Министерство образования Российской Федерации

Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина

Реферат

На тему: «Метод Монте - Карло».

Выполнила:

Студентка 308 группы

Проверила:

Преподаватель

Тамбов 2008

**Содержание**

Введение…………………………………………………………………3

Метод Монте – Карло при анализе риска…………………………4-10

Метод Монте – Карло в условиях управления

рыночными рисками………………………………………………11 - 16

Заключение……………………………………………………………..17

Список литературы……………………………………………………18

**Введение**

Управление рисками на сегодняшний день является актуальной проблемой. Поэтому особое внимание уделяется методам управления рисками.

Актуальность исследования состоит в изучении методов управления рисками, а в честности метода Монте - Карло.

Итак, предметом данной работы является метод. Объектом написания данной работы – метод Монте - Карло.

При написании данной работы были поставлены ряд задач и целей.

Цель: всесторонне охарактеризовать применение метода Монте – Карло в управлении рисками предприятия.

Исходя из поставленной цели, были выдвинуты ряд задач:

1. Метод Монте – Карло при анализе риска.

2. Метод Монте – Карло в условиях управления рыночными рисками.

Исследуя тему данной работы, были использовала труды таких авторов как: Ильин И. П. «Планирование на предприятии», «Энциклопедия финансового риск-менеджмента» под. ред. Лобанова А. А.

**Метод Монте – Карло при анализе риска**

Широкое распространение особенно при анализе риска получил метод Монте-Карло. Этот метод имитации применим для решения почти всех задач при условии, что альтернативы могут быть выражены количественно. Построение модели начинается с определения функциональных зависимостей в реальной системе, которые в последствии позволяют получить количественное решение, используя теорию вероятности и таблицы случайных чисел.

Модель Монте-Карло не столь формализована и является более гибкой, чем другие имитирующие модели. Причины здесь следующие:

при моделировании по методу Монте-Карло нет необходимости определять, что именно оптимизируется;

нет необходимости упрощать реальность для облегчения решения, поскольку применение ЭВМ позволяет реализовать модели сложных систем;

в программе для ЭВМ можно предусмотреть опережения во времени.

Типичным примером задачи, которая может быть решена на основе модели Монте-Карло, может быть задача на обслуживание. Например, при планировании стратегии развития ресторана быстрого обслуживания необходимо знать, как долго в среднем приходится посетителю ждать обслуживания (среднее значение ожидания). Работа ресторана характеризуется следующими парами. Посетители обслуживаются последовательно на одной кухне. Прибытие клиентов носит случайный характер. Поступление заказов характеризуется следующими данными: интервалы поступления требований до 10 мин составляют 40% случаев, от 10 до 20 мин — 60%. Продолжительность обслуживания в зависимости от вкусов клиентов— также величина случайная. В 80 % случаев на обслуживание требуется 10 мин, в остальных — 30 мин.

В таблице 1 представлены результаты решения задачи на основе имитационной модели Монте-Карло, в которой интервалы между прибытием клиентов и временем обслуживания представлены последовательностью случайных чисел.

Таблица 1

Решение задачи обслуживания с применением метода Монте – Карло.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер образца | Первая случайная цифра | Интервал до прибытия, мин. | Время прибытия | Время начала обслуживания | Вторая случайная цифра | Время до обслуживания мин. | Время окончания обслуживания | Время ожидания, мин | Время простоя, мин |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | -  1  9  8  8  2  0  7  4  9 | -  10  20  20  20  10  10  20  20  20 | 0  10  30  50  70  80  90  110  130  150 | 0  10  40  50  70  100  110  120  130  150 | 2  8  6  7  9  4  1  3  4  9 | 10  30  10  10  30  10  10  10  10  30 | 10  40  50  60  100  110  120  130  140  180 | 0  0  10  0  0  20  20  10  0  0 | 0  0  0  0  10  0  0  0  0  10 |

Примечание. Колонка 8 = колонка 5 + колонка 7, колонка 9 = колонка 5 - колонка 4, колонка 10 = колонка 5 - цифра в предшествующем ряду колонки 8.

Для интервалов между прибытиями выберем следующую случайную последовательность: 0, 1,2, 3,4, 5, 6, 7, 8 или 9 – называют случайной цифрой. Если выбраны числа 0, 1, 2 или 3, то продолжительность интервала между поступлением двух требований составляет 10 мин. Если выбраны числа 4,5,6,7,8 или 9, продолжительность интервала равна 20 мин. Аналогичным образом определяется время обслуживания, которое наступает после истечения интервала прибытия. Для этого выбирается второе случайное число.

