**Введение и краткое резюме**

Настоящая работа посвящена исследованию движений автоколебаний системы с одной степенью свободы под действием внешней периодической силы. Такие движения представляют интерес для радиотелеграфии (например, к исследованию таких движений сводится теория регенеративного приемника). Особенно замечательно здесь явления так называемого "захватывания". Это явление заключается в том, что, когда период внешней силы достаточно близок к периоду автоколебаний системы, биения пропадают; внешняя сила как бы "захватывает" автоколебания. Колебания системы начинают совершаться с периодом внешнего сигнала, хотя их амплитуда весьма сильно зависит от амплитуды "исчезнувших" автоколебаний. Интервал захватывания зависит от интенсивности сигнала и от автоколебательной системы.

Теоретически этот вопрос уже разбирался, однако методами математически недостаточно строгими; кроме того, бралась характеристика весьма частного вида - кубическая парабола. Поэтому мы будем рассматривать случай произвольной характеристики при колебаниях близких к синусоидальных.

В этой работе мы рассмотрим периодические решения с периодом, равным периоду внешней силы, и их устойчивость при малых отклонениях. Мы оставим в стороне другие стационарные движения, возможные в исследуемой системы, например периодические решения с периодом, кратным периоду внешней силе, или квазипериодические решения. Мы оставим в стороне важный вопрос об устойчивости при больших отклонениях

Для отыскания периодических решений воспользуемся методом Пуанкаре, которые позволяют быстро решить задачу для случая колебаний, достаточно близких к синусоидальным. С этой целью введем в наше уравнение параметр μ таким образом, чтобы при μ = 0 уравнение превращалось в линейное и колебания делались синусоидальными. Этот параметр μ, который мы предполагать достаточно малым, может иметь различный смысл в зависимости от выбора системы.

Для решения вопроса об устойчивости найденного решения при малых отклонениях воспользуемся методами Ляпунова, требуя, чтобы искомые решения обладали "устойчивостью по Ляпунову".

В настоящей работе мы не будем вычислять радиусы сходимости тех рядов, с которыми нам придется иметь дело; грубая оценка может быть сделана по Пуанкаре.

В § 1 и 2 рассматривается область достаточно сильной расстройки; § 3 и 4 посвящены рассмотрению области резонанса; в § 5 показывается, как общие формулы для амплитуд и для устойчивости, полученные в § 1- 4, могут быть применены в конкретных случаях, причем в качестве примера рассматривается случай Ван дер Поля. Результаты применения общих формул совпадают с теми, которые получил нестрогим путем Ван дер Поль.

**§ 1 Отыскание периодического решения в случае достаточно сильной расстройки.**

Уравнение, которое нас будет интересовать:



При μ = 0 это уравнение имеет единственное периодическое решение



Рассмотрим случай, когда μ бесконечно мало. Согласно Пуанкаре мы будем искать решение (1) в следующем виде:



Начальные условия выберем так:



F2 - степенной ряд по β1 β2, μ начинающийся с членов второго порядка. Подставим (3) в (1):



Сравнивая коэффициенты при  β1 β2, μ получим уравнение для А, В, С. Начальные условия можно получить для них, подставив (4) в (3).



Решая задачи Коши, получим:



Для того, чтобы (3) представляли периодические решения необходимо и достаточно, чтобы 

Введем обозначения ; для остальных функций аналогично.

Тогда (6) запишется в виде:



Если в этой системе можно β1 β2  представить в виде функции μ так, чтобы β1 β2, μ исчезли из системы (7) , то (3) - периодическое решение уравнения (1). Иначе Х- не периодично. Достаточным условием существования периодического решения при малых μ служит неравенство 0 Якобиана. 

В нашем случае: 

Т.е. мы всегда имеем периодические решения при малых μ и любых f. Искомое периодическое решение может быть найдено в виде.



**§ 2 Исследование устойчивости периодического решения**

Составим уравнения первого приближения, порождаемое решением (8). Сделаем замену: x = Ф(t) + ξ ; в уравнении (1) при этом отбросим члены , содержащие квадраты и высшие степени ξ и ξ'.



