МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. Ячейки Бенара

Выполнил:

студент 4 курса 556 группы

Аитов Т.Н.

Руководитель:

кандитат педагогических наук Михайличенко Ю.П.

ТОМСК – 1999 г.

**Содержание:**

Введение……………………………………………………………………………...3

Глава 1. Синергетика и гидродинамика……………………………………………4

1.1 Общие принципы……………………………………………………………..4

1.2 Нелинейность…………………………………………………………………7

1.3 Хаос……………………………………………………………………………8

1.4 Потоки………………………………………………………………………...9

Глава 2. Конвективная неустойчивость в гидродинамике: ячейки Бенара………9

Глава 3. Основные уравнения……………………………………………………..11

Глава 4. Обзор статей по экспериментальному исследованию конвективной неустойчивости……………………………………………………………………..13

4.1. Нестационарные конвективные возмущения в горизонтальном слое жидкости…………………………………………………………………………….13

4.2.Численное решение одной нестационарной задачи……………………...14

Выводы……………………………………………………………………………...19

Список литературы…………………………………………………………………19

**Введение**

Цель данной работы – изучение научной литературы, связанной с проблемой возникновения ячеек Бенара, для создания прибора, с помощью которого можно было бы демонстрировать это явление на лекционных занятиях как пример самоорганизации в физике. В следующей работе предполагается усовершенствовать прибор и снять экспериментальную зависимость размера ячеек от толщины вязкого слоя жидкости.

Явления конвективной неустойчивости в гидродинамике описываются общими законами синергетики, так как здесь существуют нелинейные зависимости и при некоторых значениях определенных параметров из хаотического движения жидкости возникают пространственнно - временные периодические структуры (самоорганизация), которые образуются в результате нестационарных конвективных течений. В этой работе рассмотрено возникновение ячеистых структур шестиугольной (рис.1) и прямоугольной формы в сосуде [4] ограниченного объема. Происходит подогрев сосуда снизу, а сверху охлаждение, в результате чего появляется направленный градиент температуры и нестационарное конвективное течение.

Также проанализированы работы отечественных ученых, связанных с возникновением периодических структур в сосуде с ограниченным объемом.

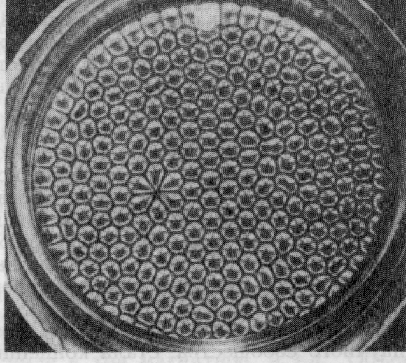


Рис.1 Ячейки Бенара

#### Глава 1. Синергетика и гидродинамика

* 1. **Общие принципы**

Основателями синергетики были бельгийский ученый русского происхождения Илья Пригожин и немецкий ученый Г. Хакен. Синергетика является наукой о самоорганизации в потоках. Ее наиболее характерные черты по [2] следующие:

1. открытость систем, с которыми она имеет дел,
2. нелинейность сред, в которых эти системы существуют,
3. наличие катастрофических изменений в результате малых случайных воздействий,
4. самоорганизация и самодостраивание структур,
5. порядок через флуктуации,
6. эволюционирование системы,
7. неоднозначность путей эволюции и их выбор через бифуркации,
8. широкий диапазон изучаемых систем

Предельно краткая характеристика синергетики включает всего три ключевые идеи: открытые системы, нелинейность, самоорганизация. Другими важными понятиями являются параметры порядка и аттракторы. Открытость, нелинейность и хаос – это лишь предпосылки самоорганизации. Параметры же порядка – это то,что ведет систему по пути макросостояний, а аттракторы – то, куда идет. Флуктуации и бифуркации – это промежуточные характеристики процесса. Еще одна предпосылка – это так называемое адиабатическое приближение – предположение, что постоянная времени системы ( время ее релаксации на внешнее воздействие ) много меньше постоянной времени внешней среды. Другая предпосылка – затухание процесса в отсутствии воздействий.

В обычных системах уравнений внешние силы заданы явно. В открытых системах внешние силы не заданы, а подчиняются уравнениям движения. Отсюда возникает нелинейность в уравнениях. Переменные, соответствующие силам, называются параметрами действия, или же параметрами порядка. Остальные же переменные подчиняются изменению параметров порядка. Поскольку все затухающие моды адиабатически следуют за параметрами порядка, поведение всей системы определяется поведением небольшого числа этих параметров. Таким образом, даже очень сложная система может демонстрировать упорядоченное поведение.

