В предыдущих лабораторных работах была изложена теория многочленной аппроксимации. Попробуем теперь изложить подобную теорию для аппроксимации периодических функций рядами Фурье. Ряд Фурье на интервале -N≤t≤N можно записать так:



где (k=0, 1, 2, …)

 (k=0, 1, 2, …)

1

-π 0 π

-1

В качестве примера рассмотрим разложение прямоугольного колебания в ряд Фурье. Подобное колебание, называемое меандром, находит широкое применение в технике. Итак,



Так как на практике мы не можем вычислить бесконечную сумму, проанализируем, как увеличение числа слагаемых влияет на приближение. При этом мы сталкиваемся с явлением Гиббса.



H(t)

0 π 2π 3π t

Прямоугольная

Рассмотрим это явление на примере прямоугольной волны H(t) с периодом 2π.

Если вычислить сумму первых 2n членов, то все члены с косинусами будут равны нулю и получаем:  ➀



H2n(t)

H(t)

1

½

явление Гиббса π t

Гиббс отметил, что частичная сумма H2n превосходит функцию на некоторую величину. Более точно

H2n1,08949…, при n→∞

Действительно, H2n(t) не только превосходит функцию H(t), но и имеет тенденцию колебаться около H(t), и колебания уменьшаются медленно, когда t удаляется от разрыва.

Чтобы объяснить явление, запишем ➀ как  ➁

где использована формула



Из выведенной формулы ➁ ясно, что максимум и минимум для 0≤t≤π достигаются в точках  ,

то есть при t= , m=1, 2, …, 2n-1, и что они чередуются.

То, что верно для этой специальной функции, очевидно, верно и для более общих функций, так как разрыв можно рассматривать как возникающий из прямоугольной волны, прибавленной к главной функции.

Действительно, явление Гиббса мы можем наблюдать и при приближении пилообразного сигнала с помощью рядов Фурье. С пилообразными колебаниями часто приходится сталкиваться в устройствах для развёртки изображения в осциллографах.

Заметим, что при увеличении числа слагаемых в рядах Фурье, приближение улучшается (уменьшается глубина колебаний). Это наглядно показывают графики, приведённые в конце.

Задача следующего этапа этой работы - фильтрация зашумлённого сигнала с помощью быстрых преобразований Фурье (БПФ).

Рассмотрим произвольный сигнал. В данном случае он задан как



На практике почти всегда имеют дело с зашумлённым сигналом. Поэтому наложим на сигнал некоторый шум. Теперь попробуем очистить наш сигнал от шумов. Для этого применим БПФ, а затем цифровой фильтр.

Итак, если использовать комплексное представление тригонометрических функций



то получим  ,

где 

Легко видеть, что 

(ak и bk -коэффициенты разложения в ряд Фурье)

Комплексная форма ряда Фурье удобнее в обращении при теоретических исследованиях, но вычисления проводятся с действительной формой. В комплексной форме существуют и положительные и отрицательные частоты: для каждой положительной частоты мы заменили две функции, синус и косинус, единой экспоненциальной, но имеющей как положительную, так и отрицательную частоту.

Покажем, что соответственно представлению рядам Фурье периодической функции имеется представление интегралом Фурье любой функции

 , где

.

Функция F(σ), грубо говоря, соответствует коэффициентам cл в ряде Фурье. Это - спектральная функция (спектральная плоскость); F(σ) описывает амплитуду частоты (σ) в функции f(t). Говорят, что функция F(σ) является преобразованием Фурье функции f(t). Обе функции несут одну и ту же информацию, так как каждая может быть найдена из другой, но только в разных формах: : f(t) в области времени, а F(σ) в области частот.

Итак, возвращаясь к нашей задаче, переведём сигнал из временной области в частотную. После этого применим цифровой фильтр. С помощью этого фильтра мы отбрасываем шумовые составляющие сигнала, оставляя частотные составляющие. Но нужно заметить, что пытаясь избавится от шумовых составляющих сигнала, мы невольно отбрасываем часть частотных. чем выше порог фильтрации, тем меньше шума мы получаем, но в то же время мы теряем всё большую часть полезной информации, то есть сигнал искажается. В этом я убедился на практике. Чем выше был порог шума, тем более «гладкой» была очищенная функция, но при наложении на неё исходного незашумлённого сигнала можно было убедиться в значительных расхождениях. И наоборот, чем ниже был порог шума, тем функция была менее «гладкой», но совпадение с исходным сигналом было лучше. При выборе определённого порога фильтрации нельзя не учитывать этот факт. Чтобы определить величину этого параметра прежде всего нужно руководствоваться особенностями поставленной задачи.

Фурье-анализ.

ak

Как в чистой, так и в прикладной математике, обычно ищут инварианты представления — инварианты по отношению к классу преобразований. В классе периодических функций перенос осей t=t’+b не должны менять в представлении функции того, что не зависит от системы координат. Непосредственно видно, что коэффициенты Фурье ak и bk не обладают этими свойствами и меняются при сдвиге оси, то есть когда изменяется начало отсчёта времени. Полагая t=t’+b и используя периодичность f(t), чтобы сдвинуть в интеграле пределы получаем:



Аналогично 

Хотя ak и bk не инвариантны, величина



очевидно, инвариантна. Величину  называют мощностью частоты k и изображают в виде дискретного спектра мощности.

В конце работы мы можем видеть в графики двух наиболее важных характеристик импульса: график огибающей спектра прямоугольного импульса и график фазового сдвига гармоник.