Это уравнение Фоккера-Планка третьего порядка (посмотрите работу /10/), которое включает смещение, рассеяние и асимметрию. Данное уравнение количественно описывает поведение функции вероятности с течением времени. Три коэффициента *U*, *V* и *W* заданы в (4.7.44) и могут быть вычислены на основе параметров распределения вероятностей и данных по S-N кривых.

Однако, что бы (4.7.56) было полным решением, для граничных членов во второй строке (4.7.55) необходимо, что бы *ρ*(*η*,*t*) и его первые две производные по *η*, были равны нулю при *η*=0 и *η*=∞. Т.к. функция плотности вероятности (4.7.40) длин отдельных скачков *xi* может быть равна бесконечности при *xi*=0, то *ρ*(*η*,*t*) также может быть первоначально равна бесконечности. По этой причине, одно уравнение Фоккера-Планка (4.7.56) не всегда может достаточно полно описать первый этап развития усталости.

**Моменты и приближенные решения.** Помимо уравнения Фоккера-Планка (4.7.56), можно получить достаточно хорошие данные по усталостному распределению вероятностей *ρ*(*η*,*t*) учитывая моменты.

Как установлено выше, мы можем рассматривать длины скачков в сумме (4.7.38) как статистически независимые. Согласно правилу C в параграфе 2.4.2(iv), три первых центральных момента складываются. Т.е. среднее значение  и два первых центральных момента коэффициента использования после *n* циклов будут



Т.о., среднеквадратическое отклонение, также как и момент третьего порядка коэффициента *η*, будет расти с увеличением *n*. Среднеквадратическое отклонение величины *η* относительно математического ожидания будет

где *ν* − это относительна дисперсия каждого отдельного скачка, определенная в (4.7.45). Таким же образом, показатель асимметрии коэффициента использования после *n* циклов

где *λ* − основная асимметрия (4.7.46) в отдельных скачках. Т.о., как относительная дисперсия, так и показатель асимметрии уменьшаются с течением времени и ростом *n*. В зависимости от значения показателя асимметрии *λ*3, функция вероятности *ρ*(*η*,*t*) может быть приблизительно найдена с помощью стандартных распределений.

Когда асимметрия становиться меньше двух, т.е. *λ*3<2,0, распределение вероятностей *ρ*(*η*,*t*) для *η* может быть представлено экспоненциальным гамма распределением с плотностью (4.2.21). Это имеет место для размахов напряжений распределенных экспоненциально и *m*=3 при *n*>96 циклов. Функцию плотности вероятности можно записать

Параметры *a*, *h* и *u* (не путать с параметрами (4.7.1)) можно найти из моментов, как это показано в главе 4.2.2.

Сначала, из уравнения (4.2.32) определяют форму или параметр асимметрии *a* как решение уравнения

Затем, находят параметр дисперсии *h*, так же как в (4.2.33), т.е.

Наконец, параметр распространения *u* вычисляют из (4.2.34)

*ψ*-функции – это поли-гамма функции, они представлены в приложении B.

Когда время проходит и асимметрия становится еще меньше, например *λ*3<0,4, для поли-гамма функций можно использовать некоторые асимптотические формулы. Для экспоненциальных распределений размахов напряжений это происходит при *n*>2400. Параметры экспоненциального гамма распределения *a*, *h* и *u* можно вычислить по более простым формулам

Если асимметрия *λ*3 становится еще меньше, то распределение коэффициентов использования *ρ*(*η*,*t*) можно представить функцией нормального распределения вероятностей. Плотность вероятности можно записать

Для числа циклов *n*=9600, в случае экспоненциального распределения размахов напряжений, асимметрия *λ*3=0,2. В большинстве случаев, это пренебрежимо малая величина так, что можно использовать функцию плотности нормального распределения вероятностей. Следовательно, функция нормального распределения вероятностей (4.7.69) достаточна при решении большинства задач по многоцикловой усталости. Но для малоцикловой усталости со случайным нагружением, значение прогнозируемого ресурса может быть полностью скрыто естественной дисперсией.

**Модель случайного блуждания.** Понятие о естественной дисперсии в усталости может быть, также, получено с помощью в некоторой степени искусственной, но поучительной модели случайного блуждания. Этот способ можно сформулировать следующим образом:

* Коэффициент использования *η* растет скачкообразно, эти скачки имеют определенную длину *L*.
* Для каждого цикла напряжений существует определенная вероятность *p* того, что *η* сделает один шаг вперед, а также вероятность (1-*p*) того, что он останется неизменным.
* Вероятность скачка в одном цикле не зависит от предыдущих скачков.

Данное значение коэффициента использования *η* определяют после *j* скачков, а именно

Однако, эти скачки будут появляться нерегулярно. Вероятность того, что в течении *n*≥*j* циклов коэффициент использования будет иметь *j* скачков, задана функцией вероятности биномиального распределения

Для краткой иллюстрации этого метода, рассмотрим особый случай, когда вероятность возрастания *η* в течение цикла равна 50% и вероятность того, что он останется прежним так же 50%

Это делает вероятность (4.7.71) равной

Для первых циклов, распределение вероятностей показано на рис. 4.7.8, его легко определить по таблице биномиальных коэффициентов.

Рис. 4.7.8 Зависимость функции вероятности коэффициента использования *η* от числа циклов, для случая *p*=(1-*p*)=0,5.

Очевидно, что после нескольких циклов, (дискретное) распределение вероятностей образует блоковое множество определенной ширины. За каждый цикл, вершина этого множества делает шаг вперед, ширина его также увеличивается.

В общем случае выражения (4.7.71), среднее значение  и расхождение *ση* коэффициента использования после *n* циклов равны соответственно

Следовательно, относительная дисперсия после *n* циклов

Сравнивая это выражение с уравнениями (4.7.57) и (4.7.60), можно сделать вывод, что, когда математическое ожидание длины одного скачка  и относительная дисперсия *ν* известны, параметры случайного блуждания *L* и *p* будут

Параметры  и *ν* даны точно в (4.7.41) и (4.7.45). Выраженные непосредственно через статистические моменты *M*1(*xi*) и *M*2(*xi*) отдельного скачка *xi*, взятые из (4.7.41) и (4.7.42), те же переменные будут

Если *m*=3 и размахи напряжений распределены экспоненциально, то *L*=20 и *p*=1/20. Это значит, что по методу сопряженных случайных блужданий коэффициент использования возрастет случайно в среднем один раз в двадцать циклов, кроме того, он возрастает скачком в течение одного цикла.

В методе случайных блужданий асимметрия не учитывается. Он соответствует упрощенному уравнению Фоккера-Планка второго порядка, в котором опущен параметр *W*.

Глава 4.7.5 Метод механики разрушения

**Происхождение трещин и особенности напряженного состояния.** Усталость в металлах имеет физическую основу, которая достаточно хорошо изучена. Первопричины находятся на субмикроскопическом уровне структуры материала. На этом уровне все металлы имеют монокристаллическую структуру, но с некоторыми несовершенствами в виде вакансий и дислокаций. Состояние вокруг дислокации такое же, как на конце незаконченного ряда зерен на кукурузном початке. В металлах высокой чистоты, линии дислокаций можно увидеть в электронный микроскоп.

В поле напряжений, которое вызвано в кристаллической решетке внешними силами, дислокации могут взаимодействовать и передвигаться. Предпочтительным результирующим движением является сдвиг или скольжение кристаллических слоев относительно друг друга, наибольшая чувствительность к нагрузке обнаружена при 45°. Движение дислокаций направлено на восстановление геометрически правильной кристаллической решетки. Во время этого процесса, линии дислокаций обязательно будут двигаться к поверхности кристалла, где их можно увидеть как микроскопические полоски, т.е. полосы скольжения. Соседние полосы скольжения образовывают волнистую поверхность, на которой канавки действуют как центры зарождения микротрещин распространяющихся вдоль межкристаллитных границ. Эти трещины будут наиболее чувствительны к компонентам напряжений направленным под углом 90° к поверхности трещины, под действием циклических нагрузок, они будут расти скачкообразно. Они обычно идут с поверхности в глубину металла и если к образцу приложено слабое растягивающее усилие, их можно увидеть как маленькие надрывы.

Факт раскрытия трещин при низких напряжениях указывает на то, что еще может быть использована линейная зависимость между деформациями и напряжениями. Элементы тензора напряжений можно рассматривать непрерывные функции от времени и расстояния. Но на микроскопическом уровне, эта ровная и непрерывная картина нарушается микротрещинами, вершины которых проявляются как небольшие местные сингулярности (особые точки или области) в непрерывном поле напряжений.

В частности, мы можем рассмотреть небольшую плоскую трещину идущую с поверхности. Распределение местных напряжений можно описать в локальной системе координат, где оси *x* и *z* перпендикулярны линии фронта трещины, как это показано на рис. 4.7.9.

Рис. 4.7.9 Координаты описывающие зависимость между локальными деформациями и напряжениями у фронта трещины.

Выражая линейное уравнение связи деформаций и напряжений в полярных координатах (*r*,*θ*) и допуская, что эти переменные независимы, компоненты локальных напряжений можно записать как

Это решение аналогично описанию неполных круговых волн (*circular partial waves*) в (3.5.8). На поверхностях трещины, положение которых определяется *θ*=±*π*, как нормальные напряжения, так и касательные должны быть равны нулю. Параметр, описывающий напряжения, который объясняет это требование, должен иметь радиальную функцию вида

где *n* – величина равная нулю или целому числу. В большинстве случаев, *n* необходимо опустить, т.к. получается либо бесконечное напряжение на больших расстояниях, либо бесконечные деформации в области фронта трещины. Реальным значением будет *n*=1, которое дает сингулярность у фронта трещины порядка -1/2. Для этого значения компоненты напряжений можно записать в виде

здесь,  − это нормированный множитель, введенный для удобства. Коэффициентом *K*, общим для всех компонент напряжений, обозначают интенсивность напряжений. Он зависит от формы трещины и ориентации тензора номинальных напряжений. Он, также, пропорционален преобладающей компоненте номинального напряжения, которая здесь будет обозначена через *σ*∞.

В некоторых особых случаях, интенсивность напряжений *K* может быть выведена аналитически с помощью интегрирования комплексной функции. Для длинной плоской трещины в металлической пластине длиной 2*x*, перпендикулярной продольным напряжениям, компоненты местных напряжений (4.7.80) будут

Следовательно, даже если номинальные напряжения *σ*∞ малы, компоненты местных напряжений *σij* у фронта трещины при *r*=0 могут быть чрезвычайно высокими. Они могут быть даже выше, чем прочность материала на разрыв.

Эта неоднородность в поле напряжений может привести к разрушению материала в очень малой области около вершины трещины и, т.о., увеличить эту трещину. Однако если напряжения малы, такая неоднородность будет сведена на нет когда фронт трещины проходит расстояние сравнимое с размером зерна. С другой стороны, если напряжения большие, неоднородность в поле напряжений не уравновешена, и трещина развивается до начала лавинообразного разрушения, которое протекает примерно со скоростью звука.

**Рост трещин.** Основным предположением, при использовании механики разрушения для объяснения усталости, является то что, рост трещин связан с изменениями интенсивности напряжений *K*. Цикл напряжений определяет максимум *Kmax* и минимум интенсивности напряжений *Kmin*, при этом размах интенсивности напряжений

Предположительно, этот цикл увеличит трещину глубиной *x* на небольшую величину Δ*x*:

Это выражение известно как закон роста трещин Париса-Эрдогана. *C*, *m* и *K0* – это эмпирические постоянные, полученные в результате лабораторных испытаний, они представлены на диаграммах, как это показано на рис. 4.7.10. Этот вид диаграмм практически аналогичен диаграмме Велера в методе Палмгрена-Майнера. Кривую или диаграмму можно назвать d*a*/d*N* кривой, обозначая, тем самым, увеличение длины трещины *a* за цикл. Длина трещины *a* служит для описания полуэллиптической трещин, где *a* и *b* обозначают длинную и короткую полуоси. *а* – описывает глубину трещины, а 2*b* – это раскрытие трещины.

