**План:**

1. **Введение**
2. **Апории Зенона**

- Ахилл и черепаха

 - Дихотомия

 - Стадий

 **III.** **Парадокс лжеца**

 **IV. Парадокс Рассела**

**I. Введение.**

Парадокс — это два противоположных, несовместимых утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. Наиболее резкая форма парадокса — *антиномия,* рассуждение, доказывающее эквивалентность двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого.

Особой известностью пользуются парадоксы в самых строгих и точных науках — математике и логике. И это не случайно.

Логика — абстрактная наука. В ней нет экспериментов, нет даже фактов в обычном смысле этого слова. Строя свои системы, логика исходит в конечном счете из анализа реального мышления. Но результаты этого анализа носят синтетический характер. Они не являются констатациями каких-либо отдельных процессов или событий, которые должна была бы объяснить теория. Такой анализ нельзя, очевидно, назвать наблюдением: наблюдается всегда конкретное явление.

Конструируя новую теорию, ученый обычно отправляется от фактов, от того, что можно наблюдать в опыте. Как бы ни была свободна его творческая фантазия, она должна считаться с одним непременным обстоятельством: теория имеет смысл только в том случае, когда она согласуется с относящимися к ней фактами. Теория, расходящаяся с фактами и наблюдениями, является надуманной и ценности не имеет.

Но если в логике нет экспериментов, нет фактов и нет самого наблюдения, то чем сдерживается логическая фантазия? Какие если не факты, то факторы принимаются во внимание при создании новых логических теорий?

Расхождение логической теории с практикой действительного мышления нередко обнаруживается в форме более или менее острого логического парадокса, а иногда даже в форме логической антиномии, говорящей о внутренней противоречивости теории. Этим как раз объясняется то значение, которое придается парадоксам в логике, и то большое внимание, которым они в ней пользуются.

Один из первых и, возможно, лучших парадоксов был записан Эвбулидом, греческим поэтом и философом, жившим на Крите в VI веке до н. э. В этом парадоксе критянин Эпименид утверждает, что все критяне  - лжецы. Если он говорит правду, то он лжет. Если он лжет, то он говорит правду. Так кто же Эпименид  - лжец или нет?

       Другой греческий философ Зенон Элейский составил серию парадоксов о бесконечности  - так называемые “апории” Зенона.

*То, что сказал Платон, есть ложь.
Сократ

Сократ говорит только правду.
Платон*

**II. Апории Зенона.**

Большой вклад в развитие теории пространства и времени, в исследование проблем движения внесли элеаты (жители города Элея в южной Италии). Философия элеатов опиралась на выдвинутую Парменидом (учителем Зенона) идею о невозможности небытия. Всякая мысль, утверждал Парменид, всегда есть мысль о существующем. Поэтому несуществующего нет. Нет и движения, так как мировое пространство заполнено все целиком, а значит, мир един, в нем нет частей. Всякое множество есть обман чувств. Из этого вытекает вывод о невозможности возникновения, уничтожения. По Пармениду ничто не возникает и не уничтожается. Этот философ был первым, кто начал доказывать выдвигаемые мыслителями положения

Элеаты доказывали свои предположения отрицанием утверждения, обратного предположению. Зенон пошел дальше своего учителя, что дало основание Аристотелю видеть в Зеноне родоначальника "диалектики"- этим термином тогда называлось искусство достигать истины в споре путем выяснения противоречий в суждении противника и путем уничтожения этих противоречий.

**Ахилл и черепаха.** Начнем рассмотрение зеноновских затруднений с апорий о движении “*Ахилл и черепаха”*. Ахилл — герой и, как бы мы сейчас сказали, выдающийся спортсмен. Черепаха, как известно, одно из самых медлительных животных. Тем не менее, Зенон утверждал, что Ахилл проиграет черепахе состязание в беге. Примем следующие условия. Пусть Ахилла отделяет от финиша расстояние 1, а черепаху — ½. Двигаться Ахилл и черепаха начинают одновременно. Пусть для определенности Ахилл бежит в 2 раза быстрее черепахи (т.е. очень медленно идет). Тогда, пробежав расстояние ½, Ахилл обнаружит, что черепаха успела за то же время преодолеть отрезок ¼ и по-прежнему находится впереди героя. Далее картина повторяется: пробежав четвертую часть пути, Ахилл увидит черепаху на одной восьмой части пути впереди себя и т. д. Следовательно, всякий раз, когда Ахилл преодолевает отделяющее его от черепахи расстояние, последняя успевает уползти от него и по-прежнему остается впереди. Таким образом, Ахилл никогда не догонит черепаху. Начав движение, Ахилл никогда не сможет его завершить.