Если параметры порядка демонстрируют неустойчивость, то система может меняться резко, скачками. В природе параметрами порядка служат астрономические циклы, в организме – генераторы циклов типа печени и сердца. Классическими примерами синергетических процессов являются ячейки Бенара ( структуры в масле на сковородке ) и химическая реакция Белоусова – Жаботинского ( циклическая перемена цвета реагирующей смеси ).

Изучаемые в синергетике системы находятся далеко от состояния равновесия, они называются неравновесными.

Синергетика ищет объяснение общих принципов эволюции мира – принципов усложнения, ускорения и экономии. Она рассматривает эволюцию мира как развитие иерархически субординированных сред. Эволюция предстает как создание все более сложных нелинейных сред, способных объединять все большее количество простых структур и создавать все более сложную организацию.

Каждая новая среда с новыми свойствами, с новыми нелинейностями обладает своим спектром форм. Синергетика показывает, что для сложных систем существует несколько альтернативных путей развития, отсутствует жесткая предопределенность, детерминизм, т.е. сложноорганизованным системам нельзя навязывать пути их развития. Скорее, необходимо понять, как способствовать их собственным тенденциям развития, как выводить системы на этом пути. Важно понять законы совместной жизни природы и человечества, их коэволюции.

Синергетика показывает, как в результате жесткого отбора осуществляется выход на относительно простые и устойчивые структуры – аттракторы эволюции. Однако жесткий отбор не является единственно возможным в эволюции сложных систем. Существует путь многократного сокращения временных затрат и материальных усилий, путь резонансного возбуждения желаемых и реализуемых на среде структур. Возможен также путь направленного морфогенеза – спонтанного нарастания сложности в открытых нелинейных средах.

Эвристический потенциал синергетики сегодня еще не до конца оценен. Синергетические представления могут сработать при исследовании научных проблем широкого спектра – от проблем техники и экологии до политических, от изучения работы мозга до логической реконструкции и прогнозирования развития науки и культуры в целом. Она важна своей фундаментальностью теоретического и методологического содержания. Синергетика может подсказать, как сделать в исследовании следующий шаг и чего в принципе можно ожидать. Опытный исследователь знает, что правильная постановка проблемы и выбор направления поиска более ценны, чем решение проблемы.

Синергетика разрушает наши привычные представления и учит идеть мир по – другому. Но несмотря на всю свою новизну, синергетика как способ видения мира и стиль мышления выросла на почве предыдущих исторических стилей мышления – детерминистского и вероятностного – и несет элементы и того другого. Динамичность и статистичность – это характеристики двух различных уровней развития и самоорганизации системных объектов. Динамичность – это характеристика уровня системы как целого, связанная с детерминированностью ее поведения между точками бифуркации, а статистичность – характеристика уровня ее предметного строения. В точках же бифуркации или в состояниях неустойчивости флуктуации приобретают макроскопическую величину и значимость для системы в целом.

**1.2 Нелинейность.**

Синергетика – это наука о самоорганизации в нелинейной среде. Нелинейность среды задается нелинейностью изменения ее параметров в пространстве.

Нелинейность – это фундаментальный концептуальный узел новой парадигмы. В математическом представлении она означает определенный вид математических уравнений, нелинейных по переменным, или содержащих коэффициенты, зависящие от свойств среды, т.е. может быть нелинейность поведения и нелинейность среды. Нелинейные уравнения могут иметь несколько качественно различных решений, которым соответствует множество путей эволюции системы. У Пригожина ветвления путей эволюции определяются критическими значениями параметров среды.

Особенности феномена нелинейности состоят в следуещем:

1. Благодаря нелинейности микрофлуктуации могут превращаться в макроизменения.
2. Определенные классы нелинейных систем демонстрируют наличие порогов чувствительности. Ниже порога все уменьшается, стирается, забывается, не оставляя никаких следов.
3. Наличие порогов приводит к локальной асимптотической устойчивости. Следы слабого воздействия пропадают и назад в то же самое состояние самостоятельно вернуться становится невозможно. Этот факт приводит к идее необратимости процессов.
4. Если порог имеет тип не стены, а столба, его начало становится точкой бифуркации, точкой, где процесс может пойти по разным направлениям. Это приводит к понятию рельефа фазового пространства.
5. Наличие точек бифуркации и неравновесности рельефа означает возможность неожиданных изменений направления течения процессов, что делает принципиально ненадежным и недостаточным прогнозы – экстраполяции от наличного. На начальной или промежуточной стадии картина процесса может быть полностью противоположна картине на развитой, асимптотической стадии. То, что растекалось и гасло, может разгораться и локализоваться.
6. Наличие точек бифуркации и потенциальных ям порождает квантовый эффект – дискретность путей эволюции нелинейных систем ( сред ), т.е. на данной нелинейной среде возможен лишь определенный спектр этих путей. Наличие порогов чувствительности является предпосылкой квантовости.

В мировоззренческом плане идея нелинейности приводит к многовариантности путей эволюции, выбору, темпу эволюции, необратимости эволюции.

**1.3 Хаос.**

Исходным материалом для образующихся структур является хаос. Он характеризуется неповторяемостью отклонений от среднего, самих возмущений или их последовательности. Диссипативные процессы и рассеяние представляют собой макроскопические проявления хаоса на микроуровне. Хаос по определению представляет собой отсутствие порядка, закономерностей, массовых движений частиц. Хаос выполняет три основные функции: обеспечивает начало формирования новых структур, разрушение структуры при ее приближении к идеалу, переключение режимов структур с эволюции на инволюцию и наоброт.

В первом случае хаос обеспечивает достаточное разнообразие состояний, скоростей и направлений движения частиц среды, чтобы обеспечить попадание хотя бы некоторых в устойчивые состояния и формирование центров сгущения.

Тот же хаос пытается разрушить структуру флуктуациями. Если флуктуация достаточно велика, он этого добивается. Если флуктуация мала, система вернется к прежней равновесной структуре, “ скатится “ на тот же аттрактор. Процесс при слабых флуктуациях будет иметь статистический характер.

Хаос может спасти сложную структуру от грозящего ей распада, если за счет хаоса вовремя произошел переброс системы из режима гармонизации структуры в противоположный режим. Движение к центру сменяется растеканием, разбеганием от центра, усложнение и структуирование – упрощением и сглаживанием неоднородностей.

**1.4 Потоки.**

# Возможны следующие потоки, порождающие самоорганизующиеся структуры: - тепловой поток ( теплоперенос ),

# - поток массы ( диффузия ),

# - диссипативная часть тензора давления ( вязкое течение ),

# - скорость реакции ( химическая реакция ),

- поток денег, поток событий, поток информации, поток питательных веществ.

# В одной из первых обзорных статей [1] за 1979 год дается общий спектр проблем рассматриваемых синергетикой - от физики до социологии.

Наша задача ограничивается рассмотрением одного из разделов физики – конвективная тепловая неустойчивость.

Эти вопросы рассматриваются в [4,7,9,10] и актуальны, так как досих пор нет четкого обьяснения явлений, связанных с гидродинамической неустойчивостью.

**Глава 2. Неустойчивости в гидродинамике: ячейки Бенара.**

Эти проблемы привлекают физиков уже в течении века [4]. Рассмотрим примеры того, как системы полностью разупорядоченные в состоянии теплового равновесия, будучи выведенными из состояния теплового равновесия, могут внезапно в высокой степени упорядочиваться. Среди этих проблем – так называемая проблема Бенара. Рассмотрим сначала проблему Бенара, или, как она называется, конвективная неустойчивость.

Пусть имеется горизонтальный слой жидкости бесконечной протяженности [4]. Снизу его подогревают, благодаря чему поддерживается температурный градиент. Выраженный в подходящих безразмерных единицах, этот градиент называется числом Рэлея ℜ. Пока число Рэлея не слишком велико, жидкость остается спокойной, а тепло переносится за счет теплопроводности. Однако, если ℜ превосходит некоторое определенное значение, в жидкости внезапно возникает конвективное движение. Конвективные структуры весьма регулярны и могут образовывать либо цилиндрические, либо гексагональные конфигурации. Шестиугольники представляют собой вид сверху конвективных ячеек. Жидкость поднимается в центре ячейки и опускается у ее границ или наоборот. Задача состоит в объяснении механизма этого внезапного перехода типа “беспорядок – порядок“ и в предсказании формы и устойчивости ячеек. В более точной теории следует включить в рассмотрение флуктуации.

С этой проблемой тесно связаны вихри Тейлора. Пусть между длинными неподвижным внешним цилиндром и концентрическим ему вращающимся внутренним цилиндром находится слой жидкости. Если скорость вращения внутреннего цилиндра, выраженная в подходящих безразмерных единицах (число Тейлора), достаточно мала, течение жидкости происходит вдоль круговых линий тока (течение Куэтта). Но если число Тейлора превосходит критическое значение, то вдоль аксиального направления появляются пространственно – периодические вихри – вихри Тейлора.

