**Конспекты лекций по математической логике.**

1. **Теория алгоритмов**

*1.1 Различные подходы к определению алгоритма:*

10. Неформальное понятие алгоритма (последовательность инструкций для выполнения действия).

20. Машина с неограниченными регистрами (МНР).

30 Машина Тьюринга – Поста (МТ-П).

40 Нормальные алгоритмы Маркова (НАМ).

 *1.1.1 Машина с неограниченными регистрами (МНР).*

Имеется некое устройство, в котором счетное число ячеек памяти (регистров), в которых хранятся целые числа.

Допустимые команды:

 *Z(n)* - обнуление регистра *Rn*.

 *S(n)* - увеличение числа в регистре *Rn*на 1.

 *T(m,n)* - копирует содержимое *Rm* в регистор Rn.

 *I(p,q,n)* - если содержимое *Rp = Rq* то выполняется команда с номером *n* , если нет

 следующая.

 Программа для МНР должна быть последовательностью команд Z, S, T, I с определенным порядком, выполняемые последовательно.

 *Тезис Черча (Churcha)*: Первое и второе определение алгоритма эквивалентны между собой. Любой неформальный алгоритм может быть представлен в программе для МНР.

 *1.1.2 Машина Тьюринга - Поста.*

Имеется устройство просматривающее бесконечную ленту, где есть ячейки содержащие элементы алфавита: , где - пустой символ (пустое слово), который может принадлежать и не принадлежать *А*. Также существует управляющая головка (устройство) (УУ)/(УГ), которая в начальный момент расположена в определенном месте, в состоянии . Также существуют внутренние состояния машины:

Слово в данном алфавите - любая конечная упорядоченная последовательность букв данного алфавита, притом длина слова это количество букв в нем (у пустого слова длина 0).

Допустимые команды:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) ,где .2) (остановка программы). | Последовательность команд называется программой, если в этой последовательности не встречается команд с одинаковыми левыми частями. Машина останавливается если она не находит команды с левой частью подобной текущей. |

 *1.1.3 Нормальные алгоритмы Маркова.*

Тип машины перерабатывающий слова, в которой существует некий алфавит , для которого W - множество всех слов.

Допустимые команды: (Для машин этого типа важна последовательность команд.)

|  |  |
| --- | --- |
|  где  | *Пример:* *Программа:*  |

 *1.1.4 Реализация функции натурального переменного.*

 но мы допускаем не всюду определенную функцию.

 то это означает, что

притом , если *f* не определена, то и программа не должна ничего выдавать.



притом , если *f* не определена, то и программа не должна ничего выдавать.

( , а числа представляются в виде ,например .)

*1.2 Эквивалентность трех подходов к понятию алгоритм.*

*1.2.1 Теорема об эквивалентности понятия вычислимой функции.*

 вычислима: ()

1. Если существует программа МНР, которая вычисляет эту функцию.
2. Если существует программа МТ-П, которая вычисляет эту функцию.
3. Если существует программа НАМ, которая вычисляет эту функцию.

Использование НАМ:



Теор.: Классы функций вычислимых на МТ-П, с помощью НАМ и с помощью МНР совпадают.

 Пусть которая вычисляется на МТ-П, вычислим её на НАМ.


# МТ-П:

**НАМ:**

Команда МТП: преобразуется по правилам:

Команда МТП:

**2. Булевы функции.**

*2.1 Основные определения*

*2.1.1 Декартово произведение*

 - мн-во всевозможных упорядоченных пар элементов из А и В.

Пример:



*2.1.2 Декартова степень произвольного множества.*

Опр: - множество всевозможных упорядоченных наборов длины n , элементов множества А.

*2.1.3 Определение булевой функции от n переменных.*

Любое отображение - называется булевой функцией от n переменных, притом множество

*2.1.4 Примеры булевой функции.*

1. логическая сумма (дизъюнкция).

1. логическое умножение (конъюнкция).

1. сложение по модулю два.

1. логическое следствие (импликация).

1. отрицание.