Знающие математический анализ обычно указывают, что ряд сходится к 1. Поэтому, дескать, Ахилл преодолеет весь путь за конечный промежуток времени и, безусловно, обгонит черепаху. Но вот что пишут по данному поводу Д. Гильберт и П. Бернайс:

*“Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и, таким образом, дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить (не только физически, но хотя бы в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться”.*

Принципиальная незавершаемость данной последовательности заключается в том, что в ней отсутствует последний элемент. Всякий раз, указав очередной член последовательности, мы можем указать и следующий за ним. Интересное замечание, также указывающее на парадоксальность ситуации, встречаем у Г. Вейля:

*“Представим себе вычислительную машину, которая выполняла бы первую операцию за ½ минуты, вторую — за ¼ минуты, третью — за ⅛ минуты и т. д. Такая машина могла бы к концу первой минуты “пересчитать” весь натуральный ряд (написать, например, счетное число единиц). Ясно, что работа над конструкцией такой машины обречена на неудачу. Так почему же тело, вышедшее из точки А, достигает конца отрезка В, “отсчитав” счетное множество точек А1, А2, ..., Аn, ... ?”*

 Древние греки тем более не могли себе представить завершенную бесконечную совокупность. Поэтому вывод Зенона о том, что движение из-за необходимости “пересчитать” бесконечное число точек не может закончиться, еще тогда произвел большое впечатление. На схожих аргументах основывается апория о невозможности начать движение.

***Дихотомия*.** Рассуждение очень простое. Для того, чтобы пройти весь путь, движущееся тело сначала должно пройти половину пути, но чтобы преодолеть эту половину, надо пройти половину половины и т. д. до бесконечности. Иными словами, при тех же условиях, что и в предыдущем случае, мы будем иметь дело с перевернутым рядом точек: (½)n, ..., (½)3, (½)2, (½)1. Если в случае апории *Ахилл и черепаха* соответствующий ряд не имел последней точки, то в *Дихотомии* этот ряд не имеет первой точки. Следовательно, заключает Зенон, движение не может начаться. А поскольку движение не только не может закончиться, но и не может начаться, движения нет. Существует легенда, о которой вспоминает А. С. Пушкин в стихотворении «Движение»:

*Движенья нет, сказал мудрец брадатый.*

*Другой смолчал и стал пред ним ходить.*

*Сильнее бы не мог он возразить;*

*Хвалили все ответ замысловатый.*

*Но, господа, забавный случай сей*

*Другой пример на память мне приводит:*

*Ведь каждый день пред нами солнце ходит,*

*Однако ж прав упрямый Галилей.*

Действительно, согласно легенде, один из философов так и “возразил” Зенону. Зенон велел бить его палками: ведь он не собирался отрицать чувственное восприятие движения. Он говорил о его *немыслимости*, о том, что строгое размышление о движении приводит к неразрешимым противоречиям. Поэтому, если мы хотим избавиться от апорий в надежде, что это вообще возможно (а Зенон как раз считал, что невозможно), то мы должны прибегать к теоретическим аргументам, а не ссылаться на чувственную очевидность. Рассмотрим одно любопытное теоретическое возражение, которое было выдвинуто против апории *Ахилл и черепаха*.

 *“Представим себе, что по дороге в одном направлении движутся быстроногий Ахилл и две черепахи, из которых Черепаха-1 несколько ближе к Ахиллу, чем Черепаха-2. Чтобы показать, что Ахилл не сможет перегнать Черепаху-1, рассуждаем следующим образом. За то время, как Ахилл пробежит разделяющее их вначале расстояние, Черепаха-1 успеет уползти несколько вперед, пока Ахилл будет пробегать этот новый отрезок, она опять-таки продвинется дальше, и такое положение будет бесконечно повторяться. Ахилл будет все ближе и ближе приближаться к Черепахе-1, но никогда не сможет ее перегнать. Такой вывод, конечно же, противоречит нашему опыту, но логического противоречия у нас пока нет.*

*Пусть, однако, Ахилл примется догонять более дальнюю Черепаху-2, не обращая никакого внимания на ближнюю. Тот же способ рассуждения позволяет утверждать, что Ахилл сумеет вплотную приблизиться к Черепахе-2, но это означает, что он перегонит Черепаху-1. Теперь мы приходим уже к логическому противоречию”.*

Здесь трудно что-либо возразить, если оставаться в плену образных представлений. Необходимо выявить формальную суть дела, что позволит перевести дискуссию в русло строгих рассуждений. Первую апорию можно свести к следующим трем утверждениям:

 1. Каков бы ни был отрезок [A B], движущееся от А к В тело должно побывать во всех точках отрезка [A B].

2. Любой отрезок [A B] можно представить в виде бесконечной последовательности убывающих по длине отрезков [A a1] [a1 a2] [a2 a3] ... [an an+1].

3. Поскольку бесконечная последовательность аi (1 ≤ i < ω) не имеет последней точки, невозможно завершить движение, побывав в каждой точке этой последовательности.

Проиллюстрировать полученный вывод можно по-разному. Наиболее известная иллюстрация — “самое быстрое никогда не сможет догнать самое медленное” — была рассмотрена выше. Но можно предложить более радикальную картину, в которой обливающийся потом Ахилл (вышедший из пункта А) безуспешно пытается настичь черепаху, преспокойно греющуюся на Солнце (в пункте В) и даже не думающую убегать. Суть апории от этого не меняется. Иллюстрацией тогда станет куда более острое высказывание — “самое быстрое никогда не сможет догнать неподвижное”. Если первая иллюстрация парадоксальна, то вторая — тем более.

При этом нигде не утверждается, что убывающие последовательности отрезков ai для [A B] и ai' для [A' B'] должны быть одинаковы. Напротив, если отрезки [A B] и [A' B'] неравны по длине между собой, их разбиения на бесконечные последовательности убывающих отрезков окажутся различными. В приведенном рассуждении Ахилла отделяет от черепах 1 и 2 разные расстояния. Поэтому мы имеем два различных отрезка [A B1] и [A B] с общей начальной точкой А. Неравные отрезки [A B1] и [A B] порождают различные бесконечные последовательности точек, и недопустимо использовать одну из них вместо другой. Между тем именно эта “незаконная” операция применяется в аргументах о двух черепахам.

Если не смешивать иллюстрации и существо апории, то можно утверждать, что апории *Ахилл* и *Дихотомия* симметричны по отношению к друг другу. В самом деле, *Дихотомия* также водится к следующим трем утверждениям:

1.  Каков бы ни был отрезок [A B], движущееся от А к В тело должно побывать во всех точках отрезка [A B].

2. Любой отрезок [A B] можно представить в виде бесконечной последовательности убывающих по длине отрезков [bn+1 bn] ... [b3 b2] [b2 b1] ... [b1 B].

3. Поскольку бесконечная последовательность bi не имеет первой точки, невозможно побывать в каждой из точек этой последовательности.

Таким образом, апория *Ахилл* основывается на тезисе о невозможности завершить движение из-за необходимости посетить последовательно каждую из точек бесконечного ряда, упорядоченного по типу ω (т. е. по типу порядка на натуральных числах), который не имеет последнего элемента. В свою очередь *Дихотомия* утверждает невозможность начала движения из-за наличия бесконечного ряда точек, упорядоченных по типу ω\* (так упорядочены целые отрицательные числа), который не имеет первого элемента.

Проанализировав более тщательно две приведенные апории, мы обнаружим, что обе они опираются на допущение о *непрерывности* пространства и времени в смысле их *бесконечной делимости*. Такое допущение непрерывности отличается от современного, но имело место в древности. Без допущения тезиса о том, что любой пространственный или временной интервал можно разделить на меньшие по длине интервалы, обе апории рушатся. Зенон прекрасно это понимал. Поэтому он приводит аргумент, исходящий из принятия допущения о *дискретности* пространства и времени, т. е. допущения о существовании элементарных, далее неделимых, длин и времен.

***Стадий*.** Итак, допустим существование неделимых отрезков пространства и интервалов времени. Рассмотрим следующую схему, на которой каждая клетка таблицы представляет неделимый блок пространства. Имеется три ряда объектов А, В и С, занимающих по три блока пространства, причем первый ряд остается неподвижным, а ряды В и С начинают *одновременное* движение в направлении, указанном стрелками:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|   | A1 | A2 | A3 |   |
| В3 | В2 | В1 |   | → |
| ← |   | С1 | С2 | С3 |

 Начальное положение

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|   | А1 | А2 | А3 |   |
|   | В3 | В2 | В1 |   |
|   | С1 | С2 | С3 |   |

 Конечное положение

Ряд С, утверждает Зенон, за неделимым момент времени прошел одно неделимое место неподвижного ряда А (место А1). Однако за то же самое время ряд С прошел два места ряда В (блоки В2 и В3). Согласно Зенону, это противоречиво, т. к. должен был встретиться момент прохождения блока В2, изображенный на следующей схеме:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |
|   | В3 | В2 | В1 |   |
|   |   | С1 | С2 | С3 |

 Промежуточное положение

Но где в это промежуточное положение находился ряд А ? Для него просто не остается соответствующего места. Остается либо признать, что движения нет, либо согласиться с тем, что ряд А делим не на три, а на большее количество мест. Но в последнем случае мы вновь возвращаемся к допущению о бесконечной делимости пространства и времени, снова попадая в тупик апорий *Дихотомия* и *Ахилл*. При любом исходе движение оказывается невозможным.

Основная мысль апорий Зенона Элейского состоит в том, что дискретность, множественность и движение характеризуют лишь чувственную картину мира, но она заведомо недостоверна. Истинная картина мира постигается только мышлением и теоретическим исследованием.

Если не вникать в глубину апорий, можно относиться к ним свысока и удивляться, как это Зенон не додумался до очевидных вещей. Но о Зеноне не перестают спорить, а история науки показывает, что если о чем-то долго спорят, то это, как правило, не зря. Несомненно, размышления над апориями помогли создать математический анализ, сыграли определенную роль в физической революции ХХ века и, вполне возможно, что в физике XXI столетия их значение будет еще более существенным.