Интенсивность напряжений прямо не учитывается. Поэтому, лабораторные измерения проводят на образцах имеющих трещину такого типа, для которой известны соотношения между номинальными напряжениями и интенсивностью напряжений. Рост трещины можно измерить, усредняя по необходимому числу циклов.

Т.к. кривая роста трещины связана лишь с материалом, а не с конкретными геометрическими особенностями, то образец может быть маленьким, а частота нагружения высокой, часто в звуковом диапазоне частот. Проводя измерения на одном образце, за короткое время можно получить несколько точек на d*a*/d*N* кривой. Диаграмма Велера, напротив, связана как с материалом, так и с формой, и для того, чтобы получить всего лишь одну точку на этой кривой, необходимо испытать один образец до разрушения. К тому же, большие образцы должны быть испытаны при низкой частоте, поэтому одно испытание может длиться несколько дней или недель. Т.о., с лабораторной точки зрения, анализ роста трещины более предпочтителен, чем классические испытания на усталость.

Как и в (4.7.81), существует линейное соотношение между размахом интенсивности напряжений Δ*K* и размахом преобладающих напряжений Δ*σ∞*. Исключив возможный коэффициент концентрации напряжений, он может быть равен размаху номинальных напряжений, т.е. двойной амплитуде, которая ранее была обозначена через *S*. Для того чтобы учесть возможное влияние формы образцов, выражение (4.7.81) можно записать в более общем виде:

В этом соотношении, *g*′(*x*) – локальная геометрическая функция, которую можно вычислить аналитически или численно с помощью линейного анализа напряжений. Справочник таких функций есть в нескольких работах по механике разрушения, например в книге /11/. Член  входит в состав геометрической функции для выражения этой функции без штриха *g*(*x*), далее ей будет отдано предпочтение. Подстановка (4.7.84) в (4.7.83) дает увеличение размера трещины:

Теперь, процесс усталости может быть описан как скачкообразное распространение трещины в материале

Рис. 4.7.10 Пример диаграммы роста трещины или d*a*/d*N* кривой, полученной в результате лабораторных испытаний. Безразмерный параметр наклона *m* соответствует параметру наклона в диаграмме Велера, классическое значение *m*=3.

Рассматривая весь срок службы элемента, начальная глубина трещины *x0* будет связана с микротрещинами, упомянутыми выше, а конечная длина *xf* будет достигнута при разрушении материала. Формально, глубина трещины может определять коэффициент использования *η*, возрастающий скачками Δ*η*:

Подставленный в (4.7.37), он равен росту коэффициента использования в теории Палмгрена-Майнера, но длина скачков Δ*η* явно зависит от текущего значения *η* или *x*.

Размах номинальных напряжений *S* в (4.7.85) такой же, как в (4.7.39). Можно считать, что он имеет функцию плотности вероятности (4.7.1) для короткого отрезка времени и (4.7.7) в случае большого интервала. Длина скачка Δ*x* имеет статистическое распределение согласно гамма распределению, усеченному при напряжениях соответствующих пределу Δ*K0*. Использование статистического распределения размахов напряжений (4.7.7) дает ожидаемую, т.е. среднюю длину скачка

Если мы не учитываем предел интенсивности напряжений Δ*K0*, то неполная гамма функция превратится в полную. Для простоты, далее мы используем это допущение. Кроме того, длина отдельного скачка Δ*x*, будет иметь стандартное отклонение и асимметрию повышающую естественную дисперсию роста трещины. Формулы могут быть получены аналогично уравнениям (4.7.41) – (4.7.46).

В отличие от изменения абстрактного коэффициента использования *η*, продвижение трещины описывает физический процесс. Часто, скачки можно физически увидеть как набор линий или полосок на поверхности излома. Трещина распространяется с некоторой скоростью, обозначенной *U*. Если *T*, как и раньше, обозначает средний период напряжений, то фронт трещины продвигается со средней скоростью

здесь мы не учли предел интенсивности напряжений. В этом случае, зависимость от *x* будет проявляться только через геометрическую функцию *g*(*x*). Уравнение (4.7.89) представляет собой дифференциальное уравнение движения для *x*, которое может быть, в некоторых случаях, аналитически интегрировано, что даст глубину трещины *x* как функцию от времени *t*.

**Распределение вероятностей для длины трещины.** Основное предназначение теории роста трещин – предсказать размер трещины в момент времени *t*2, если в момент *t*1 размер трещины известен. Кроме того, эта теория может быть использована для предсказания срока службы элементов конструкций, как альтернатива методу Палмгрена-Майнера. Когда используется теория роста трещин, необходимо выбрать начальную глубину трещины *x*0 в момент времени *t*=0, что часто является причиной погрешностей в оценке ресурса.

Как уже упоминалось во введении к этой главе, микротрещины или похожие концентраторы напряжений всегда присутствуют на металлической поверхности, даже если конструкция новая. Говорилось о начальной глубине 0,1–1 *мм*. Однако, эта величена наилучшим образом известна в виде функции вероятности. Следовательно, интегральная функция вероятности для глубины трещины будет функцией определяющей положение *x* и время *t*. Мы определяем ее как

Вероятность того, что глубина трещины в момент времени *t* превзойдет значение *x*, определяется соответствующей вероятностью превышения

В определенный момент времени *t*=*t*1, функция *F*(*x*,*t*1) характеризует простую пространственную функцию вероятности для глубины трещины. Соответствующая плотность вероятности будет

С течением времени, при действии случайной нагрузки, интегральная функция вероятности *F*(*x*,*t*) изменится. Она может быть описана уравнением Фокера-Планка так, как это было сделано для *η* в выражении (4.7.56). При этом динамические коэффициенты *U*, *V* и *W* зависят от положения *x* так же, как это было в (4.7.89). Но влияние естественной дисперсии вызванной *V* и *W*, показанное в главе 4.7.4(iii), в многоцикловой усталости незначительно. Следовательно, эти коэффициенты можно не учитывать, оставляя лишь дифференциальное уравнение движения первого порядка. По понятным причинам, это уравнение можно вывести.

