Лобачевский по существу берет за отправной пункт все то, что Евклид доказал без помощи 5-го постулата. Все эти предположения являются общими как для геометрии Евклида, так и для геометрии Лобачевского.

Таким образом, все предложения абсолютной геометрии сохраняют свою силу и в геометрии Лобачевского. Абсолютная геометрия есть общая часть и общий фундамент евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского.

В первом случае мы получим геометрию Евклида, во втором случае –

Геометрию Лобачевского. Отсюда ясно, что все сходное в геометриях Евклида и Лобачевского имеет свои основания в абсолютной Геометрии, а все то, что различно в них, коренится в различии аксиом параллельности.

Укажем ряд важнейших планиметрических теорем, относящихся к абсолютной геометрии.

* 1. Каждый отрезок и каждый угол можно единственным образом разделить пополам.
  2. Через каждую точку можно провести единственный перпендикуляр к данной прямой.
  3. Сумма двух смежных углов равна 2d.
  4. Все прямые углы равны между собой.
  5. Вертикальные углы равны.
  6. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является медианой и высотой, углы при основании равны.
  7. Перпендикуляр короче наклонной. Известные теоремы о сравнении перпендикуляров, наклонных и их проекций.
  8. Внешний угол треугольника больше внутреннего угла, с ним не смежного.
  9. Во всяком треугольнике не может быть более одного прямого или тупого угла.
  10. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно.
  11. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.
  12. Сумма двух сторон треугольника больше третьей.
  13. Три признака равенства треугольников.
  14. Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, или внутренние накркст лежащие углы равны, или сумма внутренних односторонних углов равна 2d, то данные прямые не пересекаются.
  15. Два перпендикуляра к третьей прямой не пересекаются.
  16. Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, ими определяемой, проходит по крайней мере одна прямая, не пересекающая данной.
  17. Сумма углов треугольника не более 2d(11-я теорема Лежандра).
  18. Если в плоскости две точки лежат по разные стороны прямой, то отрезок, их соединяющий, пересекает данную прямую.
  19. Если луч проходит через вершину треугольника внутрь его, то он пересекает противоположную сторону треугольника.
  20. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника.
  21. В треугольник можно вписать единственную окружность.
  22. Прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.
  23. Равные дуги окружности стягиваются равными хордами, и обратно.
  24. Если выбрать единичный отрезок, то всякому отрезку можно поставить в соответствие единственное положительное число, называемое длинной отрезка, и, обратно, каждому положительному числу можно поставить в соответствие некоторый отрезок, длина которого выражается этим числом.
  25. Если все внутренние лучи, выходящие из вершины угла АОВ, а так же сторона АО и ОВ разбить на два класса так, что 1) каждый луч принадлежит одному и только одному из этих классов, луч АО принадлежит первому классу, а луч ОВ – ко второму, 2) каждый луч первого класса лежит между ОА и любым лучом второго класса, то существует один и только один луч l, пограничный между лучами обоих классов, причем сам луч l принадлежит либо первому, либо второму классу.
  26. Если выбрать некоторый угол в качестве единицы измерения, то каждому углу можно поставить соответствие единственное число, называемое мерой или величиной угла.

Исходным пунктом геометрии Лобачевского является принятие всех предложений геометрии Евклида, не зависящих от 5-го постулата (т.е. абсолютной геометрии, включая аксиомы Паша, Архимеда, Дедекинда), и присоединение к ним взамен отброшенного 5-го постулата следующая аксиома, противоположный аксиоме Плейфера, а значит, и 5-му постулату.

*Через точку, лежащую вне прямой плоскости, определяемой ими, можно провести не менее 2-х прямых, не пересекающих данной прямой.*

Эта аксиома утверждает существование, по крайней мере 2-х таких прямых. Отсюда следует, что таких прямых существует бесконечное множество.

Очевидно, что все прямые, проходящие через точку М внутри вертикальных углов α и β, образованных прямыми b и c также не пересекают а, а таких прямых бесконечное множество.

