Комплексные числа. История открытия

*Помимо и даже против воли того или другого математика, мнимые числа снова и снова появляются на выкладках, и лишь постепенно, по мере того, как обнаруживается польза от их употребления, они получают более и более широкое распространение.*

*Ф. Клейн*

Древнегреческие математики считали "настоящими" только натуральные числа. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел.

В III веке Архимед разработал систему обозначения вплоть до такого громадного, как . Наряду с натуральными числами применяли дроби — числа, составленные из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий философ и математик Пифагор учил, что "… элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в целом является гармонией и числом". Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно для того, чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно.

Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел — это было сделано китайскими математиками за два века до н. э. Отрицательные числа применял в III веке древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действий над ними, а в VII веке эти числа уже подробно изучили индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения — положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя: нет такого числа , чтобы .

В XVI веке, в связи с изучением кубических уравнений, оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений вида кубические и квадратные корни: .

Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень (), а если оно имеет три действительных корня (), то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Вслед за тем, как были решены уравнения 4-й степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения 5-й степени. Но Руффини (Италия) на рубеже XVIII и XIX веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени нельзя решить алгебраически; точнее, нельзя выразить его корень через буквенные величины a, b, c, d, e с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

В 1830 году Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее, всякое уравнение n-й степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) n корней (среди которых могут быть и равные). В этом математики были убеждены еще в XVII веке (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений , не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения вида , , нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать, что . Кардано называл такие величины "*чисто отрицательными*" и даже "*софистически отрицательными*", считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название "*мнимые числа*" ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века — Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин "*комплексные числа*" также был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д., образующих единое целое.

В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел, возможности дать им геометрическое обоснование.

Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-ых степеней сначала из отрицательных, а за тем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707): . С помощью этой формулы можно было так же вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг. Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную формулу: , которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число e в любую комплексную степень. Любопытно, например, что . Можно находить sin и cos от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить теорию функций комплексного переменного.

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Еще раньше швейцарский математик Я. Бернулли применял комплексные числа для решения интегралов.

Хотя в течение XVIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т. д., однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. Поэтому французский ученый П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел, — только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами.

"Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы иероглифы нелепых количеств", — писал Л. Карно.

В конце XVIII века, в начале XIX века было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число точкой на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой *M,* а вектором , идущим в эту точку из начала координат. При таком истолковании сложение и вычитание комплексных чисел соответствуют этим же операциям над векторами. Вектор можно задавать не только его координатами a и b, но также длиной r и углом *ϕ ,* который он образует с положительным направлением оси абсцисс. При этом , , и число z принимает вид , который называется тригонометрической формой комплексного числа. Число r называют модулем комплексного числа z и обозначают . Число называют аргументом z и обозначают ArgZ. Заметим, что если , значение ArgZ не определено, а при оно определено с точностью до кратного . Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число z в виде (показательная форма комплексного числа).

Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения.

Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости: при изучении течения жидкости, задач теории упругости.

После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании "гиперкомплексных" чисел — чисел с несколькими "мнимыми" единицами. Такую систему вида , где , построил в 1843 году ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их "кватернионами". Правила действия над кватернионами напоминает правила обычной алгебры, однако их умножение не обладает свойством коммутативности (переместительности): например, , а . Гиперкомплексные числа не являются темой моего реферата, поэтому я лишь упоминаю об их существовании.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые: Н. И. Мусхелишвили занимался ее применением к упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев — к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров — к проблемам квантовой теории поля.

Библиографический список

1. Энциклопедический словарь юного математика.
2. Школьный словарь иностранных слов.
3. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике.