**Культура математического языка школьников и их познавательная активность**

Борейко Л. Н.

Много лет назад мои ученики по поводу трудности очередной математической задачи сказали: «Выучим мы это! Скажите только, для чего это нужно!». С тех пор, готовясь к объяснению нового материала, я постоянно отвечаю на этот вопрос. Особенно важным он видится в связи с современными особенностями формирования речемыслительной деятельности школьников.

Накопленный за годы работы опыт показывает, что мысль воплощается в уверенном, осознанном письменном действии, если она выражалась в речи, опираясь на чувственные ощущения. Формальное усвоение правил приводит как к непрочному их запоминанию, так и к неглубоким знаниям и умениям. В итоге ослабевает познавательная активность учащихся.

В 1999 году вышла последняя книга академика Ю.В.Рождественского «Принципы современной риторики», где были сформулированы принципы новой философии языка. Система общих мест включает в себя область морали, а также гносеологическую и позитивно- познавательную области. Один из ее принципов утверждает: «Слово как лексис становится особенно ответственным, т.к. правильное именование, лежащее в основании лексических единиц, не только толкует назначение и применение всех вещей, но и определяет их понимание, воспитание людей и управление общественными процессами» (выделено Б.Л.). Согласно Ю.В. Рождественскому «от правильности имен зависит правильность речи». Как происходит имятворение при обучении математике в школе?

За последние 50 лет многое изменилось в школьных методиках. Например, в математическом образовании прочно обосновалась ранняя алгебраизация. А сердце по- прежнему откликается на давно минувшее.

Пролистаем страницы старых книг, ощутим остроту и точность слова, почувствуем удивительную ясность формулировок. Многие ли из наших учеников справятся с предлагаемыми заданиями?

1.Начальная алгебра. Составил И. Сомов, ординарный академик императорской академии наук и заслуженный ординарный профессор С.- Петербургского университета. Изд. 5-ое с дополнительными статьями, содержащими курс дополнительного класса реальных училищ. 1880 г. (Изд. 4-ое одобрено Ученым комитетом Министерства народного просвещения как руководство для гимназий и реальных училищ. Изд. 1-ое вышло в 1860 г.)

2.Сборник алгебраических задач. Ч. 1 для классов 3 и 4. Составили Н.А. Шапошников и Н.К. Вальцов. Изд. 5-ое, перепечатанное с 4-ого без изменений. 1895 г.

Вот объяснение перехода от арифметики к алгебре (с.1 п. 1).

**Начальная алгебра.**

**Глава** I.

Переход от арифметики к алгебре. Упражнения. Алгебраическое знакоположение. Нахождение численных величин алгебраических выражений.

1. В арифметике были изложены правила для сложения, вычитания,умножения и деления целых и дробных чисел, потом решались помощью этих основных действий над числами различныя задачи, в которых требовалось находить по заданным числам другия, неизвестныя. При этом легко было заметить, что действия, которыя должно было производить над данными числами, чтобы вычислить неизвестныя, зависят от условий задачи, но не зависят от заданных чисел, т. е. от числа единиц или долей единицы, содержащихся в каждом данном ЧИСЛЕ; так что если бы заданы были другия числа при тех же условиях задачи, то правило или способ решения остался бы без перемены, т. е. все задачи одного рода решаются по одному правилу или одним способом. Напр.:

1) Все задачи,в которых по трем данным членам геометрической пропорции требуется найти четвертый член, решаются по общему правилу, названному тройным, а именно неизвестный член, разсматриваемый как крайний, получается перемножением средних членов и разделением полученнаго произведения на данный крайний член.

А так объясняется понятие формулы:

Выражение словами общаго правила вычисления может быть затруднительно, когда задано много чисел и надобно производить над ними много действий; поэтому стали искать средство сокращенно выражать правила вычисления. Для этой цели согласились, вместо слов: сложить, вычесть, умножить, делить, употреблять знаки: +, — , х или. и :, а данныя и искомыя числа означать буквами, (преимущественно латинскими и греческими).

Общее, сокращенное, обозначение способа вычисления помощью зна-ков арифметических действий и букв называется формулою. Напр.:

1)Формула сложения двух чисел есть а+b, где а и b означают всякия слагаемыя.

2)Формула вычитания есть а — b,где а означает какое нибудь уменьшаемое, а b какое нибудь вычитаемое…

5)Формула (а + b — с)d показывает, что надобно сложить два числа а и b, потом из суммы а+b вычесть c, и полученный остаток умножить на d

напр. (5 + 7 — 4)2= 16. (с.2.п.1).

§ 2. Обозначение формул.

Формулой называется соединение двух выражений посредством знака равенства или неравенства.