Воспользуемся тем фактом, что Ф (t) - решение уравнения. Получим уравнение первого приближения:



Это линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. Его решение мы будем искать в виде   функции времени Удовлетворяют тому же уравнению, что и ξ, то есть (10). Начальные условия для них определены следующим образом.

; аналогичным образом можно показать, что  (11).

Представим правую часть уравнения в виде степенного ряда по μ.



будем искать в виде:  (12).

Подставим (12) в (10) и сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях μ, получим:



Начальные условия для Ао , Во, …. Следует выбрать так, чтобы выполнялись условия (11). Действительно подставляя (11) в (12) и сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях μ, получим



Для В'о и Во аналогично. Для остальных же как видно из уравнений условия будут нулевые. Итак:

(14)

Решение (13) можно найти при помощи квадратур:

(15)

Если вспомнить общую теорию линейных диффуров с периодическими коэффициентами, то общее решение (10) имеет вид:



S1, S2 - периодические функции с тем же периодом, что и Ф (t). α1, α2 - характеристические показатели.

Если все  , т.е. колебания затухают, то в этом случае выполняется теорема, доказанная Ляпуновым, относительно того, что периодическое решение уравнения первого приближения вполне устойчиво. Согласно Пуанкаре характеристические показатели можно определить из следующего уравнения:

=0 (16) Полагаем ;



Тогда определитель будет:



Вопрос об устойчивости, как сказано выше, решается знаком Re (α), или что все равно ⎟ λ⎟ . Если ⎟ λ⎟ < 1 имеет место устойчивость ⎟ λ⎟ = 1 этот случай для нашей задачи не представляет интереса. ⎟ λ⎟> 1 имеет место неустойчивость.

При рассмотрении (18) имеют место 2 случая q > р2; q < р2; В первом случае λ-комплексные; ⏐λ2 ⏐=q; (20) если q<1; устойчивость q>1 - неустойчивость.

Случай второй - λ - действительные:  ; (21) устойчивость соответствует  p и q нетрудно получить в виде рядов по степени μ из формул (19) (12).

(22)

Если принять во внимание (15)

(22a)

(23)

Мы видим, что при достаточно малом μ и ω≠n; n ∍ Z вопрос об устойчивости решается величиной q и следовательно знаком b, если b < 0- имеет место устойчивость, b > 0 - неустойчивость.

В нашем случае b имеет вид:

 (23a)

**§ 3 Отыскание периодического решения в области резонанса.**

Тогда λ=μλо; ω2 = 1+ aо μ, (24) (aо , μ - расстройка , реальный физический резонанс наступает при aо ≠ 0).

Тогда исследуемое уравнение имеет вид :

 (25)

При μ = 0 периодическое решение будет иметь вид : (26)

Следуя Пуанкаре, мы можем предположить периодическое решение в виде:

 (27);

Начальные условия возьмем как и раньше:



Аналогично тому, как мы это делали в предыдущих параграфах. Подставляем (27) в (25) и, сравнивая коэффициенты при β1 β2, μ и других интересующих нас величинах, получим уравнение, которым удовлетворяет A, B, C, D, E, F. Начальные условия для этих уравнений определим, если подставим (28) в (27).

 (29)

Запишем условия периодичности для (27):



Делим на μ:

 ( 30a )

Необходимым условием существования периодического решения является:



Эти уравнения определяют P и Q решения (26), в близости к которому устанавливается периодическое решение. Они могут быть записаны в раскрытой форме :



(31)

Для существования искомого периодического решения достаточно неравенство 0 детерминанта: (см. § 1).



D, Е и их производные найдутся из (29) при помощи формул аналогичных (15). Заметим, что (30) мы можем определить β1, β2, в виде рядов по степеням μ. Таким образом, мы можем (27) как и в § 1 представить в виде ряда.

(33)

P,Q-определяются формулами (31) (32).

