РЕФЕРАТ

По курсу “Теория информации и кодирования”

на тему:

**"КОДЫ БОУЗА-ЧОУДХУРИ-ХОКВИНГЕМА"**

**БЧХ коды**

Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ) – класс циклических кодов, исправляющих кратные ошибки, т. е. две и более (*d0* ≥ 5).

Теоретически коды БЧХ могут исправлять произвольное количество ошибок, но при этом существенно увеличивается длительность кодовой комбинации, что приводит к уменьшению скорости передачи данных и усложнению приемо-передающей аппаратуры (схем кодеров и декодеров).

Методика построения кодов БЧХ отличается от обычных циклических, в основном, выбором определяющего полинома P(х). Коды БЧХ строятся по заданной длине кодового слова *n* и числа исправляемых ошибок *S* , при этом количество информационных разрядов *k* не известно пока не выбран определяющий полином.

Рассмотрим процедуру кодирования с использованием кода БЧХ на конкретных примерах.

**Пример** Построить 15-разрядный код БЧХ, исправляющий две ошибки в кодовой комбинации (т. е. *n = 15, S = 2*).

**Решение:**

1. Определим количество контрольных *m* и информационных разрядов *k*

*m ≤ h S .*

Определим параметр *h* из формулы

*n = 2h-1, h = log2(n+1) = log216 = 4,*

при этом: *m ≤ h S = 4⋅2 = 8*; *k = n-m = 15-8 = 7*.

Таким образом, получили (15, 7)-код.

2. Определим параметры образующего полинома:

- количество минимальных многочленов, входящих в образующий

*L = S = 2;*

- порядок старшего (все минимальные - нечетные) минимального многочлена *ρ = 2S-1 = 3;*

- степень образующего многочлена*β = m ≤ 8.*

3. Выбор образующего многочлена.

Из таблицы для минимальных многочленов для кодов БЧХ (см. приложение 4) из колонки 4 (т. к. *l = h = 4*) выбираем два минимальных многочлена 1 и 3 (т. к. *ρ = 3*):

*M1(x)* = 10011;

*M2(x)* = 11111.

При этом

*P(x) =M1(x)⋅M2(x)*=10011×11111=111010001= *x8+ x7+ x6+ x4+1*.

4. Строим образующую матрицу. Записываем первую строку образующей матрицы, которая состоит из образующего полинома с предшествующими нулями, при этом общая длина кодовой комбинации равна *n = 15*. Остальные строки матрицы получаем в результате k-кратного циклического сдвига справа налево первой строки матрицы.

Строки образующей матрицы представляют собой 7 кодовых комбинаций кода БЧХ, а остальные могут быть получены путем суммирования по модулю 2 всевозможных сочетаний строк матрицы.

Процедура декодирования, обнаружения и исправления ошибок в принятой кодовой комбинации такая же, как и для циклических кодов с *d0* < 5

**Пример** Построить 31-разрядный код БЧХ, исправляющий три ошибки в кодовой комбинации (т. е. *n = 31, S = 3*).

**Решение:**

1. Определим количество контрольных разрядов *m* и информационных разрядов *k.*

*m ≤ h S.*

Определим параметр *h* из формулы

*n = 2h-1,h = log2(n+1) = log232 = 5,*

при этом: *m ≤ h S = 5⋅3 = 15*; *k = n-m = 31-15 = 16*.

Таким образом, получили (31, 16)-код.

2.Определим параметры образующего полинома:

- количество минимальных многочленов, входящих в образующий

*L = S = 3;*

* порядок старшего минимального многочлена

ρ = 3S-1 = 5;

* степень образующего многочлена

*β = m ≤ 15.*

1. Выбор образующего многочлена.

Из таблицы для минимальных многочленов для кодов БЧХ ( приложение 4) из колонки 5 (т. к. *l = h = 5*) выбираем три минимальных многочлена 1, 3 и 5 (т. к. *ρ = 5*):

*M1(x)* =100101;

*M2(x)* =111101;

*M3(x)* =110111.

При этом

*P(x) = M1(x) ⋅M2(x) ⋅M3(x)* =1000111110101111=

*= x15+ x11 +x10+ x9+ x8+ x7+ x5+ x3 + x2+x+ 1*.

4. Строим образующую матрицу. Записываем первую строку образующей матрицы, которая состоит из образующего полинома с предшествующими нулями, при этом общая длина кодовой комбинации равна *n = 31*. Остальные строки матрицы получаем в результате k-кратного циклического сдвига справа налево первой строки матрицы.

*000000000000000100011111011111*

 *G(31,16)=000000000000001000111110111110*

 . . .

*100011111011111000000000000000*

 Строки образующей матрицы представляют собой 16 кодовых комбинации кода БЧХ, а остальные могут быть получены путем суммирования по модулю 2 всевозможных сочетаний строк матрицы.

**Декодирование кодов БЧХ**

Коды БЧХ представляют собой циклические коды и, следовательно, к ним применимы любые методы декодирования циклических кодов. Открытие кодов БЧХ привело к необходимости поиска новых алгоритмов и методов реализации кодеров и декодеров. Получены существенно лучшие алгоритмы, специально разработанные для кодов БЧХ. Это алгоритмы Питерсона, Бэрлекэмпа и др.

