**Логические методы познания**

**Анализ и синтез**

Логические методы познания особенно необходимы при отыскании решения задач. Рассмотрим, например, следующую задачу: "Определить площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8 см". Поиск ее решения целесообразно начать, пользуясь методами анализа и синтеза. В процессе анализа задачи выделяются все ее утверждения: 1) необходимо вычислить площадь четырехугольника; 2) четырехугольник имеет взаимно перпендикулярные диагонали; 3) диагонали четырехугольника равны 6 и 8 см. Выделение этих утверждений из "целого" (задачи) - результат проведения анализа. Анализ направляется вопросами: "Что дано в задаче?", "Что еще дано в задаче?", "О чем еще говорится в задаче?", "Что в задаче требуется найти?". Важно иметь в виду, что при решении задачи анализ проводится не один раз: возможен повторный анализ, анализ с новой целью, с иной точки зрения и т. п. Так, для выполнения чертежа необходим дополнительный анализ, устанавливающий порядок использования данных задачи для построения чертежа. Выполнение чертежа предполагает уже другой метод познания - метод синтеза. Ошибки в выполнении чертежа являются поводом для проведения анализа с более конкретной целью, т. е. более углубленного анализа. Например, при решении рассматриваемой задачи учащиеся иногда четырехугольник изображают в виде параллелограмма. Избежать ошибки в выполнении чертежа можно, если начать построения не с четырехугольника, а с его диагоналей, изображая их произвольными взаимно перпендикулярными отрезками. В итоге дополнительного анализа на первый план выдвигается условие перпендикулярности диагоналей, которое является основным в отыскании общей идеи решения задачи, необходимых вычислений. Возможны различные решения задачи (в зависимости от того, в каком направлении будет вестись анализ, на какие треугольники будет разбит данный четырехугольник). Например, нетрудно заметить, что данный четырехугольник состоит из четырех (или двух) треугольников и задача тем самым сводится к нахождению суммы площадей этих треугольников.

Анализ - логический прием, метод исследования, состоящий в том, что изучаемый объект мысленно (или практически ) расчленяется на составные элементы (признаки, свойства, отношения), каждый из которых исследуется в отдельности как часть расчлененного целого.

Синтез - логический прием, с помощью которого отдельные элементы соединяются в целое.

Очень часто умение мыслить связывают с умением анализировать. Это вполне правомерно, так как вывод следствий, выражающих новые свойства изучаемого объекта, очень часто требует анализа того, что уже известно о нем. В математике, чаще всего, под анализом понимают рассуждение в "обратном направлении", т. е. от неизвестного, от того, что необходимо найти, к известному, к тому, что уже найдено или дано, от того, что необходимо доказать, к тому, что уже доказано или принято за истинное. В таком понимании, наиболее важном для обучения, анализ является средством поиска решения, доказательства, хотя в большинстве случаев сам по себе решением, доказательством еще не является.

Синтез, опираясь на данные, полученные в ходе анализа, дает решение задачи или доказательство теоремы. Анализ лежит в основе весьма общего подхода к решению задач (имеется в виду нестандартных задач, для которых нет соответствующего алгоритма), известного под названием сведения (редукции) задачи к совокупности подзадач. Идея такого подхода состоит именно в свойственном для анализа "размышлении в обратном направлении" от задачи, которую предстоит решить, к подзадачам, затем от этих подзадач к подподзадачам и т. д., пока исходная задача не будет сведена к набору элементарных задач. Что же понимают под "элементарными задачами"? Это, во-первых, задачи, решаемые за один шаг поиска, во-вторых, более сложные задачи (т. е. не решаемые за один шаг поиска), решение которых уже известно из имеющегося опыта решения задач.

Из такого понимания элементарной задачи следует, что чем больший опыт решения задач, тем больше задач становятся для нас "элементарными" в упомянутом выше смысле, а следовательно, тем меньше объем поиска при решении новых задач, их сведения к элементарным, так как цель поиска состоит в получении элементарных задач, останавливающих процесс поиска.