**§ 4 Исследование устойчивости периодических решений в области резонанса**

Аналогично тому, как мы это делали в § 2, составим уравнение первого приближения, порожденное решением (33).



Решение опять будем искать в виде . Однако нет необходимости проделывать все выкладки заново. Воспользуемся результатами § 2, приняв:

 

Из формул (22)   (34) , тогда  Δ - тот же Якобиан, что и (32). Распишем его:



 (36)

;

Тогда, зная функцию f, мы можем вычислить Δ в виде функции P, Q и aо.

Заметим, что равенство (23 а) в нашем случае имеет вид:

 ; (37)

Опираясь на результаты исследования, полученных в § 2, нужно рассмотреть при исследовании устойчивости два случая: (при достаточно малых μ)

1) p2 - q < 0 

2) p2 - q > 0 

В первом случае устойчивость характеризуется условием q < 1 или, что то же самое b < 0.

Во втором случае  (\*) последнее может быть выполнено только, если b < 0, а Δ > 0. Нетрудно видеть, что необходимым достаточным условием в обоих случаях является b < 0, Δ > 0. (Это можно получить из неравенства (\*) ).

**§ 5 Применение общих формул, полученных в предыдущих параграфах, к теории захватывания в регенеративном приемнике для случая, когда характеристика - кубическая парабола.**

Мы рассмотрим простой регенеративный приемник с колебательным контуром в цепи сетки, на который действует внешняя сила Ро sin ω1 t.

Дифференциальное уравнение колебаний данного контура следующее:

 (39)

Считая, что анодный ток зависит только от сеточного напряжения, а также, что характеристикой является кубическая парабола:

(40)

S-крутизна характеристики, К - напряжение насыщения  .

Далее, вводя обозначения: 



Получим дифференциальное уравнение для х:

 (41)

А: (случай далекий от резонанса).

Для него применяем результаты § 1, полагая.

Исходное решение в не посредственной близости, к которому устанавливается искомое решение следующее:



Если ω > 1, т.е. ωо > ω1, то разность фаз равна 0, если ω < 1, то разность фаз равна π. В этом отношении все происходит в первом приближении также, как и при обычном линейном резонансе. Устойчивость определяется знаком b (b < 0).

(42).

Т.е. те решения, для которых выполняется это условие, устойчивы.

В: (область резонанса , § 3, 4).

В качестве исходного периодического решения, в непосредственной близости к которому устанавливается искомое, будет решение следующего вида: x = P sin t + Q cos t (P, Q - const).

Запишем уравнение, определяющее эти P и Q, т.е. соотношение (31) для нашего случая.



Или преобразовав их, получим следующее:



Полагая Р = R sin ϕ; Q = R cos ϕ. Далее найдем для амплитуды R и фазы ϕ для того исходного периодического решения, в близости к которому устанавливается рассматриваемое периодическое решение , соотношения связывающие их :



Первая формула дает "резонансную поверхность" для амплитуды. Вторая - для фазы. По (38) условия устойчивости имеют вид b < 0, Δ > 0. Считаем b и Δ через формулы (35-37).



(46)



Т.е. решение является устойчивым, если удовлетворяется условие (\*\*). В заключение выпишем формулы для вычисления aо, соответствующего ширине захватывания для рассматриваемого случая.

1) 

a0 - является общим корнем уравнений

 

2) 

Сама ширина Δω, отсчитанная от одной границы захватывания до другой выражается следующим образом: Δω = aо ω2о (MS - c r). Можно дать простые формулы для вычисления ширины захватывания в следующих случаях:

а) λ2о << 1; Δω = ωо Ро/Vоg.

б) для очень сильных сигналов  ( Vоg - амплитуда сеточного напряжения при отсутствии внешней силы).

**Список литературы**

1. Андронов А.А. Собрание трудов, издательство "Академии наук СССР", 1956.
2. Андронов А.А., Витт А. К теории захватывания Ван дер Поля. . Собрание трудов, издательство "Академии наук СССР", 1956.
3. Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892.