Плоскость (или пространство), в которой предполагается выполнение аксиомы Лобачевского, называется плоскостью (или пространством) Лобачевского.

Перейдём непосредственно к параллельным Лобачевского.

Две граничные прямые СС’ и DD’ называются параллельными прямой ВВ’ в точке А, причём прямая С’С называется параллельной В’В в направлении В’В, а прямая D’D называется параллельной прямой ВВ’ в направление ВВ’. Острый угол α , образуемый параллельными с перпендикуляром АР, называется углом параллельности в точке А относительно прямой BB’. Этот угол, есть функция длины р перпендикуляра АР и обозначается так: α=П (р). АР называются отрезком параллельности в точке А относительно прямой BB’.

Все прямые пучка не пересекающие BB’ и лежащие внутри заштрихованных вертикальных углов, называются расходящимися с BB’ или сверх параллельными к BB’; угол, образуемый такой прямой с перпендикуляром АР с обеих от него сторон, больше угла параллельности α .

Наконец , все остальные прямые пучка, образующие с АР с какой-либо стороны острый угол, меньше угла параллельности α , называются пересекающими прямую BB’ или сходящимися с BB’ .

Необходимо обратить внимание , что геометрия Лобачевского при указание, то прямая СС’ параллельно прямой BB’, является совершенно обязательным также указывать, во-первых, в каком направление CC’ параллельно BB’, во-вторых, в какой точке , ибо у нас пока нет уверенности в том , что если мы на прямой CC’ возьмём какую-нибудь точку М , отличную от А , то и по отношению к пучку прямых с центра в точке М прямая СС’ будет граничной прямой.

*Определение.* Прямая С’C называется параллельной прямой в направление B’B в точке А, если , во-первых, прямая С’C не пересекает прямой BB’, во-вторых , C’C является граничной в пучке прямых с центром в точке А, т. е. всякий луч АЕ, проходящий внутри угла CAD, где D-любая точка прямой BB’, пересекает луч DB.

Условимся в целях краткости и удобства обозначать параллельность прямой АА’ к BB’в направление B’B символом AA’ ⎢⎢ B’B, где порядок букв указывает направление параллельности. На чертеже направление параллельности указывается стрелками.

***Т****еорема1.* Если прямая ВВ’⎢⎢АА' в точке М, то ВВ'⎢⎢АА' в любой своей точке N.

*Теорема 2.* Если ВВ'⎢⎢АА', то и обратно: АА'⎢⎢ВВ'.

*Теорема 3.* Если АА'⎢⎢СС' и ВВ'⎢⎢СС', то АА'⎢⎢ВВ'.

*Теорема 4.* Если прямая CC’ лежит между двумя прямыми АА’ и BB’, параллельными в некотором направление, не пересекая их, то CC’параллельна обеим этим прямым в том же направлении.

*Теорема 5.*Если две прямые при пересечении с третьей образуют равные соответственные углы, или внутренние односторонние углы, в сумме составляющие 2d, то эти прямые расходятся.

*Задача 902.(Сборник задач - Атанасян, ч.2)* Пусть (U1V1) ⎢⎢(U2V2). Доказать, что если прямая (UV) лежит между (U1V1) и (U2V2) и не пересекает одну из них, то она параллельна данным.

Действительно, отрезок U1U2, соединяющий любые точки U1 и U2 параллельных прямых U2V2 и U1V1 , пересечет UV в некоторой точке U, ибо UV по условию лежит между U2V2 и U1V1 (теорема 1.18).

В силу параллельности U2V2 и U1V1 любой луч U2E , проходящий внутри угла V2U2U1, пересечёт U1V1, а значит, и UV. Следовательно, U2V2 ⎢⎢ UV. Пользуясь теоремами 2 и 3 , легко убедиться, что U1V1 ⎢⎢UV.

Интересно отметить, что в геометрии Лобачевского прямая может пересечь две параллельные, не пересекая третьей. Действительно, например, любая прямая EF, расходящаяся с АА’, пересекает СС’и BB’, не пересекая АА’.