**III. Парадокс лжеца.**

Уже почти две с половиной тысячи лет одной из логических загадок, мучающих людей, пытающихся гармонизировать основания своего мышления, является «парадокс лжеца». Несмотря на то, что в настоящее время известны десятки семантических, логических и математических парадоксов и апорий, «парадокс лжеца» занимает особое место:

- во-первых, он является наиболее доступным из множества парадоксов и, в силу этого, наиболее известным из них.

- во-вторых, он первичен по отношению ко многим другим парадоксам и, следовательно, последние неустранимы, пока не разрешен «парадокс лжеца».

Простейшим вариантом парадокса лжеца является высказывание “Я лгу”. Если высказывание ложно, то говорящий сказал правду, и значит, сказанное им не является ложью. Если же высказывание не является ложным, а говорящий утверждает, что оно ложно, то это его высказывание ложно. Оказывается, таким образом, что, если говорящий лжет, он говорит правду, и наоборот.

«Парадокс лжеца» имеет и ряд других похожих друг на друга формулировок. Ниже приведены лишь некоторые из них:

 - «Все критяне – лжецы» (тезис, высказанный критянином Эпименидом);

 - «Я высказываю сейчас ложное предложение»;

 - «Все, что X утверждает в промежуток времени Р – ложь»;

 - «Это утверждение ложно»;

 - «Это утверждение не принадлежит к классу истинных высказываний”.

Хотя приведенный список далеко не полон, он дает некоторое представление о сути проблемы. Логическая проблема состоит в том, что предположение о ложности приведенных высказываний ведет к их истинности и наоборот.

Древних греков очень занимало, каким образом, казалось бы, вполне осмысленное утверждение не может быть ни истинным, ни ложным без того, чтобы при этом не возникло противоречия. Философ Хризипп написал шесть трактатов о парадоксе лжеца, ни один из которых не сохранился до нашего времени. Ходит легенда, что некий Филит Косский, отчаявшись разрешить этот парадокс, покончил с собой. Говорят также, что один из известных древнегреческих логиков, Диодор Кронос, уже на склоне лет дал обет не принимать пищу до тех пор, пока не найдет решение «Лжеца», и вскоре умер, так ничего и не добившись.

В средние века этот парадокс был отнесен к так называемым неразрешимым предложениям и сделался объектом систематического анализа. Теперь «Лжец» — этот типичный бывший софизм — нередко именуется королем логических парадоксов. Ему посвящена обширная научная литература. И тем не менее, как и в случае многих других парадоксов, остается не вполне ясным, какие именно проблемы скрываются за ним и как следует избавляться от него.

Рассмотрим первую формулировку: приписываемое Эпимениду утверждение логически противоречиво, если предположить, что лжецы всегда лгут, а нелжецы всегда говорят правду. При таком предположении утверждение "Все критяне лжецы" не может быть истинным, ибо тогда Эпименид был бы лжецом и, следовательно, то, что он утверждает, было бы ложью. Но это утверждение не может быть и ложным, ибо это означало бы, что критяне говорят только правду и, следовательно, то, что сказал Эпименид, также истинно.

История логики знает множество попыток и подходов к разрешению данного парадокса. Одна из первых - попытка представления "парадокса лжеца" в качестве софизма. Суть такого представления в том, что в реальной жизни ни один лгун не говорит только ложь. Следовательно, парадокс - софизм, основанный на ложной посылке.

Но такое объяснение приемлемо лишь для первой (ранней) формулировки парадокса, но не "снимает" парадокс в его более точных современных формулировках. Существует несколько решений парадокса лжеца в его современной формулировке. Какое из решений правильное? Все правильны. Как такое может быть? Потому, что парадокс - это рассуждение, ведущее к противоречию. Избавиться от противоречия можно разными способами. Все они сводятся к замене некоторого сомнительного кусочка рассуждений на более правильный. В результате получается рассуждение, аналогичное прежнему, но без видимых противоречий. Кроме того, различные решения приводятся через разные виды логик.

Заменять можно разные кусочки. В каждом случае получатся различные решения, а какое из них предпочесть - дело вкуса. Одному самым сомнительным кажется один кусочек, другому - другой. Иногда самый первый сомнительный кусочек заметен и очевиден.

Пожалуй, самым распространенным вариантом решения парадокса лжеца является разделение языка и метаязыка:

Сейчас «Лжец» обычно считается характерным примером тех трудностей, к которым ведет смешение двух языков: языка, на котором говорится о лежащей вне его действительности, и языка, на котором говорят о самом первом языке.

В повседневном языке нет различия между этими уровнями: и о действительности, и о языке мы говорим на одном и том же языке. Например, человек, родным языком которого является русский язык, не видит никакой особой разницы между утверждениями: «Стекло прозрачно» и «Верно, что стекло прозрачно», хотя одно из них говорит о стекле, а другое — о высказывании относительно стекла.