Формула со знаком равенства называется равенством; напр. a+b=b+a, аbс=сbа суть равенства.

Формула со знаком неравенства называется неравенством: напр. аb>а+b, a/b < а —b суть неравенства.

Всякая формула выражает некоторое соотношение между числами, в ней обозначенными. Формула, можно сказать, есть математическая фраза, написанная на математическом языке.

Составить формулу значит выразить данное соотношение между числами посредством знаков чисел, знаков действий и знака равенства или неравенства. (с.4,п.2).

Понятие степени вводится одновременно с понятием корня (с.6, п.1).

Перемножение равных чисел называется возвышением в степень, а каждый множитель — корнем. Для сокращеннаго обозначения степени, пишется один раз корень, а над ним, немного выше, число, показывающее, сколько раз корень находится множителем Б степени, и названное показателем.

Таким образом: а2 означает квадрат числа а; а3 куб числа а и т. д. Здесь а есть корень, а 2 и 3 суть показатели.

Для показания, что число есть корень данной степени, употребляется знак корень, над которым пишется показатель степени, а по правую сторону знака пишется степень.

Поэтому 2 есть корень 4; 3 есть корень 27. Это выражается словами так: 2 есть квадратный корень из 4, а 3 есть кубический корень из 27…

Мы впоследствии узнаем, как находить корни по данным степеням. Такое действие называется извлечением корня.

Очень интересно вводится понятие отрицательного количества(с.9, п.1).

Отрицательныя и положительныя количества.

…Примером отрицательных чисел может служить: долг, убыток, проигрыш. Если кто нибудь имеет только 2 руб., а должен заплатить 5, то он заплатит только 2 руб. и останется в долгу Зр.,после того его денежное имущество выразится разностью 0 — 3 или отрицательным числом —3.

При введении понятия о подобных членах говорится об их «соединении», а не современном «приведении», которое путают с «привидением» и не понимают, что нужно «видеть» и куда «вести» (с.12.п.1).

**Глава П.**

Соединение подобных членов. Первыя четыре действия над алгебраическими количествами. Показатели равные нулю и отрицательные.

8. Подобные одночлены. Соединение подобных членов въ многочлен.

Одночленныя количества называются подобными, если по отнятии у них знаков и коеффицыентов, получаются совершенно одинаковыя количества. Напр.:

+ 3/4а2b и — 2/3а2b подобны, потому что, по отнятии у перваго +3/4, а у втораго —2/3, получим а2b и а2b.

Правило знаков вполне обходилось без скобок (с.29-30 п.1).

Алгебраическое деление и алгебраическия дроби.

18. Деление одночленов.

1) Правило знаков. При делении положительных или отрицательных количеств, надобно сделать деление, не обращая внимания на знаки, потом пред частным написать знак +, когда у делимаго и делителя одинаковые знаки, и знак —, когда у них разные знаки. Это основано на том свойстве деления, что делимое равно делителю, помноженному на частное. Когда делимое имеет знак +, то делитель и частное должны иметь одинаковые знаки;

след.(+а):(+b)=(+a/b) + (а:–b)=–а/b

Поверка:

(+а/b)х(+ b) = (+а/b)х b = +а

(–а/b)х(– b) = (+а/b)х b = +а

Если же делимое имеет знак —, то у делителя и частнаго должны быть разные знаки;

след. (–a):(+ b)=(–a/b)

(–a):(–b) =(+ a/b)

Поверка:

(– a/b)х(+b)= (–a/b)х b= –a

(+ a/b)х (–b)=(– a/b)хb= –a

Простым и ясным языком излагается обоснование нахождение наименьшего кратного нескольких целых алгебраических количеств до появления правила приведения дробей к одному знаменателю.

24.Наименьшее кратное нескольких целых алгебраических количеств.

Чтобы целое алгебраическое количество делилось без остатка на другое целое, оно должно его в себе содержать множителем; след. между простыми множителями перваго количества должны находиться все простые множители втораго; притом показатель степени каждаго множителя, общаго обоим количествам, в делимом должен быть не меньше, чем в делителе. Положив, напр., что А делится без остатка на В и в частном получается Q, мы будем иметь А = В х Q.(с.44-45, п.1).

§ 4. Отыскание общаго наименьшаго кратнаго.

Если некоторое выражение делится вполне на каждое из не-скольких данных выражений, то оно называется кратным данных выражений; напр., выражение 6а2b2 есть общее кратное выражений 2а2b и 6b. Представим себе общее кратное нескольких выражений и помножим его на какое нибудь новое выражение; полученное произведение будет также делиться на каждое из данных выражений и следовательно окажется новым общим кратным этих выражений; так в предыдущем примере выражения 2а2b и 6 b имеют общим кратным не одно только выражение 6а2b2, но также 6a3b2, 6а2b3, 12а2b3 и т. под. Вообще каждая система данных выражений имеет безконечное множество различных общих кратных.