С этой целью, мы можем рассмотреть некоторую точку в момент времени *t*, например точку с вероятностью 75%, что размер трещины превзойдет *x*. После временного шага d*t*, эта точка с вероятностью 75% передвинется в глубь материала на расстояние d*x*=*U*(*x*)d*t*. Однако, до временного шага d*t*, этой новой точке *x*+d*x* соответствовала вероятность превышения отличная от 75% на величину (∂*Q*(*x*,*t*)/∂*x*)d*x*. Следовательно, мы можем заключить, что локальное временное изменение вероятности превышения, в интервале времени d*t* будет

Кроме того, это выражение выглядит так же, как искомая вещественная производная по времени от интегральной функции вероятности или вероятности превышения, которая равна нулю, т.е.

Такая же форма записи использовалась в главе 3.1.1 для движения жидкости. Пространственную плотность вероятности определенную в (4.7.92) находят путем дифференцирования (4.7.94) по *x*, следовательно, она должна удовлетворять уравнению непрерывности

Оно аналогично первому порядку уравнения (4.7.56) и говорит о том, что вероятность изменяется так, как, например, в случае со сжимаемым в трубке газом. Кроме того, для уравнения (4.7.95) соблюдается условие нормировки

для любого момента времени *t*.

Изменение вероятности перехода *Q*(*x*,*t*) с течением времени в определенном месте *x* обязательно будет монотонно возрастающей функцией. Она начинается с некоторого начального значения и приближается к единице, когда время стремится к бесконечности. По этой причине, *Q*(*x*,*t*), принятая как функция от *t* при фиксированном значении *x*, также определяет распределение вероятности, а именно интегральную функцию вероятности для времени необходимого для того, чтобы трещина достигла точки *x*. Функция плотности вероятности *χ*(*x*,*t*), связанная с этим распределением, является производной от *Q*(*x*,*t*) по времени при определенном значении *x*

Вероятность того, что фронт трещины пересечет точку *x* во временном интервале [*t*,*t*+d*t*] будет *χ*(*x*,*t*)d*t*. Из (4.7.94) следует, что пространственная плотность вероятности *ρ*(*x*,*t*) и временное распределение вероятностей *χ*(*x*,*t*) связаны между собой выражением

Тогда уравнение непрерывности (4.7.95) для *χ*(*x*,*t*) можно записать как

при условии, что локальная скорость *U*=*U*(*x*) не зависит от времени. По мере того, как трещина проникает в глубь материала, она пройдет через критическое значение *xf*, при котором происходит хрупкое разрушение. В этот момент, интегральная функция вероятности по времени, мы ее обозначим как *Pf*(*t*), будет равна вероятности того, что глубина трещины превысит *xf*. Из (4.7.91) следует

это вероятность разрушения – центральная переменная в анализе надежности.

Глава 4.7.6 Распределение вероятностей для ресурса.

Мы рассмотрим некоторые особые решения дифференциального уравнения (4.7.94). Основные входные данные – это распределение глубин начальных трещин в момент времени *t*=0 и геометрическая функция *g*(*x*) в уравнении скорости роста трещины *U*(*x*) в (4.7.89). Мы допускаем, что предел усталости равен нулю.

**Начальное состояние.** Основная задача – найти распределение вероятностей для ресурса (4.7.100), чтобы можно было определить математическое ожидание ресурса и погрешность возникшую из-за неизвестных начальных размеров трещины. Для этого, мы можем принять, что распределения глубин начальных трещин соответствует распределению Вейбулла с вероятностью превышения

Математическое ожидание E[x] размера начальной трещины

и среднеквадратическое отклонение

Часто используется экспоненциальное распределение, *γ*=1. Однако, если предполагается, что на поверхности есть множество мелких дефектов, то доминирующая трещина будет определяться исходя из наибольшего дефекта. В этом случае, ожидается, что начальное распределение будет более островершинным, т.е. *γ* больше единицы. Часто, для морских судов и прибрежных конструкций принимаются поверхностные дефекты порядка *x*0=0,1 *мм*.

Далее мы ограничимся случаями, где *x* и *t* объединены в одну переменную *xi*=*xi*(*x*,*t*) так, что значение *xi* в момент времени *t*=0 соответствует начальной глубине трещины. В таком случае, вероятность превышения *Q*(*x*,*t*) является функцией только от *xi*

Интегральную функцию распределения *Pf*(*t*) получают путем подстановки *xi* вместо *x* в (4.7.101). Выраженное через *xi*, уравнение непрерывности становится

со средней скоростью роста трещин

Мы используем скорость роста *U* в явном виде, как это дано в (4.7.89). Обычно, это функция от текущего размера трещины *x*, введенного через геометрическую функцию *g*(*x*).

**Постоянная скорость роста.** В самом простом случае, скорость роста трещины постоянна и она не зависит от размеров трещины. Мы можем записать

Функция вероятности для глубины трещины *x* будет равномерно сдвигаться вдоль оси *x* без изменения формы. Согласующаяся с начальным распределением (4.7.101), интегральная функция распределения по времени до разрушения будет

Это трехпараметрическое распределение Вейбулла. Математическое ожидание ресурса

а среднеквадратическое отклонение

В методе Палмгрена-Майнера для этого решения применяется линейный коэффициент использования *η*, т.к. предполагалось, что движение равномерное. Также, существуют особые области в трубных соединениях, где из-за геометрических особенностей рост трещин почти равномерный.

**Линейный рост трещин.** Мы можем рассмотреть особый случай, когда скорость роста трещины пропорциональна ее размеру, т.е.

Такое может быть, если геометрическая функция со штрихом *g*′(*x*) в (4.7.84) постоянна и если параметр наклона *m* в d*a*/d*N* кривой равен 2. В этом случае, переменную *xi* можно определить как

которая удовлетворяет (4.7.106). Подставленная в начальную функцию вероятности (4.7.101), она дает интегральную функцию распределения по времени до разрушения

Сравнение с (4.2.6) показывает, что теперь усталостный ресурс имеет двумерное экспоненциальное распределение. От характера распределения зависит наиболее вероятный, т.е. характеристический, ресурс *tc*

Согласно (4.2.16), математическое ожидание ресурса

и согласно (4.2.17), среднеквадратическое отклонение

Следовательно, среднеквадратическое отклонение относительно наиболее вероятного ресурса

Мы не учли возможность того, что исходный размер трещины может быть с самого начала больше критического значения *xf*.