Подход к решению задач, состоящий в сведении задач к совокупности подзадач, находит широкое применение в практике решения не только задач на доказательство.

Приведем в качестве примера арифметическую задачу для IV класса: "В двух бригадах совхоза участки под зерновые составляли 2000 га и 3000 га соответственно. Первая бригада собрала по 30 ц, вторая по 26 ц с гектара. Продано государству 5500 т с первого участка и 7000 т со второго. Остальное зерно засыпано в семенной фонд. Сколько зерна засыпал совхоз в семенной фонд?"

Обычно анализ задачи по существу представляет собой процесс сведения данной задачи к совокупности подзадач, доведенный до элементарных задач. Здесь элементарной считается задача, решаемая с помощью не более одного действия над данными задачи (т. е. элементарной считается и задача, решение которой находится среди данных, например: "Сколько зерна продано государству с первого участка?").

Возможен и иной путь поиска. Построение самого процесса решения (синтез) осуществляется последовательным решением подзадач в обратном порядке.

Наряду с анализом и синтезом в обучении математике часто используются аналогия, обобщение и конкретизация.

Принцип сознательности обучения ориентирует учащихся на осознание путей получения новых знаний. Это осознание формируется на основе практики целенаправленного применения методов научного познания. Полезным является также краткий методологический комментарий процесса поиска решения математических задач.

**Сравнение и аналогия**

Сравнение и аналогия-логические приемы мышления, используемые как в научных исследованиях, так и в обучении.

С помощью сравнения выявляется сходство и различие сравниваемых предметов, т. е. наличие у них общих и необщих (различных) свойств.

Например, сравнение треугольника и четырехугольника раскрывает их общие свойства: наличие сторон, вершин, углов, столько же вершин и углов, сколько сторон, а также различие: у треугольника три вершины (стороны), у четырехугольника - четыре. Сравнение параллелограмма и трапеции позволяет выявить их общие свойства: они оба четырехугольники, оба имеют параллельные стороны, - и различие: в одном - две пары параллельных сторон, в другом - одна. Сравнение обыкновенных и алгебраических дробей выявляет их сходство: наличие числителя и знаменателя, отсутствие значения, когда знаменатель обращается в нуль, и т.д., - и различие: в одном случае числитель и знаменатель - числа, в другом - алгебраические выражения.

Сравнение приводит к правильному выводу, если выполняются следующие условия:

1) сравниваемые понятия однородны и 2) сравнение осуществляется по таким признакам, которые имеют существенное значение.

Эти два условия выполняются в приведенных выше сравнениях: треугольник и четырехугольник - однородные понятия (многоугольники), параллелограмм и трапеция - четырехугольники, обыкновенные и алгебраические дроби - выражения. Во всех трех случаях сравнение осуществлено по существенным признакам (если, например, включили бы в общие свойства параллелограмма и трапеции тот факт, что они оба обозначены одними и теми же буквами АВСД, или считали бы различием обозначение их различными буквами, то это было бы ошибочным подходом к сравнению). Сравнение подготавливает почву для применения аналогии. С помощью аналогии сходство предметов, выявленное в результате их сравнения, распространяется на новое свойство (или новые свойства).

Рассуждение по аналогии имеет следующую общую схему:

А обладает свойствами А, В, С, Д,

В обладает свойствами А, В, С,

Вероятно (возможно) В обладает и свойством Д.

Как видим, заключение по аналогии является лишь вероятным (правдоподобным), а не достоверным. Поэтому аналогия, как правило, не является доказательным рассуждением, т. е. рассуждением, которое может служить доказательством. ("Как правило" потому, что имеется исключение, связанное с особым видом аналогии, о котором речь пойдет дальше.) Однако в обучении, как, впрочем, и в науке, аналогия часто полезна тем, что она наводит нас на догадки, т. е. служит эвристическим методом. В обучении же математике не менее важно, чем учить доказывать, это учить догадываться, что именно подлежит доказательству и как найти это доказательство.