Общим наименьшим кратным нескольких данных выражений называется то из общих кратных этих выражений, которое содержит в своем составе наименьшее число первообразных множителей. Напр., наименьшее общее кратное выражений 2а2b и 6b есть 6а2b. Такое кратное должно содержать только тех множителей, которые необходимы для делимости его на данные выражения. По разделении иаименьшаго общаго кратнаго на данныя выражения должны получаться взаимно простыя частныя.

Понятие о наименьшем общем кратном выражении не следует смешивать с понятием о наименьшем общем кратном их числовых величин. Напр., а2—b2 есть наименьшее общее кратное выражений а+b и а—b; при значениях а=5 и b=3 оно равно 16, наименьшее кратное числовых величин этих выражений при тех же значениях равно 8.

Чтобы составить общее наименьшее кратное одночленов, нужно найти наименьшее общее кратное их числовых коэффициентов и приписать к нему множителями всех первообразных буквенных множителей, входящих в данныя выражения, придав каждому из этих множителей показателя степени наибольшаго между теми показателями, с которыми он входит в данныя выражения(с.92п.2.).

Легко и понятно излагается понятия об уранении и приемах его решения.

**Глава III.**

Об уравнениях вообще. Решение определенных уравнений 1-й степени с одною неизвестною. Составление уравнений из условий данной задачи.

30. Равенство двух количеств называется уравнением, напр.а = а, За2 — Ь = 2а+b2.

Количество, находящееся по левую сторону знака равенства, называется первою частью уравнения, а то, которое по правую сторону, — второю частью…

31. Способы для решения уравнений основаны на следующих очевидных истинах (аксиомах):

1) Если к равным количествам прибавим равныя, или из равных количеств вычтем равныя, то получим в сумме или остатке равныя количества.

Напр., так как 5=5 и 3=3, то 5+3 = 5+3 и 5—3 = 5—3. Вообще, если а = b и с= d, то а± с=b±d.

2) От умножения или разделения равных количеств на равныя количества, получим равныя произведения или частныя.

Напр., так как 5=5 и 3=3, то 5х3=5х3 и 5/3=5/3; вообще если а=b и с=d, то ас= bd и a/c =b/d…

Примеры:

1) 0,27х — 5,643 — 2х = 6,42 — 8,241х;

4) 10 — {х — [3 — 2х — (4х— 7)]} = х— {10+Зх— [5— (5— Зх;)]}

Поверка решения. Чтобы поварить решение, надобно найденное количество подставить в уравнение вместо неизвестнаго и произвести действия, показанныя в каждой части уравнения. Если получим тожество, то решение верно; в противном случае оно неверно(с.52,53,58 п.1.).

Колоссальный интерес представляют задачи исследовательского характера, предлагаемые учащимся (с.131-132 п.1).

ГЛАВА VIII.

Решения, неудовлетворяющия условиям вопроса. Изследование всех случаев, которые представляют общия формулы, служащия для решения уравнений первой и второй степени.

Отрицательные решения.

59. Может случиться, что, решая уравнения, выведенныя из условий вопроса, мы получим для неизвестных числа, которыя, удовлетворяя уравнениям, не удовлетворяют требованию вопроса. В таком случае или условия вопроса несообразны, или было сделано при составлении уравнения неверное предположение, или полученныя числа представляют решение другаго вопроса.

Пример:

Отцу 41 год, а сыну 14; спрашивается, через сколько лет отец будет в четыре раза старше своею сына?

Означим через х искомое число лет. По прошествии х лет, отцу будет 41 + х лет, а сыну 14 + х,

след. 41 + х = (14 + х) 4, (а)

или 41 + х = 56 + 4х; откуда х = —15/3=–5.

Подставим — 5 вместо х в уравнение (а), получим 41 — 5 = (14 — 5) 4 или 36 = 36;

след. найденное решение удовлетворяет уравнению; но оно не удовлетворяете вопросу, потому что в вопросе требуется положительное число, которое должно прибавить к летам отца и сына. Очевидно, что нет такого числа; в противном случае, оно должно бы удовлетворять непременно уравнению (а) и уравнению —3х= — 15, из него выведенному. А это невозможно; потому что никакое положительное число, подставленное вместо х и помноженное на отрицательное число —3, не может дать положительнаго произведения 15.