Основные физические величины в этой задаче (ячейки Бенара)– это поле скоростей точке пространства x, y, z,давление р, температура Т. Поле скоростей, давление и температура подчиняются определенным нелинейным уравнениям гидродинамики, которые можно привести к виду с явной зависимостью от числа Рэлея ℜ, задаваемого извне. При малых значениях мы находим решение, положив компоненты скорости равными нулю. Устойчивость этого решения доказывается путем линеаризации всех уравнений относительно стационарных значений скоростей, давления, температуры, где мы получаем затухающие волны. Если, однако, число Рэлея ℜ превосходит определенное критическое значение ℜкр., решения становятся неустойчивыми. Решения, которые становятся неустойчивыми, определяют набор мод. Реальное поле скоростей и температуры разлагается по этим модам с неизвестными амплитудами. Для амплитуд мод мы получаем нелинейные уравнения, которые приводят к определенным конфигурациям, создающиеся устойчивыми модами. Включая в рассмотрение тепловые флуктуации, мы приходим к задаче, в которой фигурируют детерминированные силы и флуктуирующие силы. Их совместное действие определяет область перехода, где ℜ ≈ ℜкр..

## Глава 3. Основные уравнения.

Согласно [7], запишем систему уравнений для нахождения ℜкр.:

Δ**v** - ∇ω + ℜτ**n** = 0

Δτ = - vz (3.1)

div **v** = 0,

где τ - малое возмущение температуры, ω - малое возмущение квадратичной скорости, **n** – единичный вектор в напралении оси z, - вертикально вверх

Приводим систему (3.1) к одному уравнению. Применив к первому уравнению операцию rotrot = ∇div - Δ, взяв затем его z – компоненту, получим:

Δ3τ = ℜΔ2τ, (3.2)

(где Δ2 = ∂2/∂х2 + ∂2/∂у2 – двухмерный лапласиан). Граничные условия на обоих плоскостях:

τ = 0, vz = 0, ∂vz/∂z = 0 при z = 0, 1

(последнее эквивалентно, виду уравнения непрерывности, условиям vx = vy = 0, при всех х, у ). Ввиду второго из уравнений (3.1) условия для vz можно заменить условиями для высших производных от τ:

∂2τ/∂z2 = 0, ∂3τ/∂z3 – k2 ∂τ/∂z = 0.

Ищем τ в виде

τ = f(z)ϕ(x,y), ϕ = e i**kr**, (3.3)

( где **k –** вектор в плоскостих, у ) и получаем для f(z) уравнение

(d2/dz2 – k2)3f + ℜk2f = 0.

Общее решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию функций ch μz и sh μz, где

μ2 = k2 - ℜ1/ 3k2/ 311/3

с тремя различными значениями корня. Коэффициенты этой комбинации определяются граничными условиями, приводящими к системе алгебраических уравнений, условие совместности которых дает трансцендентное уравнение, корни которого и определяют зависимости k = kn(ℜ), n = 1, 2, … Обратные функции ℜ = ℜ n ( k ) имеют минимум при определенных значениях k; наименьший из этих минимумов и дает значение ℜкр. Оно оказывается равным 1708, причем соответствующее значение волнового числа kкр = 3,12 в единицах 1/h.

Таким образом, горизонтальный слой жидкости толщины h с направленным вниз градиентом температуры А становится неустйчивым при

**gβAh3/νχ > 1708,** (3.4)

где χ - температуропроводность, ν = η/ρ - кинематическая вязкость, η - динамическая вязкость, β = - ρ - 1(∂ρ/∂T) – температурный коэффициент расширения жидкости, ρ - плотность жидкости.

При ℜ > ℜкр в жидкости возникает стационарное конвективное движение, периодическое в плоскости ху. Все пространство между плоскостями разделяются на прилегающие друг к другу одинаковые ячейки, в каждой из которых жидкость движется по замкнутым траекториям, не переходя из одной ячейки в другую. Контуры этих ячеек на граничных плоскостях образуют в них некоторую решетку. Значение kкр определяет периодичность, но не симметрию этой решетки; линеаризованные уравнения движения допускают в (3.3) любую функцию ϕ(x, y), удовлетворяющую уравнению (Δ2 – k2)ϕ = 0. Устранение этой неоднозначности в рамках линейной теории невозможно. По-видимому должна осуществляться «двухмерная» структура движения, в которой на плоскости ху имеется лишь одномерная периодичность – система параллельных полос.