В приведенном выше разъяснении того, что такое аналогия, используется понятие "сходство", которое само нуждается в разъяснении. Когда говорят, например, о сходстве между людьми, между человеком и его изображением на фотоснимке или картине и т. п., интуитивно понимают, что означает сходство. Но можно ли в таком же смысле говорить, например, о сходстве между множеством учащихся класса и множеством А = {1,2,3, ..., 30}, или между множеством точек прямой и множеством действительных чисел, или между множеством объектов на некотором участке и планом этого участка? Применение же аналогии в математическом исследовании, а поэтому и в обучении математике, часто характеризуется именно тем, что оно основано на глубоком, внутреннем "сходстве", а по существу на одинаковости структуры множеств предметов различной природы с отношениями, имеющими совершенно различный смысл, при отсутствии всякого внешнего "сходства" (в обычном смысле) между этими множествами. Это "структурное сходство", получившее точное математическое описание с помощью понятия изоморфизма, лежит в основе особого вида аналогии, приводящей в отличие от обычной аналогии к достоверным заключениям.

Например, в основе координатного метода лежит идея взаимно однозначного соответствия между множеством точек прямой (плоскости или пространства) и множеством действительных чисел (пар или троек чисел), переводящего некоторые отношения между точками в отношения между числами (парами или тройками чисел). Это взаимно однозначное соответствие является изоморфизмом, позволяющим осуществить однозначный перевод свойств с языка, описывающего структуру множества точек прямой (плоскости или пространства), на язык, описывающий структуру множества Я (^ или ^), и обратно.

Возможность применения аналогии, казалось бы, к совершенно различным объектам основана на совпадении математических моделей этих объектов или принадлежности этих моделей к одному классу.

Вспомним слова В. И. Ленина: "Единство природы обнаруживается в "поразительной аналогичности" дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений". Простейшее дифференциальное уравнение

y' = -ky (1)

и его решение

y = yoe-kt(2)

могут описать процесс распада радия (в этом случае формула (2) дает массу у радия в момент х, если y - масса радия в момент времени x ), и процесс изменения атмосферного давления в зависимости от высоты х над уровнем океана (в этом случае (2) - барометрическая формула), и процесс изменения народонаселения (если прирост населения в данный момент пропорционален численности населения в этот момент), и процесс охлаждения тела при постоянной температуре окружающей среды (поскольку скорость остывания тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды), и, вообще, всякий процесс показательного роста или спада (при k < 0 или k > 0), характеризующийся тем, что скорость изменения величины пропорциональна самой изменяющейся величине в данный момент, что и выражено в дифференциальном уравнении (1).

Все перечисленные явления и процессы обладают глубоким сходством при всем внешнем различии, выражающемся тем, что их математические модели принадлежат одному классу моделей (1). Это и позволяет переносить по аналогии свойства одного из этих процессов на другой (если только эти свойства выводимы из построенной модели).

Часто та или иная последовательность в изучении учебного материала обосновывается возможностью использования аналогии в обучении. Например, изучение десятичных дробей раньше обыкновенных объясняется не только тем, что именно десятичные дроби широко применяются в практике, но и возможностью использования при изучении арифметики десятичных дробей аналогии с арифметикой натуральных чисел. При изучении свойств алгебраических дробей можно использовать аналогию с обыкновенными дробями. Аналогия может служить базой для одновременного изучения арифметической и геометрической прогрессий.

Однако в установившейся практике обучения математике аналогия используется недостаточно. Иногда высказываются опасения, что с помощью аналогии мы можем прийти к ложным заключениям. Например, исходя из того, что предложение

а || b и ас bс(1)

верно (является теоремой) и на плоскости и в пространстве, а обратное предложение

а || c и bс aс(2)

верно на плоскости (является теоремой планиметрии), по аналогии утверждают, что предложение (2) верно и в пространстве, и приходят, таким образом, к ложному заключению.