Если выбраны числа 0, 1,2, 3, 4, 5, 6 или 7, время обслуживания составит 10 мин. Если выбраны числа 8 или 9, обслуживание клиента длится 30 мин.

Из таблицы 3.2 видно, что для 10 испытаний, приведенных в таблице, суммарное время ожидания составляет 60 мин, или в среднем по 6 мин на клиента. Данный пример оставляет без ответа многие вопросы, и среди них вопрос о необходимом количестве испытаний, позволяющем с достаточной точностью определить время ожидания.

Предположим, что мы произвели N независимых опытов, в результате которых получили N случайных цифр. Записав эти цифры (в порядке их появления) в таблицу, получим то, что называется таблицей случайных цифр может иметь следующий вид (цифры разбиты на группы для удобства чтения таблицы):

86515 90795 66155 66434 56558 12332

69186 03393 42502 99224 88955 53758

41686 42163 85181 38967 33181 72664

86522 47171 88059 89342 67248 09082

72587 93000 89688 78416 27589 99528

Случайным числом называется случайная величина

δ = γ 1+ γ 2+ γ s + … ,

10 100 10s

где γ 1, γ2, … ,γs … - независимые случайные цифры. Иными словами, случайное число — это случайная величина, равномерно распределенная на промежутке [0, 1). В настоящее время существуют специальные компьютерные программы для построения случайных чисел в любом количестве. Такие программы называют генераторами случайных чисел.

Рассмотрим теперь дискретную случайную величину ξ, распределение которой имеет вид:

|  |
| --- |
| Х 1 Х 2 … Хп |
| Р1 Р2 … Х п |

Для моделирования случайной величины ξ промежуток [0, 1) разделим на участки ∆ i так, чтобы длина промежутка ∆ i равнялась Рi, i = 1, 2, ... , п. Новая

случайная величина ξ^определяемая равенством:

ξ^ = Х I, если δ Є ∆ I , I – 1, 2, … , п,

где δ – случайное число, имеет такое же распределение, что и случайная величина ξ.

Предыдущее равенство позволяет каждому случайному числу приписать определенное значение случайной величине ξ. Такой процесс приписывания значений случайной величине ξ часто называют разыгрыванием этой случайной величины.

Предположим, что даны две случайные величины ξ и η совместное распределение которых имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| η  ξ | Y1 | ... | Yi | … | Yn |
| Х1 | Р11 | … | Р1j | … | Р1n |
| … | … | … | … | … | … |
| X i | Р i1 | … | Рij |  | Рin |
|  |  | … | … |  |  |
| P m | P mi | … | Рmj |  | Рmn |

Для моделирования пары случайных величин ξ и η промежуток [0, 1) разделим на части ∆ ij так, чтобы длина полуинтервала ∆ ij равнялась Р ij, I =1, 2..., m; j = 1, 2, ..., n.

В этом случае пара случайных величин ξ ^,η ^, где

ξ ^ = Х i, η ^ = y j, при δ Є ∆ ij.

имеет такое же распределение, что и пара ξ и η.

Предыдущее равенство позволяет каждому случайному числу приписать определенную пару значений случайных величин ξ и η. Такой процесс приписывания значений паре случайных величин ξ и η азывают разыгрыванием этой пары.

Если случайные величины ξ и η независимы, то для разыгрывания пары ξ и η достаточно разыграть каждую случайную величину в отдельности. Для разыгрывания непрерывной случайной величины можно вначале найти дискретную случайную величину, близкую к данной случайной величине, а затем разыграть эту дискретную случайную величину.

Метод Монте-Карло позволяет численно находить различные вероятностные характеристики случайной величины η, зависящей от большого числа других случайных величин ξ1, ξ2, …, ξ n. Этот метод сводится к следующему: разыгрывается последовательность случайных величин ξ1, ξ2, …, ξ n для каждого розыгрыша определяется соответствующее значение случайной величины η, а по найденным значениям строится эмпирическое распределение вероятностей этой случайной величины.