Если бы у кого-то возникла мысль о необходимости говорить о мире на одном языке, а о свойствах этого языка — на другом, он мог бы воспользоваться двумя разными существующими языками, допустим русским и английским. Вместо того, чтобы просто сказать: «Корова — это существительное», сказал бы «Корова is a noun», а вместо: «Утверждение «Стекло не прозрачно» - ложно» произнес бы «The assertion «Стекло не прозрачно» is false». При таком использовании двух разных языков сказанное о мире ясно отличалось бы от сказанного о языке, с помощью которого говорят о мире. В самом деле, первые высказывания относились бы к русскому языку, в то время как вторые — к английскому.

Если бы далее нашему знатоку языков захотелось высказаться по поводу каких-то обстоятельств, касающихся уже английского языка, он мог бы воспользоваться еще одним языком. Допустим немецким. Для разговора об этом последнем можно было бы прибегнуть, положим, к испанскому языку и т.д.

Получается, таким образом, своеобразная лесенка, или иерархия, языков, каждый из которых используется для вполне определенной цели: на первом говорят о предметном мире, на втором — об этом первом языке, на третьем — о втором языке и т.д. Такое разграничение языков по области их применения — редкое явление в обычной жизни. Но в науках, специально занимающихся, подобно логике, языками, оно иногда оказывается весьма полезным. Язык, на котором рассуждают о мире, обычно называют *предметным языком.* Язык, используемый для описания предметного языка, именуют *метаязыком.*

Ясно, что, если язык и метаязык разграничиваются указанным образом, утверждение «Я лгу» уже не может быть сформулировано. Оно говорит о ложности того, что сказано на русском языке, и, значит, относится к метаязыку и должно быть высказано на английском языке. Конкретно оно должно звучать так: «Everything I speak in Russian is false» («Все сказанное мной по-русски ложно»); в этом английском утверждении ничего не говорится о нем самом, и никакого парадокса не возникает.

Различение языка и метаязыка позволяет устранить парадокс «Лжеца». Тем самым появляется возможность корректно, без противоречия определить классическое понятие истины: истинным является высказывание, соответствующее описываемой им действительности.

Понятие истины, как и все иные семантические понятия, имеет относительный характер: оно всегда может быть отнесено к определенному языку.

Как показал польский логик АТарский, классическое определение истины должно формулироваться в языке более широком, чем тот язык, для которого оно предназначено. Иными словами, если мы хотим указать, что означает оборот «высказывание, истинное в данном языке», нужно, помимо выражений этого языка, пользоваться также выражениями, которых в нем нет.

Тарский ввел понятие *семантически замкнутого языка.* Такой язык включает, помимо своих выражений, их имена, а также, что важно подчеркнуть, высказывания об истинности формулируемых в нем предложений. Границы между языком и метаязыком в семантически замкнутом языке не существует. Средства его настолько богаты, что позволяют не только что-то утверждать о внеязыковой реальности, но и оценивать истинность таких утверждений. Этих средств достаточно, в частности, для того, чтобы воспроизвести в языке антиномию «Лжец». Семантически замкнутый язык оказывается, таким образом, внутренне противоречивым. Каждый естественный язык является, очевидно, семантически замкнутым.

Единственно приемлемый путь для устранения антиномии, а значит, и внутренней противоречивости, согласно Тарскому, — отказ от употребления семантически замкнутого языка. Этот путь приемлем, конечно, только в случае искусственных, формализованных языков, допускающих ясное подразделение на язык и метаязык. В естественных же языках с их неясной структурой и возможностью говорить обо всем на одном и том же языке такой подход не очень реален. Ставить вопрос о внутренней непротиворечивости этих языков не имеет смысла. Их богатые выразительные возможности имеют и свою обратную сторону — парадоксы.

Существуют и другие решения парадокса лжеца, например, решение Оккама и решение Буридана:

Итак, существуют высказывания, говорящие о своей собственной истинности или ложности. Идея, что такого рода высказывания не являются осмысленными, очень стара. Ее отстаивал еще древнегреческий логик Хрисипп. В средние века английский философ и логик У. Оккам заявлял, что утверждение «Всякое высказывание ложно» бессмысленно, поскольку оно говорит в числе прочего и о своей собственной ложности. Из этого утверждения прямо следует противоречие. Если всякое высказывание ложно, то это относится и к самому данному утверждению; но то, что оно ложно, означает, что не всякое высказывание является ложным. Аналогично обстоит дело и с утверждением «Всякое высказывание истинно». Оно также должно быть отнесено к бессмысленным и также ведет к противоречию: если каждое высказывание истинно, то истинным является и отрицание самого этого высказывания, то есть высказывание, что не всякое высказывание истинно.

Почему, однако, высказывание не может осмысленно говорить о своей собственной истинности или ложности? Уже современник Оккама, французский философ XIV в. Ж. Буридан, не был согласен с его решением. С точки зрения обычных представлений о бессмысленности, выражения типа «Я лгу», «Всякое высказывание истинно (ложно)» и т.п. вполне осмысленны. О чем можно подумать, о том можно высказаться, — таков общий принцип Буридана. Человек может думать об истинности утверждения, которое он произносит, значит, он может и высказаться об этом. Не все утверждения, говорящие о самих себе, относятся к бессмысленным. Например, утверждение «Это предложение написано по-русски» является истинным, а утверждение «В этом предложении десять слов» ложно. И оба они совершенно осмысленны. Если допускается, что утверждение может говорить и о самом себе, то почему оно не способно со смыслом говорить и о таком своем свойстве, как истинность?