Надо, однако, помнить, что в этом случае заключение по аналогии лишь правдоподобия и поэтому подлежит еще доказательству (или опровержению).

Следует отметить как недостаток, что (в практике обучения) опровержению мы почти не учим. Это является и серьезным упущением в общеобразовательном и воспитательном отношении, так как в жизни нередко возникает необходимость опровергать.

Исходя из истинности предложения (2) на плоскости, необходимо выяснить, имеет ли место аналогичное свойство в пространстве. Так как это предложение является общим (кванторы общности "для любых а, b, c подразумеваются), то для его опровержения достаточно найти такие прямые а, b, с, чтобы условие (аc и bс) выполнялось, а заключение {а || b) не выполнялось.

Мы не должны опасаться возникновения ложных заключений по аналогии. Необходимо лишь считать их гипотезами (предположениями). Ошибки, допускаемые в процессе поиска, исследования, вполне правомерны, так как чаще всего поиск ведется способом "проб и ошибок". В установившейся практике обучения, как правило, мы не даем учащимся, отвечающим на вопросы учителя, ошибаться. В этом отражается тот факт, что учебная деятельность учащихся является в основном лишь репродуктивной, а в такой деятельности ошибки недопустимы. Воспроизводить необходимо безошибочно. В продуктивной же, творческой деятельности ошибки неизбежны. Такого рода ошибками являются и те, которые появляются в результате применения аналогии в процессе поиска. Они являются составной частью метода проб и ошибок. Важно, чтобы учащиеся в поиске правильных ответов сами могли находить ошибочность возникающих в этом процессе предположений. Этому, разумеется, надо их учить.

Находить сходство, которое могло бы служить источником плодотворных рассуждений по аналогии, бывает нелегко даже в том случае, когда природа сравниваемых объектов одинакова.

Возьмем для примера две геометрические фигуры: треугольник и тетраэдр. В чем состоит сходство между этими фигурами? Треугольник - плоская фигура, тетраэдр - пространственная. Может быть, сходство в том, что грани тетраэдра - треугольники? Если даже принять, что в этом есть какое-то сходство (а пока не уточнено, что такое "сходство": можно понимать под этим что угодно), то вряд ли оно может быть источником для рассуждений по аналогии. Более глубокое исследование этих двух объектов позволяет обнаружить такое структурное сходство, которое является источником аналогии, ведущей к открытиям. Действительно, треугольник и тетраэдр - ограниченные выпуклые множества точек. .Первое образовано минимальным числом прямых на плоскости (нет многоугольника с меньшим, чем три, числом сторон), второе - минимальным числом плоскостей в пространстве. Отсюда, разумеется, не следует, что все свойства этих фигур одинаковы. Но если мы уже изучили свойства треугольника и приступаем к изучению свойств тетраэдра, то установленное сходство в одних свойствах дает нам право предполагать (только предполагать), что и некоторые другие свойства треугольника "переводятся" аналогичным образом в свойства тетраэдра. Так, например, исходя из установленного сходства и из того, что "в треугольнике биссектрисы углов пересекаются в одной точке и эта точка - центр вписанной окружности", мы приходим к предположению, что "в тетраэдре биссекторные плоскости двугранных углов пересекаются в одной точке и эта точка - центр вписанной сферы", и т. д. Мы открываем новые свойства тетраэдра, рассуждая по аналогии. Эти свойства, разумеется, подлежат доказательству.

Другой пример. Параллелепипед - пространственный аналог параллелограмма: в параллелограмме противоположные стороны параллельны, в параллелепипеде противоположные грани параллельны. Рассуждая по аналогии, можно прийти к гипотезе, что в параллелепипеде, так же как и в параллелограмме, диагонали, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам. Но если видеть только сходство и не замечать различия, в частности, что в параллелограмме всего две диагонали, а в параллелепипеде - четыре, то мы упустим важное свойство, подлежащее доказательству, а именно, что все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке. Как видим,. применению аналогии должно предшествовать сравнение, с помощью которого выявляется как сходство, так и различие.