*2.1.5 Основные булевы тождества.*

1. (ассоциативность)

1. (коммутативность)

1. (свойство нуля)

1. (закон поглощения для 1)

1. (ассоциативность)

1. (коммутативность)

1. (свойство нуля по умножению)

1. (свойство нейтральности 1 по умножению)

1. (дистрибутивность)

1. (дистрибутивность 2)

1. (закон поглощения)

1. ( Законы

1. де Моргана)

1. (закон снятия двойного отрицания)

1. (tertium non datur – третьего не дано)

1. (ассоциативность)

1. (Свойства

1. идемпотентности)

*2.2 Дизъюнктивные нормальные формы.*

*2.2.1 Основные определения.*

 - конечный алфавит из переменных.

Рассмотрим слово:

Экспоненциальные обозначения:

 - элемент конъюнкции.

S – длина элемента конъюнкции.

**ДНФ** – дизъюнкция нескольких различных элементарных конъюнкций.

Любая булева функция может быть представлена как ДНФ

*2.2.2 Теорема о совершенной ДНФ.*

Любая булева функция тождественно не равная 0 может быть разложена в ДНФ следующего вида:

Опр: Носитель булевой функции

.

Лемма:

1. это элементарно

1. возьмем набор

а)

б)

Доказательство: , будем доказывать, что.

1. Докажем, что . Возьмем он попадает в число суммируемых наборов и по нему будет проводиться сумирование.

1. Докажем, что . Возьмем другой набор из

Следовательно

*2.2.3 Некоторые другие виды ДНФ.*

Опр: - называется *минимальной ДНФ*, если она имеет - наименьшую возможную длину из всех ДНФ данной функции.

Опр: - называется *тупиковой ДНФ*, если из неё нельзя выбросить ни одного слагаемого с сохранением булевой функции.

*(Легко понять, что любая минимальная ДНФ является тупиковой, а обратное не верно.)*

Опр: *К-мерной гранью* называется такое подмножество , которая является носителем некоторой элементарной конъюнкции длины: n-k.

Опр: Предположим дана функция и есть . Грань называется *отмеченной*, если она целиком содержится в носителе *Т*.

Опр: *Максимальная грань* – это такая грань, которая не содержится ни в какой грани более высокой размерности.

Предложение: Любую отмеченную грань можно вложить в максимальную грань.

Предложение:

(Носитель любой функции можно разложить в объединение нескольких граней разной размерностей)

Предложение: Носитель любой функции разлагается в объединение всех своих максимальных граней.

Опр: *Элементарная конъюнкция называется минимальной*, если её носитель является максимальной гранью. Следовательно всякая булева функция разлагается в дизъюнкцию всех своих элементарных конъюнкций.

Опр: *Сокращенная ДНФ* – разложение данной булевой функции в соответствующие ДНФ, которые соответствуют объединению её максимальных граней.

Теор: *Минимальная ДНФ* может быть получена из сокращенной отбрасыванием некоторого количества слагаемых, возможно пустого.

**3 Логические Исчисления.**

*3.1 Исчисления высказывания (ИВ).*

*3.1.1 Определения.*

Опр: *V* – *словом в алфавите А,* называется любая конечная упорядоченная последовательность его букв.

Опр: *Формативная последовательность слов* – конечная последовательность слов и высказываний , если они имеют формат вида:

Опр: F – *формулой ИВ*, называется любое слово, входящее в какую-нибудь формативную последовательность.

Пример:



Опр: *Аксиомы* – специально выделенное подмножество формул.

Reg – правила вывода ИВ (некоторые правила преобразования первого слова в другое).

*a* – символ переменной

 - произвольное слово ИВ (формула)

Отображение действует так, что на место каждого вхождения символа *а* , пишется слово .

Пример:

*Правило modus ponens*:

*3.1.2 Формальный вывод.(простейшая модель доказательства теоремы)*

Опр: Последовательность формул ИВ, называется формальным выводом, если каждая формула этой последовательности имеет следующий вид:

Опр: Выводимый формулой (теоремой) ИВ называется любая формула входящая в какой-нибудь формальный вывод. - выводимая формула ИВ.

Пример:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) |  |  |
| 2) |  |  |
| 3) |  |  |
| 4) |  |  |
| 5) |  |  |
| 6) |  |  |

*Правило одновременной подстановки.*

Замечание: Если формула выводима, то выводима и

Возьмем формативную последовательность вывода и добавим в неё , получившаяся последовательность является формальным выводом.