Сам Буридан считал высказывание «Я лгу» не бессмысленным, а ложным. Он обосновывал это так. Когда человек утверждает какое-то предложение, он утверждает тем самым, что оно истинно. Если же предложение говорит о себе, что оно само является ложным, то оно представляет собой только сокращенную формулировку более сложного выражения, утверждающего одновременно и свою истинность, и свою ложность. Это выражение противоречиво и, следовательно, ложно. Но оно никак не бессмысленно.

Аргументация Буридана и сейчас иногда считается убедительной.

Имеются и другие направления критики того решения парадокса «Лжец», которое было в деталях развито Тарским. Действительно ли в семантически замкнутых языках — а таковы ведь все естественные языки — нет никакого противоядия против парадоксов этого типа?

Если бы это было так, то понятие истины можно было бы определить строгим образом только в формализованных языках. Только в них удается разграничить предметный язык, на котором рассуждают об окружающем мире, и метаязык, на котором говорят об этом языке. Эта иерархия языков строится по образцу усвоения иностранного языка с помощью родного. Изучение такой иерархии привело ко многим интересным выводам, и в определенных случаях она существенна. Но ее нет в естественном языке. Дискредитирует ли это его? И если да, то в какой именно мере? Ведь в нем понятие истины все-таки употребляется, и обычно без всяких осложнений. Является ли введение иерархии единственным способом исключения парадоксов, подобных «Лжецу?»

В 30-е годы ответы на эти вопросы представлялись несомненно утвердительными. Однако сейчас былого единодушия уже нет, хотя традиция устранять парадоксы данного типа путем «расслаивания» языка остается господствующей.

В последнее время все больше внимания привлекают *эгоцентрические выражения.* В них встречаются слова, подобные «я», «это», «здесь», «теперь», и их истинность зависит от того, когда, кем, где они употребляются. В утверждении «Это высказывание является ложным» встречается слово «это». К какому именно объекту оно относится? «Лжец» может говорить о том, что слово «это» не относится к смыслу данного утверждения. Но тогда к чему оно относится, что обозначает? И почему данный смысл не может быть все-таки обозначен словом «это»?

Не вдаваясь в детали, стоит отметить только, что в контексте анализа эгоцентрических выражений «Лжец» наполняется совершенно иным содержанием, чем ранее. Оказывается, он уже не предостерегает от смешения языка и метаязыка, а указывает на опасности, связанные с неправильным употреблением слова «это» и подобных ему эгоцентрических слов.

Проблемы, связывавшие на протяжении веков с «Лжецом», радикально менялись в зависимости от того, рассматривался ли он как пример двусмысленности, или же как выражение, внешне представляющееся как образец смешения языка и метаязыка, или же, наконец, как типичный пример неверного употребления эгоцентрических выражений. И нет уверенности в том, что с этим парадоксом не окажутся связанными в будущем и другие проблемы.

Известный современный финский логик и философ Г. фон Вригт писал в своей работе, посвященной «Лжецу», что данный парадокс ни в коем случае не должен пониматься как локальное, изолированное препятствие, устранимое одним изобретательным движением мысли. «Лжец» затрагивает многие наиболее важные темы логики и семантики. Это и определение истины, и истолкование противоречия и доказательства, и целая серия важных различий: между предложением и выражаемой им мыслью, между употреблением выражения и его упоминанием, между смыслом имени и обозначаемым им объектом.

"Парадокс лжеца" (как это ни удивительно), крайне близок по своей логической форме и характеру логической ошибки многим другим "парадоксам", которые принято считать вполне самостоятельными. К их числу относится и знаменитый "парадокс Рассела".

**III. Парадокс Рассела**

Самым знаменитым из открытых уже в прошлом веке парадоксов является антиномия, обнаруженная Б. Расселом и сообщенная им в письме к Г. Ферге. Рассел открыл свой парадокс, относящийся к области логики и математики, в 1902г. Эту же антиномию обсуждали одновременно в Геттингене немецкие математики 3. Цермело (1871— 1953) и Д. Гильберт. Идея носилась в воздухе, и ее опубликование произвело впечатление разорвавшейся бомбы. Этот парадокс вызвал в математике, по мнению Гильберта, эффект полной катастрофы. Нависла угроза над самыми простыми и важными логическими методами, самыми обыкновенными и полезными понятиями. Оказалось, что в теории множеств Кантора, которая с восторгом была принята большинством математиков, имеются странные противоречия, от которых невозможно, или, по крайней мере, очень трудно, избавиться. Парадокс Рассела (точнее, Рассела — Цермело) особенно ярко выявил эти противоречия. Над его разрешением, так же, как и над разрешением других найденных парадоксов канторовской теории множеств, трудились самые выдающиеся математики тех лет.