Сфера - пространственный аналог окружности. Эти две фигуры определяются как множества точек плоскости и пространства соответственно, характеризуемые одним и тем же свойством:

{X || OX| = r}

(множество всех точек плоскости (пространства), расстояние которых от данной точки О равно данному числу r).

Это наводит на догадку, что сфера обладает некоторыми свойствами, аналогичными свойствам окружности. Например, что свойства взаимного расположения прямой и окружности переводятся в свойства взаимного расположения плоскости и сферы: 1) Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то плоскость и сфера не имеют общих точек. 2) Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то плоскость и сфера имеют одну и только одну общую точку. 3) Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то плоскость и сфера пересекаются по окружности (т. е. имеют бесконечное множество общих точек, лежащих на окружности). Как видно, лишь в третьем случае проявляется различие между окружностью и сферой, которое должно учитываться при формулировке аналогичных свойств. Свойство касательной плоскости тоже может быть найдено с помощью аналогии.

**Обобщение, абстрагирование и конкретизация**

Обобщение и абстрагирование - два логических приема, применяемые почти всегда совместно в процессе познания.

Обобщение - это мысленное выделение, фиксирование каких-ни-будь общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу предметов или отношений. Абстрагирование - это мысленное отвлечение, отделение общих, существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных или необщих свойств рассматриваемых предметов или отношений и отбрасывание (в рамках нашего изучения) последних.

Когда мы говорим "несущественные свойства", то имеется в виду несущественные с математической точки зрения. Один и тот же предмет может изучаться, например, и физикой, и математикой. Для физики существенны одни его свойства (твердость, теплопроводимость, электропроводимость и другие физические свойства), для математики эти свойства несущественны, она изучает лишь форму, размеры, расположение предмета.

Из приведенного краткого разъяснения видно, что абстрагирование не может осуществляться без обобщения, без выделения того общего, существенного, что подлежит абстрагированию.

Обобщение и абстрагирование неизменно применяются в процессе формирования понятий, при переход от представлений к понятиям и, вместе с индукцией, как эвристический метод.

Под обобщением понимают также переход от единичного к общему, от менее общего к более общему.

Под конкретизацией понимают обратный переход - от более общего к менее общему, от общего к единичному.

Если обобщение используется при формировании понятий, то конкретизация используется при описании конкретных ситуаций с помощью сформированных ранее понятий.

Уточним переход от единичного к общему, от менее общего к более общему и обратный переход.

Например, формирование понятия "квадрат" на раннем этапе обучения начинается показом множества предметов, отличающихся друг от друга формой, размерами, окраской, материалом, из которого они сделаны. Дети, после того как им показывают на одну из этих фигур и говорят, что это квадрат, безошибочно отбирают из множества фигур все те, которые имеют такую же форму, пренебрегая различиями, касающимися размеров, окраски, материала. Здесь выделение из множества предметов подмножества производится по одному еще недостаточно проанализированному признаку - по форме. Дети еще не знают свойств квадрата, они распознают его только по форме. Такое распознавание встречается у детей 4-5 лет. Дальнейшая работа по формированию понятия квадрата состоит в анализе этой формы с целью выявления ее свойств. Учащимся предлагается путем наблюдения найти, что есть общего у всех отобранных фигур, имеющих форму квадрата, чем они отличаются от остальных. Устанавливается, что у всех квадратов 4 вершины и 4 стороны. Но у некоторых фигур, которые мы не отнесли к квадратам, тоже 4 вершины и 4 стороны. Оказывается, у квадрата все стороны равны и все углы прямые. Все отобранные фигуры, обладающие этими свойствами, мы объединяем в один класс - квадраты (переход от единичного к общему).

В дальнейшем обучении этот класс включается в более широкий класс прямоугольников (переход от общего к более общему). При этом переходе к более широкому классу происходит сужение характеристики класса, одно из свойств, характеризующих класс квадратов (равенство всех сторон), опускается.