Характеристическая величина *xf*/*x*0, соотношения между конечным размером трещины и начальными поверхностными дефектами, имеет порядок 100. Когда исходные глубины трещин распределены экспоненциально, т.е. *γ*=1, это дает погрешность в оценке ресурса, т.е. несоответствие действительной скорости распространения, 28%.

**Скорость роста пропорциональная *xs*.** Модель для определения скорости роста трещин, которую можно увидеть во многих работах, имеет вид

Соотношение такого рода дает теоретическая формула (4.7.81). При *m*=3, получим классическое значение *s*=1,5. В этом случае, мы можем найти промежуточную постоянную движения

которая удовлетворяет уравнению (4.7.106). Объединенная с начальным распределением, интегральная функция распределения усталостных ресурсов станет

Это трехпараметрическое распределение Вейбулла, которое преобразовывается в (4.7.108), если *s*=0. Характеристическая для ресурса величина *tc* является вероятностью разрушения 1/*e*, т.е. это время, при котором экспонента в (4.7.120) равна 1. Эта величина будет

Среднеквадратическое отклонение найденного ресурса относительно этой характеристической величины будет

Следует отметить, что среднеквадратическое отклонение существует, только если *γ* больше, чем указанное выше значение, т.е. если *s* меньше, чем определенная в (4.7.122) величина. В противном случае, среднеквадратическое отклонение становится бесконечно большим. Однако, в качестве меры погрешности в определении ресурса, можно использовать, например, межквартильный размах.

Список литературы для части 4.7

1. American Society for Metals, "Metals Handbook" Vol. 10: "Failure Analysis and Prevention. Fatigue Failures." Metals Park, Ohio 44073, 8th Edition, 1975.
2. A.Almar-Naess, editor, "Fatigue Handbook", Tapir, Trondheim, 1985.
3. Det norske Veritas, "Fatigue Strength Analysis for Mobile Offshore Units", Classification Note No.30.2. August 1984.
4. British Standards Institution BS5400, "Steel, Concrete and Composite Bridges. Part 10. Code of Practice for Fatigue." 1980.
5. Department of Energy, "Offshore Installations. Guidance on Design and Construction. New Fatigue Design Guidance for Steel Welded Joints in Offshore Structures." DoE, Issue N. August 1983.
6. Norges Standardiseringsforbund, "Prosjektering av staalkonstruksjoner. Beregning og dimensjonering." Norsk Standard NS 3472, 1.utg. 1975, 2.utg. 1984.
7. F.Matanzo, "Fatigue Testing of Wire Rope." MTB-Journal Vol.6 No.6.
8. S.Gran, Evaluation of High Cycle Fatigue in Welded Steel Connections. Det norske Veritas, Report No.76-339.
9. S.Gran, "Fatigue in Offshore Cranes". Norwegian Maritime Research, No.4 1983, 2-12.
10. Y.K.Lin, Probabilistic Theory of Structural Dynamics. Robert E.Krieger Publishing Company. Huntington, New York, 1976 p.99.
11. H.E.Boyer, editor, "Atlas of Fatigue Curves," American Society for Metals, Metals Park, Ohio 44073, 1986.

Postscript Equations to Article 4.7.

Section 4.7.1 - Fatigue Loading.

Equation (4.7.1):

f sub 1 (S) = g(a, h, X; S) = |h| over { GAMMA (a) X} ( S over X ) sup ah-1 e sup{-(S/X) sup h}

Equation (4.7.2):

a = 1 h = 2 X = 2 sqrt 2 sigma sub s

Equation (4.7.3):

a = 1 h = 1 X = S bar = sigma sub S

Equation (4.7.4):

f sub 2 (X) = g(b, j, B; X) = |j| over { GAMMA (b) B} ( X over B ) sup bj-1 e sup{-(X/B) sup j}

Equation (4.7.5):

f(S) = int f sub 1 (S) f sub 2 (X) dX

Equation (4.7.6):

M sub m = B sup m {GAMMA (a + m over h ) GAMMA (b + m over j )} over{GAMMA (a) GAMMA (b)}

Equation (4.7.7):

f (S) = g(d, k, D; S) = |k| over { GAMMA (d) D} ( S over D ) sup dk-1 e sup{-(S/D) sup k}

Equation (4.7.8):

a = b = d = 1

Section 4.7.2 - Fatigue Data.

Equation (4.7.9):

N sub f = N(S) = ( {S sub 1}over S ) sup m = A over{S sup m} roman where A = S sub 1 sup m

Section 4.7.3 - Closed-form Fatigue Life Formulae.

Equation (4.7.10):

eta = sum{n(S)}over{N(S)}

Equation (4.7.11):

eta = n int 1 over{N(S)} f(S) dS

Equation (4.7.12):

eta = n over{S sub 1 sup m} int from 0 to inf S sup m f(S) dS = n over{S sub 1 sup m} M sub m

Equation (4.7.13):

DELTA eta = n ( X over{S sub 1}) sup m {GAMMA (a + m/h)}over{GAMMA (a)}

Equation (4.7.14):

eta = n ( D over{S sub 1}) sup m {GAMMA (d + m/k)}over{GAMMA (d)}

Equation (4.7.15):

eta = n ( B over{S sub 1}) sup m {GAMMA (a + m/h)}over{GAMMA (a)} {GAMMA (b + m/j)}over{GAMMA (b)}

Equation (4.7.16):

GAMMA (1 + x) = x!