Сразу же стало очевидным, что ни в логике, ни в математике за всю долгую историю их существования не было выработано решительно ничего, что могло бы послужить основой для устранения антиномии. Явно оказался необходимым отход от привычных способов мышления. Но из какого места и в каком направлении? Насколько радикальным должен был стать отказ от устоявшихся способов теоретизирования? С дальнейшим исследованием антиномии убеждение в необходимости принципиально нового подхода неуклонно росло. Спустя полвека после ее открытия специалисты по основаниям логики и математики Л. Френкель и И.Бар-Хиллел уже без всяких оговорок утверждали: «Мы полагаем, что любые попытки выйти из положения с помощью традиционных (то есть имевших хождение до XX столетия) способов мышления, до сих пор неизменно проваливавшихся, заведомо недостаточны для этой цели». Современный американский логик X. Карри писал немного позднее об этом парадоксе: «В терминах логики, известной в XIX в., положение просто не поддавалось объяснению, хотя, конечно, в наш образованный век могут найтись люди, которые увидят (или подумают, что увидят), в чем же состоит ошибка».

Парадокс Рассела в первоначальной его форме связан с понятием множества, или класса. Можно говорить о множествах различных объектов, например, о множестве всех людей или о множестве натуральных чисел. Элементом первого множества будет всякий отдельный человек, элементом второго — каждое натуральное число. Допустимо также сами множества рассматривать как некоторые объекты и говорить о множествах множеств. Можно ввести даже такие понятия, как множество всех множеств или множество всех понятий. Относительно любого произвольно взятого множества представляется осмысленным спросить, является оно своим собственным элементом или нет. Множества, не содержащие себя в качестве элемента, назовем обычными. Например, множество всех людей не является человеком, так же как множество атомов — это не атом. Необычными будут множества, являющиеся собственными элементами. Например, множество, объединяющее все множества, представляет собой множество и, значит, содержит само себя в качестве элемента.

Рассмотрим теперь множество всех обычных множеств. Поскольку оно множество, о нем тоже можно спрашивать, обычное оно или необычное. Ответ, однако, оказывается обескураживающим. Если оно обычное, то, согласно своему определению, должно содержать само себя в качестве элемента, поскольку содержит все обычные множества. Но это означает, что оно является необычным множеством. Допущение, что наше множество представляет собой обычное множество, приводит, таким образом, к противоречию. Значит, оно не может быть обычным. С другой стороны, оно не может быть также необычным: необычное множество содержит само себя в качестве элемента, а элементами нашего множества являются только обычные множества. В итоге приходим к заключению, что множество всех обычных множеств не может быть ни обычным, ни необычным множеством.

Итак, множество всех множеств, не являющихся собственными элементами, есть свой элемент в том и только том случае, когда оно не является таким элементом. Это явное противоречие. И получено оно на основе самых правдоподобных предположений и с помощью бесспорных как будто шагов. Противоречие говорит о том, что такого множества просто не существует. Но почему оно не может существовать? Ведь оно состоит из объектов, удовлетворяющих четко определенному условию, причем само условие не кажется каким-то исключительным или неясным. Если столь просто и ясно заданное множество не может существовать, то в чем, собственно, заключается различие между возможными и невозможными множествами? Вывод о не существовании рассматриваемого множества звучит неожиданно и внушает беспокойство. Он делает наше общее понятие множества аморфным и хаотичным, и нет гарантии, что оно не способно породить какие-то новые парадоксы.

Парадокс Рассела замечателен своей крайней общностью. Для его построения не нужны какие-либо сложные технические понятия, как в случае некоторых других парадоксов, достаточно понятий «множество» и «элемент множества». Но эта простота как раз и говорит о его фундаментальности: он затрагивает самые глубокие основания наших рассуждений о множествах, поскольку говорит не о каких-то специальных случаях, а о множествах вообще.

Другие варианты парадокса Парадокс Рассела не имеет специфически математического характера. В нем используется понятие множества, но не затрагиваются какие-то особые, связанные именно с математикой его свойства.

Это становится очевидным, если переформулировать парадокс в чисто логических терминах. О каждом свойстве можно, по всей вероятности, спрашивать, приложимо оно к самому себе или нет. Свойство быть горячим, например, неприложимо к самому себе, поскольку само не является горячим; свойство быть конкретным тоже не относится к самому себе, ибо это абстрактное свойство. Но вот свойство быть абстрактным, являясь абстрактным, приложимо к самому себе. Назовем эти неприменимые к самим себе свойства неприложимыми. Применимо ли свойство быть неприложимым к самому себе? Оказывается, не приложимость является неприложимой только в том случае, если она не является таковой. Это, конечно, парадоксально. Логическая, касающаяся свойств разновидность антиномии Рассела, столь же парадоксальна, как и математическая, относящаяся к множествам, ее разновидность.