В надкритической области вблизи ℜкр лишь эта структура оказывается устойчивой по отношению к малым возмущениям; «трехмерные» же призматические структуры оказываются неустойчивыми. Экспериментальные результаты существенно зависят от условий опыта (в том числе от формы и размеров боковых стенок сосуда) и не однозначны. Трехмерная гексагональная структура связана, по – видимому, с влиянием поверхностного натяжения на верхней свободной поверхности, и с температурной зависимостью вязкости жидкости ( здесь вязкость ν рассматривалась постоянной ).

Глава 4. Обзор статей по экспериментальному исследованию конвективной неустойчивости

4.1 Нестационарные конвективные возмущения в горизонтальном слое жидкости

Исследованию устойчивости равновесия плоскопараллельного горизонтального слоя жидкости при наличии вертикального градиента температуры посвящено очень большое число работ[10,11]. В большинстве из них устанавливаются условия, при которых наступает кризис равновесия и отыскиваются стационарные критические движения. Во многих случаях знание критических движений оказывается недостаточным, и представляет интерес изучение всего спектра возмущений, возникающих в теплостратифицированной жидкости. В настоящей работе исследуется спектр нестационарных возмущений горизонтального слоя жидкости со свободными и твердыми границами.

**4.2. Численное решение одной нестационарной задачи**

Подогрев снизу (α=90°). Рассмотрим теперь случай горизонтального расположения слоя при подогреве снизу[9]. Эта ориентация является в известном смысле особой. Дело в том, что при обсуждаемых условиях подогрева в этом случае возможен чисто теплопроводный режим, когда температура зависит только ог вертикальной координаты и времени, а среда остается неподвижной. Возникновение конвекции происходит тогда в результаге неустойчивости нестационарного равновесия. Эта неустойчивость развивается не сразу, а по прошествии некоторого времени, когда разность температур и ширина неустойчиво стратифицированного слоя станут достаточно большими.

**γ** x

T = 0 a

∂T/∂y = 0 ∂T/∂y = 0

y α

L T = KT 0

**Рис.4.1. Нестационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости в полости прямоугольного сечения**

В отличие от стационарного случая, вопрос о конвективной неустойчивости нестационарного равновесия к настоящему времени изучен совершенно недостаточно. Известно лишь, что нестационарность существенно влияет на характеристики устойчивости и, в частности, на порог конвекции.

Особенности процесса разогрева иллюстрируются картами линий тока и изотерм, приведенными на рис.4.2. и рис 4.3., (l = 5;D = 0,5\*106).

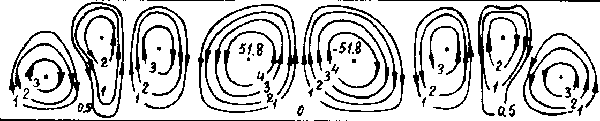
D = gβa5K/ν3, P = ν/χ,

где K – параметр, поределяющий темп нагрева, D – параметр, определяющий темп нагрева и интенсивность конвекции, l = L/a – относительная длина полости, а – ширина, L – длина полости, Р – число Прандтля

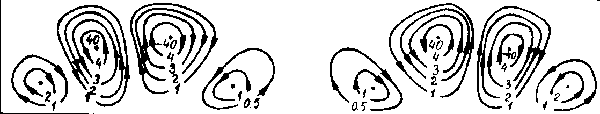
Из рисунков хорошо видно, как возмущения, первоначально возникшие вблизи боковых границ, развиваясь, привели к формированию (к моменту t=0,20) четырех вихрей. Теплое поле, остававшееся на начальной стадии почти теплопроводным (t=0,04; изотермы почти горизонтальны), под влиянием конвективных возмущений принимает сложньй характер, отражающий ячеистую структуру течения. На поздних стадиях процесса имеегся система восходящих и нисходящих струй, разделяющих конвектнвные вихри. В местах столкновения струй с горизонтальными границами наблюдается сильное сгущение изотерм; в этих местах достигаются экстремальные значения локальных тепловых потоков. Обращает на себя внимание «взрывной» характер развития конвекции в момент t = 0,07, очевидно, свидетельствующий о наступлении неустойчивости нестационарного равновесия.