Equation (4.7.17):

N sub f = N(S) =

left { lpile{( {S sub 1}over S ) sup m S > S sub 0 above inf S < S sub 0}

Equation (4.7.18):

DELTA eta = n ( X over{S sub 1}) sup m {GAMMA (a + m over h ; ({S sub 0}over X ) sup h )} over{GAMMA (a)}

Equation (4.7.19):

eta = n ( D over{S sub 1}) sup m {GAMMA (d + m over k ; ({S sub 0}over D ) sup j )} over{GAMMA (d)}

Equation (4.7.20):

eta = sum n(C) over N(C)

Equation (4.7.21):

N sub f = N(S) = left { lpile{({S sub 1} over S ) sup m S > S sub 0 above ({S' sub 1}over S ) sup m' S < S sub 0}

Equation (4.7.22):

m' mark = m + 2

Equation (4.7.23):

N(S sub 0 ) lineup = 1 cdot 10 sup 7

Equation (4.7.24):

S sub 0 lineup = 10 sup{- 7 over m} S sub 1 = S' sub 1 10 sup{- 7 over m+2}

Equation (4.7.25):

S' sub 1 lineup = S sub 1 ( {S sub 1}over{S sub 0}) sup{- 2 over m+2} = S sub 0 ({S sub 1}over{S sub 0} ) sup{m over m+2} = S sub 1 10 sup{- 14 over m(m+2)}

Equation (4.7.26):

eta = n "{" ( D over{S sub 1}) sup m {GAMMA (d + m over k ; ({S sub 0}over D ) sup k )} over{GAMMA (d)} +

( D over{S' sub 1}) sup m+2 {gamma (d + m+2 over k ; ({S sub 0}over D ) sup k )} over{GAMMA (d)} "}"

Equation (4.7.27):

N sub f = N(S) = left { lpile{N sub 0 e sup{- S over B} above inf } for lpile{S \(>= S sub 0 above S \(<= S sub 0}

Equation (4.7.28):

eta = n over{N sub 0} int e sup tS f(S) dS = n over{N sub 0} PHI (-t) roman where t = -1/B

Equation (4.7.29):

eta = n over{N sub 0} d over{GAMMA (d) D sup dk} int from{S sub 0}to inf S sup dk-1 e sup{-( S over D ) sup k + S over B} dS

Equation (4.7.30):

eta = n over{N sub 0} B over{B - D} 1 over{GAMMA (d)} GAMMA (d; {B - D}over BD S sub 0 )

Equation (4.7.31):

eta = n over{N sub 0} B over{B - D} e sup{-{B - D}over BD S sub 0}

Equation (4.7.32):

eta = n over{N sub 0} 1 over sqrt pi e sup{{D sup 2}over{4B sup 2}} GAMMA \s(12(\s0 1 over 2 ; ( {S sub 0}over D - D over 2B ) sup 2 \s(12)\s0

Equation (4.7.33):

eta = n over{N sub 0} e sup{{D sup 2}over{4B sup 2}} \s(12"{"\s0 e sup{- 1 over 2 ( {sqrt 2 S sub 0}over D - D over{sqrt 2 B}) sup 2} + sqrt pi D over B [ 1 - PHI ({sqrt 2 S sub 0}over D - D over{sqrt 2 B} ) ] \s(12"}"\s0

Equation (4.7.34):

DELTA eta = DELTA eta sub 0 = ( Z over{S sub 1}) sup m

Equation (4.7.35):

DELTA eta mark = 1 over{S sub 1 sup m} "{" psi sup m Z sup m + (1 - psi ) sup m Z sup m (e sup{- alpha T/2} + e sup{- alpha T}) sup m [ 1 + e sup{- alpha Tm} + e sup {-2 alpha T m} + cdot cdot cdot ] "}" lineup = ( Z over{S sub 1} ) sup m "{" psi sup m + (1 - psi ) sup m {(1 + e sup{- pi lambda}) sup m}over{2 sinh pi lambda m} "}"

Equation (4.7.36):

DELTA eta = ( Z over{S sub 1} ) sup m "{" psi sup 3 + 15 (1 - psi ) sup 3 "}"

Section 4.7.4 - Natural Dispersion.

Equation (4.7.37):

DELTA eta sub 1 , DELTA eta sub 2 , DELTA eta sub 3 , cdot cdot cdot DELTA eta sub j cdot cdot cdot

Equation (4.7.38):

eta (t) = eta sub n = DELTA eta sub 1 + DELTA eta sub 2 + DELTA eta sub 3 + cdot cdot cdot + DELTA eta sub n

Equation (4.7.39):

xi = 1 over{N(S)} = ( S over{S sub 1}) sup m = r S sup m roman with r = S sub 1 sup -m

Equation (4.7.40):

f( xi ) = g(d, k over m , rD sup m ; xi )

Equation (4.7.41):

xi bar = M sub 1 ( xi ) = int from 0 to inf xi f( xi ) d xi = r D sup m {GAMMA (d + m over k )}over{GAMMA (d)} = TU

Equation (4.7.42):

M sub 2 ( xi ) = int from 0 to inf xi sup 2 f( xi ) d xi = (r D sup m ) sup 2 {GAMMA (d + 2m over k}over{GAMMA (d)} = TV

Equation (4.7.43):

M sub 3 ( xi ) = int from 0 to inf xi sup 3 f( xi ) d xi = (r D sup m ) sup 3 {GAMMA (d + 3m over k}over{GAMMA (d)} = TW

Equation (4.7.44):

U = {xi bar}over T = {M sub 1 ( xi )}over T V = {M sub 2 ( xi )}over T W = {M sub 3 ( xi )}over T

Equation (4.7.45):

mu sub 2 ( xi ) = sigma sub xi sup 2 = M sub 2 ( xi ) - M sub 1 sup 2 ( xi ) = nu sup 2 xi bar sup 2 roman where

nu sup 2 = ( {sigma sub xi}over{xi bar} ) sup 2 = {GAMMA (d + 2m over k ) GAMMA (d) - GAMMA (d + m over k ) sup 2}over {GAMMA (d + m over k ) sup 2}

Equation (4.7.46):

mu sub 3 ( xi ) = M sub 3 ( xi ) - 3M sub 2 ( xi ) M sub 1 ( xi ) + 2M sub 1 ( xi ) sup 3 = lambda sigma sub xi sup 3 = lambda nu sup 3 xi bar sup 3 roman where lambda = {GAMMA (d + 3m over k ) GAMMA (d) sup 2 -

3 GAMMA (d + 2m over k ) GAMMA (d) GAMMA (d + m over k ) + 2 GAMMA (d + m over k ) sup 3}over

{[ GAMMA (d + 2m over k ) GAMMA (d) - GAMMA (d + m over k ) sup 2 ] sup 3/2}

Equation (4.7.47):

phi (s) = int from 0 to inf e sup{s xi} f( xi ) d xi Re "{" s "}" < 0

Equation (4.7.48):

phi (s) = int from 0 to inf [ 1 + s xi + 1 over 2 s sup 2 xi sup 2 + 1 over 6 s sup 3 xi sup 3 + cdot cdot ] f( xi ) d xi