Так, если множество свойств, характеризующих класс предметов А, обозначить через S(А) (в традиционной формальной логике А называется объемом понятия, а S(А)-содержанием понятия), то имеет место следующее соотношение: если АВ, то S(В)S(A).

Обратный переход от более общего к менее общему, или выделение некоторого подкласса А класса В, осуществляется с помощью некоторого свойства, которым обладают некоторые элементы В, другие же не обладают им. Те элементы В, которые обладают этим новым свойством и образуют подкласс А класса В.

Присоединив это новое свойство Р к множеству свойств, характеризующих класс В, получаем множество свойств, характеризующих подкласс А, т. е. S(В){Р} = S(A), или S(В)S(А).

В нашем примере, если к содержанию понятия "прямоугольник" (к множеству свойств, характеризующих класс прямоугольников) добавить новое свойство (равенство всех сторон), мы получим содержание понятия "квадрат" (множество свойств, характеризующих класс квадратов).

В математике обобщение и абстрагирование часто связаны с заменой постоянных переменными (в переходе от записи отдельных фактов к записи общих закономерностей), а конкретизация - с подстановкой вместо переменных их значений (в обратном переходе).

Рассмотрим с точки зрения использования обобщения и абстрагирования открытие закона коммутативности сложения, который ранее мы изучили в ином аспекте.

Исходным эмпирическим материалом здесь служат непересекающиеся множества А и В конкретных предметов (карандашей и ручек или черных и красных палочек). Легко обнаруживается опытным путем, что, присоединяя к множеству А множество В или, наоборот, к множеству В множество А, получаем одно и то же множество. Варьируя число элементов этих множеств, получаем ряд конкретных равенств:

2+3==3+2; 5+7==7+5; 4+8=8+4 и т. п.

Внимательно присматриваемся к этим равенствам с целью выявления содержащегося в них общего и отделения его от частного содержания. Замечаем: в левой части каждого из этих равенств записана сумма двух чисел, в правой - сумма этих же чисел, но записанных в другом порядке. Как же сохранить только это общее, отвлекаясь от конкретных чисел, входящих в эти равенства?

Если просто отбросить эти числа, мы получим форму с "пустыми местами":

" ... + ... = ... + ...",

которая не отражает выявленной общей закономерности, так как не отмечено, какие пустые места должны заполняться одними и теми же названиями чисел. Чтобы устранить этот недостаток полученной формы, изображают пустые места, которые должны заполняться именами одних и тех же чисел, в виде пустых "окошек" одинаковой формы. В результате получаем:

" x + о = о + x ".

В дальнейшем разъясняется, что в математике для большего удобства вместо пустых "окошек" различной формы применяются различные буквы и получается, например,

а + b = b + а или х+у == у+х.

Эти буквы, играющие роль пустых мест, и называются переменными, а числа, имена которых можно поставить вместо этих букв, - их значениями.

Как видно, обобщение и абстрагирование привело к открытию закона коммутативности сложения и одновременно к важному понятию переменной. Переходом от имен конкретных чисел к числовым переменным и осуществляется обобщение и абстрагирование.

Конкретизация основана на известном правиле вывода называемом правилом конкретизации.

Смысл этого правила интуитивно ясен: из того, что свойством Р обладают все элементы некоторого множества, .следует, что этим свойством обладает произвольный элемент а этого множества. Применяя, например, закон ассоциативности сложения к устному вычислению суммы 7+(93+15), мы применяем (неявно) правило конкретизации: мысленно мы отбрасываем в записи закона ассоциативности кванторы общности, подставляем вместо переменных х, у, z постоянные "7", "93" и "15" соответственно и получаем равенство 7 + (93 + 15) = (7 +93) +15, по правилу конкретизации.

Как видно, с помощью этого правила мы осуществляем переход от общего к единичному.

Обобщение, абстрагирование и конкретизация находят широкое применение в специальных методах обучения математике, о которых речь пойдет дальше.