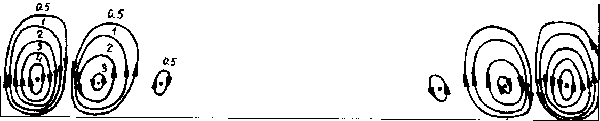
t = 0,20



t = 0,12



t = 0,08



t = 0,06



t = 0,04

**Рис.4.2. l = 5, D = 0,5\*106**

Дальнейший рост интенсивности конвекции происходит путем колебаний, которые, несомненно, связаны с перестройкой вихревой структуры. Момент t = 0,2, до которого был прослежен процесс, еще не соответствует наступлению регулярного режима нагрева.Отмеченные особенности процесса - взрывной характер возникновения конвекции и формирование структуры, состоящей из нескольких вихрей, подтверждаются расчетами, проведенными для других значений параметров, с увеличением D уменьшается характерное время начала интенсивной конвекции.

Приведенные выше результаты относятся к развитию конвективных возмущений, первоначально зарождающихся вблизи торцов. Эти возмущения создавались ошибками округления при вычислении температуры на теплоизолированных (торцевых) участках границы. В результате переходного процесса формируется симметричная относительно вертикальной оси полости система конвективных вихрей (рис.4.3.).

Представляется интересным выяснить, зависит ли форма нестационарной конвекции и время начала интенсивного движения от типа начального возмущения. Для ответа на этот вопрос были проведены специальные расчеты конвекции в квадратной полости (l = 1) для двух типов начального возмущения. Первый тип соответствовал уже описанным выше возмущениям на боковых границах. Эти возмущения развивались в систему двух симметричных вихрей противоположного знака. Второй тип возмущений соответствовал одновихревому движению. Для генерации этого движения в начальный момент времени создавалось надлежащее распределение температуры на нижней границе.



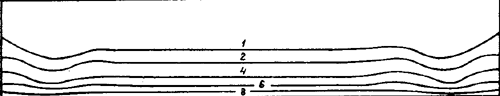
t = 0,20



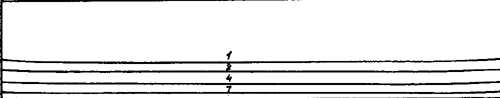
t = 0,12



t = 0,08



t = 0,06



t = 0,04

Рис. 4.3. Особенности процесса разогрева (карты линий тока и изотерм, l = 5, D = 0,5\*106)

Результаты вычислений иллюстрируются в [9], в котором приведены зависимости ψm(t) для двух указанных типов возмущений. Момент появления конвективного всплеска зависит от формы возмущения: при одновихревом движении всплеск происходит раньше, т. е. при меньшем значении мгновенного числа Грассхофа(G = ℜ/P) Заметим, что в статическом случае дело обстоит аналогичным образом: одновихревой структуре соответствует наименьшее значение критического числа Грассхофа. Следует подчеркнуть, что для создания устойчиво развивающегося одновихревого движения требуются начальные возмущения достаточно большой амплитуды

## Выводы

1. Проведен анализ литературы по общим проблемам синергетики и ковективной неустойчивости.
2. Рассмотрены последние научные работы отечественных ученых по конвективной неустойчивости
3. Намечены планы по разработке демонстрационног прибора.

**Список литературы:**

1. Рязанов А. И. Введение в синергетику. УФН, т.129, в. 4, ( дек. 1979 ), с.707 - 708.
2. Самоорганизация в природе. Вып. 2 . Проблемы самоорганизации в природе и обществе. Т. 1 / Под ред. В. А. Дмитриенко, О.С. Разумовского: Материалы семинара “ Поиск связи между разными способами построения систем “. Томск: Изд – во Томского гос. Университета, 1998. – 248 с.
3. Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 240 с., ил.
4. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. – 404 с., ил.
5. Самоорганизация в природе. Вып. 1 / Под ред. В. А. Дмитриенко: Материалы семинара “ Поиск связи между разными способами построения систем “.Томск: Изд – во Томского гос. Университета, 1996. – 230 с.
6. Принципы самоорганизации. М.: Мир, 1996. – 622 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – 4-е изд., стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 736 с.
8. Хакен Г. Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 423 с., ил.
9. Вайсман Б.И., Гершуни Г.З., Дементьев О.Н., Жуховицкий Е.М., Любимов Д.В., Тарунин Е.Л. Ученые записки Пермского университета, 1972, сб. Гидродинамика, вып. 4
10. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Ученые записки Пермского университета, 1968, сб. Гидродинамика, вып. 1
11. Бирих Р.В., Рудаков Р.Н., Шварцблат Д.Л. Ученые записки Пермского университета, 1968, сб. Гидродинамика, вып. 1