(Если выводима то если , то выводима )

Теор: Если выводимая формула , то ( - различные символы переменных) выводима

Выберем - символы переменных которые различны между собой и не входят не в одну из формул , сделаем подстановку и последовательно применим и в новом слове делаем последовательную подстановку: , где - является формальным выводом.

*3.1.3 Формальный вывод из гипотез.*

Опр: Формальным выводом из гипотез (формулы), называется такая последовательность слов , каждая из которых удовлетворяет условию:

 если формулу можно включить в некоторый формальный вывод из гипотез .

*Лемма:* ; : то тогда

Напишем список:

*Лемма*:

Док:

*3.1.4 Теорема Дедукции.*

Если из

1. и 2а) , где по правилу m.p. , ч.т.д.

2б) - уже выводили , ч.т.д.

Базис индукции: N=1 - формальный вывод из длинного списка

 (только что доказано), осуществим переход по индукции:

 по индукции

 и по лемме 2

Пример:

 по теореме дедукции

*3.2 Критерий выводимости в ИВ.*

*3.2.1 Формулировка теоремы.*

 - тавтология

при любой интерпретации алфавита (символов переменных)

*3.2.2 Понятие интерпретации.*

символ переменной переменную поставим в соответствие.

, где - проекция на .

 ; - только символ

 переменных, т.к.

 это заглавное слово

 формативной последо-

 вательности вида:

Где:

*3.2.3 Доказательство теоремы.*

формальный

вывод

1.

*3.3 Непротиворечивость ИВ.*

*3.3.1 Определение.*

1. ИВ *противоречиво*, если формула *А* выводима в нем. .

1. формула выводима в ИВ)ИВ *противоречиво*.

1. ИВ *противоречиво*.

ИВ *непротиворечиво*, если оно не является противоречивым.

*Теорема*: ИВ является непротиворечивым исчислением по отношению к любому из трех определений.

*Док-во*: (1) Если , то соответствующая ей булева функция будет тождественно равна 1.

(2) Если любая формула выводима, то выводима и *А*, что соответствует пункту 1.

(3) Пусть и - булева функция

 - противоречие.

*3.4 Формальные исчисления.*

*Алфавит* – конечное или счетное множество символов, возможно, разбитых на группы. Алфавит должен быть упорядоченным множеством.

*Слово* – конечная упорядоченная последовательность символов алфавита, в т.ч. пустое слово.

*V* – множество всех слов.

Вычислимая функция от нескольких натуральных переменных

( *f* – может быть не всюду определенной )

f – называется *вычислимой*, если такая машина Тьюринга, которая её вычисляет.

 - *разрешимое* множество, если характеристическая функция

 - является вычислимой.

Множество называется перечислимым, если такая вычислимая функция

*М* - разрешимо *М* и *N* \*M* перечислимы.

*М* – перечислимо *М* – область определения некоторой вычислимой функции.

Множество всех формул *F* – некоторое разрешимое подмножество *V*.

*Т* – счетное множество, если его биективное отображение на *V*.

 - обозначение счетного множества. ( - алеф-нуль)

Если и зафиксировано биективное и вычислимое отображение (вычис.),

то *L* – *ансамбль*.

V – ансамбль (слова лексикографически упорядочены и занумерованы)

*Определение*: В произвольном формальном исчислении: - множество всех аксиом – разрешимое подмножество множества всех формул.

Правило вывода:

 ,при разрешимо. Для ИВ *N*=2.

*Пример*:

 (пустое слово) ,

 1 и 2 – формальные выводы.

 3 – не является формальным выводом.

# 4 Предикаты и кванторы.

*4.1 Определение предиката.*

 - высказывание, содержащее переменную.

 - предметная область предиката.

Пусть А – множество объектов произвольной природы (*предметная область предиката*).

*-местный предикат* – произвольное отображение

Множество истинности данного предиката

 -

 - характеристическая

функция от x на множестве

А - совпадает

с предикатами

*4.2 Понятие квантора.*

k – связанная переменная

n – свободная переменная

 t – свободная, x – связанная.

 , a,b,y – свободные переменные, x – связанная.



*4.3 Геометрическая интерпретация навешивания кванторов.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  - ортогональная проекция на ось x |  |

## Пронесение отрицания через кванторы

Геометрическое 'доказательство':

 не обладает свойством, что прямая целиком лежит в

 ч.т.д.