Equation (4.7.49):

phi (s) = 1 + M sub 1 ( xi ) s mark + 1 over 2 M sub 2 ( xi ) s sup 2 + 1 over 6 M sub 3 ( xi ) s sup 3 + cdot cdot

lineup = 1 + T U s + 1 over 2 T V s sup 2 + 1 over 6 T W s sup 3 + cdot cdot

Equation (4.7.50):

PHI (s, t) = int from 0 to inf e sup{s eta } rho ( eta , t) d eta Re "{" s "}" < 0

Equation (4.7.51):

eta (t + T) = eta sub n+1 = eta sub n + xi

Equation (4.7.52):

PHI (s, t+ T ) = PHI (s, t) phi (s)

Equation (4.7.53):

{partial PHI (s, t)}over{partial t} = 1 over T [ PHI (s, t + T ) - PHI (s, t) ]

Equation (4.7.54):

int from 0 to inf e sup{s eta} {partial rho ( eta , t)}over{partial t} d eta mark = 1 over T PHI (s, t) [ phi (s) - 1 ]

lineup = U s PHI (s, t) + 1 over 2 V s sup 2 PHI (s, t) + 1 over 6 W s sup 3 PHI (s, t)

Equation (4.7.55):

int from 0 to inf e sup{s eta} [ {partial rho}over{partial t} + U{partial rho}over{partial eta} - 1 over 2 V{partial sup 2 rho}over{partial eta sup 2} + 1 over 6 W{partial sup 3 rho}over{partial eta sup 3} ] d eta - [ e sup{s eta} "{"

rho (U + 1 over 2 sV + 1 over 6 s sup 2 W) - {partial rho}over{partial eta}( 1 over 2 V + 1 over 6 sW) + {partial sup 2 rho}over{partial eta sup 2}1 over 6 W "}" ] from{eta = 0} to {eta = inf} = 0

Equation (4.7.56):

{partial rho}over{partial t} + U{partial rho}over{partial eta} - 1 over 2 V {partial sup 2 rho}over{partial eta sup 2} + 1 over 6 W {partial sup 3 rho}over{partial eta sup 3} = 0

Equation (4.7.57):

{eta sub n}bar mark = sum{DELTA eta}bar = n xi bar

Equation (4.7.58):

mu sub 2 ( eta sub n ) lineup = sum mu sub 2 ( DELTA eta sub i ) = n cdot sigma sub xi sup 2 = n nu sup 2 xi bar sup 2

Equation (4.7.59):

mu sub 3 ( eta sub n ) lineup = sum mu sub 3 ( DELTA eta sub i ) = n lambda sub 3 sigma sub xi sup 3 = n lambda nu sup 3 xi bar sup 3

Equation (4.7.60):

{sigma sub {eta sub n}}over{{eta sub n}bar} = {sqrt{mu sub 2 ( eta sub n )}}over{{eta sub n}bar} = nu over sqrt n

Equation (4.7.61):

lambda sub 3 = {mu sub 3 ( eta )}over{mu sub 2 ( eta ) sup 3/2} = lambda over sqrt n

Equation (4.7.62):

rho ( eta , t) = |h| over{GAMMA (a)} e sup{ah( eta - u )} e sup{-e sup{h( eta - u )}}

Equation (4.7.63):

{| psi '' (a) |}over{psi ' (a) sup 3/2} = {lambda sub 3}over sqrt n

Equation (4.7.64):

h = \(+- {sqrt{psi '(a)}}over {sqrt n sigma sub xi} + for lambda sub 3 < 0 and - for lambda sub 3 > 0

Equation (4.7.65):

u = n{DELTA eta}bar - 1 over h psi (a) = n xi bar + sqrt n sigma sub xi {psi (a)}over{sqrt{psi ' (a)}}

Equation (4.7.66):

a mark approx n over{lambda sup 2}

Equation (4.7.67):

h lineup approx - n lambda over{sigma sub xi}

Equation (4.7.68):

u lineup approx n "{" xi bar - {sigma sub xi}over lambda ln [ n over{lambda sup 2a} ] "}"

Equation (4.7.69): (xxx)

rho ( eta , t) = 1 over sqrt{2 pi n} 1 over{sigma sub xi} e sup{- {( eta - n xi bar ) sup 2}over{2 n sigma sub xi sup 2}} t = n T

Equation (4.7.70):

j = eta over L roman or eta = j L

Equation (4.7.71):

Pr ( eta = j L ) = Pr (j; n) = ( cpile{n above j} ) p sup j (1 - p) sup n-j n \(>= j

Equation (4.7.72):

p = (1 - p) = 1 over 2

Equation (4.7.73):

Pr(j; n) = ( cpile{n above j} ) 1 over{2 sup n}

Equation (4.7.74):

{eta sub n}bar = L n p and sigma sub eta sup 2 = L sup 2 n p (1 - p)

Equation (4.7.75):

{sigma sub eta}over{eta bar} = 1 over sqrt n sqrt{{1 - p}over p}

Equation (4.7.76):

L = xi bar (1 + nu sup 2 ) and p = 1 over{1 + nu sup 2}

Equation (4.7.77):

L = {M sub 2 ( xi )}over{M sub 1 ( xi )} and p = {M sub 1 ( xi ) sup 2}over{M sub 2 ( xi )}

Section 4.7.5 - Fracture Mechanics Approach.