Если некоторая реальная ситуация или связанная с нею задача приводит к еще не изученной математической модели, то приходится исследовать новый класс моделей.

Для осуществления перехода от конкретной модели к классу моделей такого типа используется обобщение и абстрагирование. Применение же результатов исследования к конкретной модели этого класса предполагает использование конкретизации.

Например, пусть некоторая задача описывается с помощью квадратного уравнения

2x - 9х + 2 = 0,(1)

когда учащиеся еще не умеют решать подобные уравнения.

Это является стимулом для изучения соответствующего класса уравнений (моделей)

аx + bх + с = 0.(2)

Переход от конкретной модели (1) к классу моделей (2), т. е. от единичного к общему, осуществляется заменой коэффициентов, представляющих собой имена чисел, числовыми переменными.

После исследования этого класса моделей (построения алгоритма для решения любого уравнения этого класса) с помощью конкретизации (подстановки в формуле корней вместо а, b, с конкретных коэффициентов) решаем исходное и другие уравнения этого класса.

Процесс- абстрагирования в математике во многом отличается от аналогичного процесса в других науках, поскольку способы абстрагирования зависят от природа изучаемых объектов, характера и целей их изучения. Поэтому естественно, что характеристические особенности абстрагирования в математике неизбежно должны находить некоторое отражение и в методах обучения математике.

Наиболее распространенные в математике виды абстракций - обобщающая абстракция (или абстракция отождествления), идеализация и различные абстракции осуществимости - используются и в школьном обучении математике. Однако методически формирование этих абстракций не разработано. Поэтому часто эти и другие математические абстракции вызывают серьезные затруднения, с ними связаны и многие допускаемые учащимися ошибки.

Основой абстракции отождествления является отношение эквивалентности. При установлении отношения эквивалентности в исследуемом множестве объектов эквивалентные объекты отождествляются по какому-нибудь свойству, которое абстрагируется от остальных свойств этих объектов и становится самостоятельным абстрактным понятием, находящимся на более высокой ступени абстракции, чем объекты, от которых оно было абстрагировано.

Так, отношение равночисленности множеств объединяет в один класс все конечные множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие (эквивалентные множества). От множеств, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности, абстрагируется их общее свойство, характеризующее этот класс. Это свойство и является самостоятельным понятием натурального числа, выражающего численность множеств (одна и та же для каждого множества) из данного класса.

Так формировалось понятие натурального числа в длительном историческом процессе, так оно формируется и в обучении дошкольников и младших школьников.

Не надо думать, что усвоение детьми последовательности числительных-один, два, три, ..., десять, ... - является признаком сформированности у них понятия натурального числа. Формирование этого понятия у детей в какой-то мере имитирует исторический процесс формирования понятия натурального числа.

Мы должны предоставить детям возможность сравнивать множества различных предметов по их численности, обнаруживать, что между некоторыми множествами удается установить взаимно однозначное соответствие, между другими не удается. Так возникают классы равночисленных множеств, которым приписываются в качестве характеристик определенные натуральные числа.

Как видно, понятие натурального числа, как и другие понятия, формируемые с помощью абстракции отождествления, представляют собой абстракцию от абстракции: от предмета мы переходим к классу эквивалентных (в каком-то отношении) предметов, а от этого класса - к свойству, общему для всех объектов, ему принадлежащих, т. е. эти объекты отождествляются по одному свойству, которое абстрагируется от прочих свойств.

Абстрагирование в математике часто выступает как многоступенчатый процесс, результатом которого являются абстракции от абстракций.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Отношение сонаправленности лучей (плоскости или пространства) разбивает множество лучей на классы эквивалентности (классы сонаправленных лучей). Все лучи одного класса отождествляются по свойству одинаковости направления (отношению сонаправленности). По существу каждый класс сонаправленных лучей представляет собой одно направление. Но это направление определяется любым лучом (представителем) этого класса.