Рассел предложил также следующий популярный вариант открытого им парадокса. Представим, что совет одной деревни так определил обязанности брадобрея: брить всех мужчин деревни, которые не бреются сами, и только этих мужчин. Должен ли он брить самого себя? Если да, то он будет относиться к тем, кто бреется сам, а тех, кто бреется сам, он не должен брить. Если нет, он будет принадлежать к тем, кто не бреется сам, и, значит, он должен будет брить себя. Мы приходим, таким образом, к заключению, что этот брадобрей бреет себя в том и только том случае, когда он не бреет себя. Это, разумеется, невозможно.

Рассуждение о брадобрее опирается на допущение, что такой брадобрей существует. Полученное противоречие означает, что это допущение ложно, и нет такого жителя деревни, который брил бы всех тех и только тех ее жителей, которые не бреются сами. Обязанности брадобрея не кажутся на первый взгляд противоречивыми, поэтому вывод, что его не может быть, звучит несколько неожиданно. Но этот вывод не является все-таки парадоксальным. Условие, которому должен удовлетворять деревенский брадобрей, на самом деле внутренне противоречиво и, следовательно, невыполнимо. Подобного парикмахера не может быть в деревне по той же причине, по какой в ней нет человека, который был бы старше самого себя или который родился бы до своего рождения.

Рассуждение о брадобрее может быть названо псевдопарадоксом. По своему ходу оно строго аналогично парадоксу Рассела и этим интересно. Но оно все-таки не является подлинным парадоксом.

Другой пример такого же псевдопарадокса представляет собой известное рассуждение о каталоге. Некая библиотека решила составить библиографический каталог, в который входили бы все те и только те библиографические каталоги, которые не содержат ссылки на самих себя. Должен ли такой каталог включать ссылку на себя? Нетрудно показать, что идея создания такого каталога неосуществима; он просто не может существовать, поскольку должен одновременно и включать ссылку на себя и не включать.

Интересно отметить, что составление каталога всех каталогов, не содержащих ссылки на самих себя, можно представить как бесконечный, никогда не завершающийся процесс. Допустим, что в какой-то момент был составлен каталог, скажем К1, включающий, все отличные от него каталоги, не содержащие ссылки на себя. С созданием К1 появился еще один каталог, не содержащий ссылки на себя. Так как задача заключается в том, чтобы составить полный каталог всех каталогов, не упоминающих себя, то очевидно, что К1 не является ее решением. Он не упоминает один из таких каталогов — самого себя. Включив в К1 это упоминание о нем самом, получим каталог К2. В нем упоминается К1, но не сам К2. Добавив к К2 такое упоминание, получим КЗ, который опять-таки не полон из-за того, что не упоминает самого себя. И далее без конца.

Можно упомянуть еще один логический парадокс — "парадокс голландских мэров", сходный с парадоксом брадобрея. Каждый муниципалитет в Голландии должен иметь мэра, и два разных муниципалитета не могут иметь одного и того же мэра. Иногда оказывается, что мэр не проживает в своем муниципалитете. Допустим, что издан закон, согласно которому некоторая территория *S* выделяется исключительно для таких мэров, которые не живут в своих муниципалитетах, и предписывающий всем этим мэрам поселиться на этой территории. Допустим, далее, что этих мэров оказалось столько, что территория *S* сама образует отдельный муниципалитет. Где должен проживать мэр этого Особого Муниципалитета S? Простое рассуждение показывает, что если мэр Особого Муниципалитета проживает на территории S, то он не должен проживать там, и наоборот, если он не проживает на территории, то он как раз и должен жить на этой территории. То, что этот парадокс аналогичен парадоксу брадобрея, совершенно очевидно.

Рассел одним из первых предложил вариант решения “своего” парадокса. Предложенное им решение, получило название "теории типов": множество (класс) и его элементы относятся к различным логическим типам, тип множества выше типа его элементов, что устраняет парадокс Рассела (теория типов был использована Расселом и для решения знаменитого парадокса "Лжец"). Многие математики, однако, не приняли расселовское решение, считая, что оно накладывает слишком жесткие ограничения на математические утверждения.

Аналогично обстоит дело и с другими логическими парадоксами. «Антиномии логики, — пишет фон Вригг, — озадачили с момента своего открытия и, вероятно, будут озадачивать нас всегда. Мы должны, я думаю, рассматривать их не столько как проблемы, ожидающие решения, сколько как неисчерпаемый сырой материал для размышления. Они важны, поскольку размышление о них затрагивает наиболее фундаментальные вопросы всей логики, а значит, и всего мышления».

**Список используемой литературы:**

1 Френкель А.А., Бар-Хиллел И. “Основания теории множеств”

2. *B.Russell.* “Introduction to mathematical philosophy”.

3. Russell B. “The principles of mathematics”.

4. Задоя А.И. “Введение в логику”

5. Гильберт Д. - Аккерман В., “Основы теоретической логики”.

6. Лакофф Дж. “Прагматика в естественной логике. Новое в лингвистике”.

7. Якобсон Р. “Взгляды Боаса на грамматическое значение.”