Equation (4.7.78):

sigma sub ij = R(r) THETA sub ij ( theta )

Equation (4.7.79):

R(r) = r sup {n over 2 - 1}

Equation (4.7.80):

sigma sub ij = K over sqrt{2 pi r} THETA sub ij ( theta )

Equation (4.7.81):

sigma sub ij = sqrt{x over 2r} sigma sub inf THETA sub ij ( theta ) roman {so that} K = sqrt{pi x} sigma sub inf

Equation (4.7.82):

DELTA K = K sub max - K sub min

Equation (4.7.83):

DELTA x = left { lpile{ C( DELTA K ) sup m above above 0} for lpile{ DELTA K > DELTA K sub 0 above above DELTA K < DELTA K sub 0}

Equation (4.7.84):

DELTA K = sqrt{pi x} g'(x) S = g(x) S g(x) = g'(x) sqrt{pi x}

Equation (4.7.85):

DELTA x = left { lpile{ C g(x) sup m S sup m above above 0} for lpile{ S > S sub 0 (x) = {DELTA K sub }over{g(x)} above above S < S sub 0 (x)}

Equation (4.7.86):

DELTA x sub 1 , DELTA x sub 2 , DELTA x sub 3 , cdot cdot cdot DELTA x sub j cdot cdot cdot

Equation (4.7.87):

eta = {x - x sub 0}over{x sub f - x sub 0} and DELTA eta = {DELTA x}over{x sub f - x sub 0}

Equation (4.7.88):

{DELTA x}bar = C g(x) sup m int from{S sub 0} to inf S sup m f(S) dS = C g(x) sup m D sup m { GAMMA (d + m over k ; ({DELTA K sub 0}over{g(x) D}) sup k )} over{GAMMA (d)}

Equation (4.7.89): (xxx)

U = dx over dt = 1 over T dx over dN = {{DELTA x}bar}over T = 1 over T C D sup m {GAMMA (d + m over k }over{GAMMA (d)} g(x)

Equation (4.7.90):

Pr( roman{crack depth} \(<= x roman{at time} t) = F(x, t)

Equation (4.7.91):

Q(x, t) = 1 - F(x, t)

Equation (4.7.92):

rho (x, t sub 1 ) = {partial F(x, t sub 1 )}over{partial x} = - {partial Q(x, t sub 1 )}over{partial x}

Equation (4.7.93):

{partial Q}over{partial t} dt = -{partial Q}over{partial x} dx = -{partial Q}over{partial x} U(x) dt

Equation (4.7.94):

{D F(x, t)}over{D t} \(== ({partial F}over{partial t} + U {partial F}over{partial x}) = - ({partial Q}over{partial t} + U {partial Q}over{partial x}) = 0

Equation (4.7.95):

{partial rho}over{partial t} + {partial rho U}over{partial x} = {partial rho}over{partial t} + U {partial rho}over{partial x} + rho {partial U}over{partial x} = 0

Equation (4.7.96):

int from 0 to inf rho (x, t) dx = 1

Equation (4.7.97):

chi (x, t) = {partial Q(x, t)}over{partial t} = - {partial F(x, t)}over{partial t}

Equation (4.7.98):

chi (x, t) = U rho (x, t)

Equation (4.7.99):

{partial chi}over{partial t} + U {partial chi}over{partial x} = 0

Equation (4.7.100):

P sub f (t) = Q(x sub f , t) = 1 - F(x sub f , t)

Section 4.7.6 - Life-time Probability.

Equation (4.7.101):

Q(x, 0) = e sup{- ( x over{x sub 0} ) sup gamma} t = 0

Equation (4.7.102):

E[x] = x sub 0 GAMMA (1 + 1 over gamma ) t = 0

Equation (4.7.103):

sigma sub x = x sub 0 [ GAMMA (1 + 2 over gamma ) - GAMMA (1 + 1 over gamma ) sup 2 ] sup{1 over 2} t = 0

Equation (4.7.104):

Q(x, t) = Q( xi ) xi = xi (x, t) xi (x, 0) = x

Equation (4.7.105):

{partial Q}over{partial t} + U{partial Q}over{partial x} = ( {partial xi}over{partial t} + U{partial xi}over{partial x} ) {partial Q}over{partial xi} = 0

Equation (4.7.106):

U = 1 over T da over dN = dx over dt = - {partial xi / partial t} over{partial xi / partial x}

Equation (4.7.107):

xi = x - Ut U = 1 over T da over dN = roman constant

Equation (4.7.108):

P sub f (t) = Q (x sub f , t) = e sup{-({x sub f - Ut}over{x sub 0}) sup gamma} = e sup{-({x sub f /U - t}over{x sub 0 /U}) sup gamma} t < {x sub f}over U

Equation (4.7.109):

E[t] = 1 over U [ x sub f - x sub 0 GAMMA (1 + 1 over gamma ) ]

Equation (4.7.110):

sigma sub t = {sigma sub x}over U = {x sub 0}over U [ GAMMA (1 + 2 over gamma ) - GAMMA (1 + 1 over gamma ) sup 2 ] sup{1 over 2}

Equation (4.7.111):

da over dN = C x roman and U(x) = C over T x = cx

Equation (4.7.112):

xi = x e sup -ct

Equation (4.7.113):

P sub f (t) = Q(x sub f , t) = e sup{-({x sub f}over{x sub 0 e sup ct}) sup gamma} = e sup{-e sup{- gamma c ( t - 1 over c ln {x sub f}over{x sub 0})}}

Equation (4.7.114):

t sub c = 1 over c ln {x sub f}over{x sub 0}

Equation (4.7.115):

E[t] = 1 over c [ ln {x sub f}over{x sub 0} + 0.5772 over gamma ]

Equation (4.7.116):

sigma sub t = pi over sqrt 6 1 over{gamma c}

Equation (4.7.117):

{sigma sub t}over{t sub c} = pi over{sqrt 6 gamma ln {x sub f}over{x sub 0}}

Equation (4.7.118):(xxx)

da over dN = C x sup s roman or U = C over T x sup s = cx sup s s \(!= 1

Equation (4.7.119):

xi = [ x sup 1-s - (1 - s) ct ] sup{1 over 1-s}

Equation (4.7.120):

P sub f (t) = Q (x sub f , t) = e sup{-({x sub f sup 1-s - (1-s)ct}over {x sub 0 sup 1-s} ) sup{gamma over{(1-s)}}}

Equation (4.7.121):

t sub c = {x sub f sup 1-s - x sub 0 sup 1-s}over{(1 - s) c}

Equation (4.7.122):

{sigma sub t}over{t sub c} = { [ GAMMA (1 + 2(1-s) over gamma ) - GAMMA (1 + 1-s over gamma ) sup 2 ] sup 1/2} over{( x sub f / x sub 0 ) sup 1-s - 1} gamma > 2(s - 1)