Отношение подобия фигур разбивает множество всех фигур на классы эквивалентности (классы подобных фигур). Все фигуры одного класса характеризуются одинаковостью формы. По существу каждый такой класс можно называть формой. Но эта форма определяется любой фигурой (любым представителем) этого класса.

В школьном обучении не всегда явно вычленяются все этапы абстрагирования. В частности, образование классов эквивалентности, как правило, протекает неявно. Наблюдается свойство у некоторых предметов данного рода или отношение между ними, которое затем абстрагируется от этих предметов и становится самостоятельным понятием. Часто, ничего не говоря о классах эквивалентности, мы сразу же пользуемся представителями этих классов. Проиллюстрируем это на примере.

Рассмотрим множество всевозможных направленных отрезков или пар точек плоскости или пространства (пару точек (А, В) можно изобразить в виде направленного отрезка с началом А и концом В). Установим в этом множестве отношение эквивалентности т. е. два направленных отрезка эквивалентны, если соответствующие лучи сонаправлены, а длины этих отрезков равны.

Так как это отношение является отношением эквивалентности, то оно порождает разбиение множества всех направленных отрезков на классы эквивалентности.

Теперь возможны два методически различных продолжения: а) каждый класс эквивалентности называть вектором (это по существу то же, что называть вектором параллельный перенос, так как класс эквивалентных пар точек определяет параллельный перенос); б)- называть вектором направленный отрезок, т. е. отождествить класс эквивалентности с любым его представителем.

Такое отождествление вполне правомерно, так как практически в физических и других приложениях векторов мы работаем не с классами эквивалентных направленных отрезков, а с теми или иными представителями этих классов, т. е. с направленными отрезками, исходящими из определенных точек.

Педагогический подход, состоящий в замене класса его представителем, направлен на понижение уровня абстрактности понятий (направленный отрезок - менее абстрактное понятие, чем класс таких отрезков).

Наряду с абстракцией отождествления при построении математических моделей действительности, а следовательно, и при обучении математике используется и такой специфический прием абстрагирования, как идеализация.

Под идеализацией имеется в виду образование понятий, наделенных не только свойствами, отвлеченными от их реальных прообразов, но и некоторыми воображаемыми свойствами, отсутствующими у исходных объектов. Это делается для того, чтобы посредством изучения идеализированных образов облегчить в конечном счете изучение их реальных прообразов.

Разъяснение этого в процессе обучения на конкретных примерах имеет важное воспитательное значение, раскрывая связь абстрактных, идеализированных понятий с реальным миром. Оно способствует также пониманию способа математизации, построения математических моделей реальных ситуаций.

Действительно, нигде в природе не встречается "геометрическая точка" (не имеющая размеров), но попытка построения геометрии, не использующей этой абстракции, не приводит к успеху. Точно так же невозможно развивать геометрию без таких идеализированных понятий, как "прямая линия", "плоскосгь",. "шар" и т. д. Все реальные прообразы шара имеют на своей поверхности выбоины и неровности, а некоторые несколько отклоняются от "идеальной" формы шара (как, например, земля), но если бы геометры стали заниматься такими выбоинами, неровностями и отклонениями, они никогда не смогли бы получить формулу для объема шара. Поэтому мы изучаем "идеализированную" форму шара и, хотя получаемая формула в применении к реальным фигурам, лишь похожим на шар, дает некоторую погрешность, полученный приближенный ответ достаточен для практических потребностей. Это должно быть доведено до сознания учащихся.

Особым видом идеализации является абстракция потенциальной осуществимости. Например, при построении натуральных чисел абстрагируются от того, что невозможно написать или назвать число, содержащее в десятичной записи слишком много цифр (например, 10 ). Нам достаточно допустить возможность, как только дошло до некоторого числа п, написания и следующего за ним числа п + 1. Точно так же при изучении геометрии, пользуясь изображениями лишь конечных участков (отрезков) прямой, мы допускаем возможность неограниченного продолжения их в обе стороны или допускаем возможность безграничного деления отрезка или других фигур.