### Рассмотрим алгоритм ПГЦ (Питерсона-Горенстейна-Цирлера). Пусть БЧХ код над полем GF(q) длины n и с конструктивным расстоянием d задается порождающим полиномом g(x), который имеет среди своих корней элементы ,  — целое число (например 0 или 1). Тогда каждое кодовое слово обладает тем свойством, что . Принятое слово r(x) можно записать как r(x) = c(x) + e(x), где e(x) — полином ошибок. Пусть произошло ошибок на позициях (t максимальное число исправляемых ошибок), значит , а  — величины ошибок.

Можно составить j-ый синдром Sj принятого слова r(x):

.

Задача состоит в нахождений числа ошибок u, их позиций и их значений при известных синдромах Sj.

Предположим, для начала, что u в точности равно t. Запишем (1) в виде системы нелинейных уравнений в явном виде:

Обозначим через локатор k-ой ошибки, а через величину ошибки, . При этом все Xk различны, так как порядок элемента β равен n, и поэтому при известном Xk можно определить ik как ik = logβXk.

Составим полином локаторов ошибок:

Корнями этого полинома являются элементы, обратные локаторам ошибок. Помножим обе части этого полинома на . Полученное равенство будет справедливо для

:

Положим и подставим в (3). Получится равенство, справедливое для каждого и при всех :

Таким образом для каждого l можно записать свое равенство. Если их просуммировать по l, то получиться равенство, справедливое для каждого

:

.

Учитывая (2) и то, что

(то есть меняется в тех же пределах, что и ранее) получаем систему линейных уравнений:

.

Или в матричной форме

,

Где

Если число ошибок и в самом деле равно t, то система (4) разрешима, и можно найти значения коэффициентов . Если же число u < t, то определитель матрицы S(t) системы (4) будет равен 0. Это есть признак того, что количество ошибок меньше t. Поэтому необходимо составить систему (4), предполагая число ошибок равным t − 1. Высчитать определитель новой матрицы S(t − 1) и т. д., до тех пор, пока не установим истинное число ошибок.

После этого можно решить систему (4) и получить коэффициенты полинома локаторов ошибок. Его корни (элементы, обратные локаторам ошибок) можно найти простым перебором по всем элементам поля GF(qm). К ним найти элементы, обратные по умножению, — это локаторы ошибок . По локаторам можно найти позиции ошибок (ik = logβXk), а значения Yk ошибок из системы (2), приняв t = u. Декодирование завершено.

**Коды Рида–Соломона**

Широко используемым подмножеством кодов БЧХ являются коды Рида-Соломона, которые позволяют исправлять пакеты ошибок. ***Пакет ошибок*** длины *b* представляет собой последовательность из таких *b* ошибочных символов, что первый и последний из них отличны от нуля. Существуют классы кодов Рида-Соломона, позволяющие исправлять многократные пакеты ошибок.

# Коды Рида-Соломона широко используются в устройствах цифровой записи звука, в том числе на компакт-диски. Данные, состоящие из отсчетов объединяются в кадр, представляющий кодовое слово. Кадры разбиваются на блоки по 8 бит. Часть блоков являются контрольными.

# Обычно 1 кадр (кодовое слово) = 32 символа данных +24 сигнальных символа +8 контрольных бит = 256 бит.

# Сигнальные символы это вспомогательные данные, облегчающие декодирование: служебные сигналы, сигналы синхронизации и т. д.

# При передаче данных производится перемежение (изменение порядка следования по длине носителя и во времени) блоков с различным сдвигом во времени, в результате чего расчленяются сдвоенные ошибки, что облегчает их локализацию и коррекцию. При этом используются коды Рида-Соломона с минимальным кодовым расстоянием *d0 = 5.*

**Сверточные коды**

Кроме рассмотренных корректирующих кодов используются так называемые сверточные коды, контрольные биты, в которых формируются непрерывно из информационных и контрольных бит смежных блоков.

**Выводы**

Таким образом, в результате написания реферата, пришли к выводу, что коды Боуза-Чоудхури-Хоквингхема – это широкий класс циклических кодов, способных исправлять многократные ошибки.

БЧХ-коды играют заметную роль в теории и практике кодирования. Интерес к ним определяется следующим: коды БЧХ имеют весьма хорошие свойства; данные коды имеют относительно простые методы кодирования и декодирования; коды Рида-Соломона являются широко известным подклассом недвоичных БЧХ кодов, которые обладают оптимальными свойствами, и применяются для исправления многократных пакетов ошибок.

**Список использованной литературы**

1. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки = Theory and practice of error control codes. — М.: Мир, 1986. — С. 576
2. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации: Учебник для вузов. М.: Высшая школа , 1989. 320 c.
3. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. Курс теории информации. – М.: Наука, 1982.
4. Кудряшов Б.Д. Теория информации. Учебник для вузов Изд-во ПИТЕР, 2008. – 320с.
5. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976. — С. 596.
6. Семенюк В. В. Экономное кодирование дискретной информации. – СПб.: СПб ГИТМО (ТУ), 2001
7. У. Петерсон, Э. Уэлдон, Коды, исправляющие ошибки, Москва, “Мир”, 1976.
8. Э. Берлекэмп, Алгебраическая теория кодирования, Москва, “Мир”, 1971.