Подставив отрицательное решение в уравнение, из котораго оно было выведено, вместо неизвестнаго, мы увидим, какия должно сделать перемены в вопросе, чтобы требования его были возможны. Так, в предыдущем примере, подставив — 5 вместо х в уравнение (а), мы получим 41 —5 = (14 —5) 4.

Это показывает, что из лет отца и лет сына должно вычесть по 5 лет, чтобы года отца были в 4 раза больше лет сына, т. е. пять лет тому назад отец был в четыре раза старте сына.

Очень показательным является разнообразие способов решения одной и той же задачи с помощью уравнения (с.148-151 п.2).

§5. Составление уравнения с одним неизвестным.

Всякая арифметическая задача состоит в том, что по нескольким известным величинам и по данным соотношения между этими известными величинами и другими, неизвестными, отыскиваются неизвестныя. Алгебра дает особый способ для решения арифметических задач. Этот способ основан на том, что словесно выраженныя условия арифметических задач могут быть переводимы на алгебраический язык, т. е. выражаемы посредством алгебраических формул.

Перевод словесно выраженных условий задачи на алгебраический язык вообще называется составлением формул.

Составить по условиям задачи уравнение с одним\_неизвестным значит так перевести эти условия на алгебраический язык, чтобы вся совокупность этих условий выразилась одним уравнением, содержащим одно неизвестное. Для этого необходимо, чтобы число отдельных независимых между собой условий задачи было бы равно числу подразумеваемых в ней неизвестных.

Вследствие чрезвычайнаго разнообразия задач приемы составления уравнений, соответствующих этим задачам чрезвычайно разнообразны. Общих правил для составления уравнений нет.

Но есть одно общее указание, которое руководит нашим разсуждением при переводе условий задачи на алгебраический язык и позволяет нам с самого начала разсуждения идти верным путем к достижению окончательной цели. Это общее указание или общий принцип составленя уравнения мы выразим следующим образом:

Чтобы составить по условиям задачи уравнение с одним неизвестным нужно:

1) выбрать между неизвестными, которыя в задачи или прямо указываются, или подразумеваются, какое нибудь одно, принимаемое за первое, и обозначить это неизвестное какой нибудь буквой, напр., х;

2) посредством этого обозначения и обозначенний, данных в задаче, выразить все величины, о которых в задаче прямо говорится, или которыя подразумеваются,наблюдая, чтобы при составлена таких выражений постепенно принимались во внимание все данныя в задаче числа и все относящияся к данным или к неизвестным величинам условия;

3) после такого применения всех условий разыскать между составленными или просто записанными выражениями два таких,которыя в силу одного из данных условий должны быть равны между собою, и соединить эти выражения знаком равенства.

Применим этот принцип к решению задачи:

Задача. Число монет в одном кощельке вдвое меньше,чем в другом. Если выложит из перваго шесть монет, а во второй прибавить восемь монет, то число монет в первом окажется в семь раз менее, чем во втором. Узнать, сколько монет в каждом кошельке?

В этой задаче указаны несколько известных и несколько неизвестных величин. Примем за первое неизвестное число монет перваго кошелька и обозначим его через х. Затем займемся обозначением всех величин, к которым относятся условия задачи.

Число монет перваго кошелька есть х. Отношение чисел монет во втором и первом кошельках 2. Значить число монет второго кошелька 2х. Из перваго вынимают 6 монет. Поэтому в первом кошельке остается монет x— 6. Во второй прибавляют 8 монет.

Следовательно, во втором кошельке получится монет 2х+8. Новое отношение между числами монет второго и перваго кошелька есть (2х+8):(х-6). Оно также равно 7. На этом основании составляем уравнение(2х+8):(х-6)=7, решая которое, получим х=10, после чего нетрудно определить другия неизвестныя, о которых мы здесь упоминали.

Если бы мы приняли за первое неизвестное число монет второго кошелька и обозначили бы его для отличия от предыдущего обозначения черезъ у, то, как легко убедиться, получилось бы другое уравнение, именно (y+8):(y/2-6)=7, которое также разрешает задачу и дает ответ y=20.

Можно было бы принять за первое неизвестное число монет, оказавшееся в первом кошельке после выкладки из него 6 монет, тогда, обозначив это неизвестное через z идя тем же путем, каким мы шли при составлении перваго уравнения,мы получили бы уравнение (2(z+6)+8):z=7, откуда z=4.

Понятно, что многое изменилось в вопросах методики преподавания , но дети повторяют тот же путь, что и их сверстники 100-200 лет тому назад, и психология восприятия предмета мало изменилась, как и психология учителя, вводящего ученика в область определенных знаний. И тут уместно помнить о традициях отечественной педагогики.