Рассмотрим пример. Инвестор владеет портфелем, состоящим из одной казначейской облигации и двух корпоративных облигаций одного и того же кредитного рейтинга. Основные параметры портфеля указаны в таблице:

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Облигация | Срок до погашения, лет | Купонная ставка, % | Номинал, млн. долл. | Доходность к погашению, % |
| Казначейская | 5,5 | 6,0 | 5 | 6,0 |
| Корпоративная | 15,5 | 9,0 | 4 | 9,0 |
| Корпоративная | 25,5 | 10,5 | 6 | 10,5 |

Инвестора интересует реализуемая доходность портфеля облигаций за 6 месяцев. По его мнению, реализуемая доходность портфеля будет определяться следующими двумя факторами: кривой доходностей казначейских облигаций через 6 месяцев и спредом между доходностями корпоративных и казначейских облигаций. Предположим, что инвестор располагает еще и следующей информацией:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Доходности казначейских облигаций, % | | | | | | Вероятность | Разбиение промежутка [0,1) |
| 5 лет | | 15 лет | | 25 лет | |  |  |
| 4 | | 6 | | 7 | | 0,20 | [0; 0,20) |
| 5 | | 8 | | 9 | | 0,15 | [0,20; 0,35) |
| 6 | | 7 | | 7 | | 0,10 | [0,35; 0,45) |
| 7 | | 8 | | 8 | | 0,10 | [0,45; 0,55) |
| 9 | | 9 | | 9 | | 0,20 | [0,55; 0,75) |
| 10 | | 8 | | 8 | | 0,25 | [0,75; 1,00) |
| Величина спреда  между  доходностями, б, п.\* | Вероятность | | Разбиение промежутка [0,1) | |
| 75 | 0,10 | | [0; 0,10) | |
| 100 | 0,20 | | [0,10; 0,30) | |
| 125 | 0,25 | | [0,30; 0,55) | |
| 150 | 0,25 | | [0,55; 0,80) | |
| 175 | 0,15 | | [0,80; 0,95) | |
| 200 | 0,05 | | [0,95; 1,00) | |

Для определения реализуемой доходности портфеля облигаций можно использовать метод Монте-Карло. Первая итерация (случайные числа: 0,91 для кривой доходностей и 0,12 для спреда между доходностями). В этом случае доходности казначейских облигаций со сроком до погашения 5, 15 и 25 лет составят соответственно 10, 8 и 8%, а доходности корпоративных облигаций со сроком до погашения 15 и 25 лет — 9 и 9%.

Тогда цены облигаций (на номинал в 100 долл.) через 6 месяцев определяются следующим образом:

P1 = 6/0,1 (1- 1/ (1+0,05)10)+100/(1+0,05)10 = 84,55653

P2 = 100 (купонная ставка совпадает с доходностью).

P3 = 10,5/0,09 (1 – 1/(1,045)50)+ 100/(1,045)50 = 114,82151

Значит, реализуемая доходность портфеля облигаций составит:

P1 \* 5\*104+P2\*4\*104+ P3\* 6\*104+15 \*104+18\*104+315\*103-15\*106=0,1016

15 \* 106

Т.е. 10,16%

Предположим, что было проведено 100 итераций. При этом оказалось, что наименьшая реализуемая доходность портфеля равна -3,905%, а наибольшая реализуемая доходность составляет 24,97%.

Разделив отрезок (-3,905%; 24,97%) на достаточно большое число частей, подсчитаем для каждой части число итераций, дающих реализуемую доходность из этой части.

Таким образом, будет построено эмпирическое распределение вероятностей реализуемой доходности портфеля облигаций. После чего можно получить различные числовые характеристики этой реализуемой доходности: среднее значение, стандартное отклонение и т. д.

**2. Метод Монте-Карло в условиях управления рыночными рисками.**

Метод Монте-Карло, или метод стохастического моделирования (Monte Carlo simulation), основан на моделировании случайных процессов с заданными характеристиками. В отличие от метода исторического моделирования, в методе Монте-Карло изменения цен активов генерируются псевдослучайным образом в соответствии с заданными параметрами распределения, например математическим ожиданием μ и волатильностью σ. Имитируемое распределение может быть, в принципе, любым, а количество сценариев — весьма большим (до нескольких десятков тысяч). Выделяют:

метод Монте-Карло для одного фактора риска;

метод Монте-Карло для портфеля активов.

Рассмотрим Метод Монте-Карло для одного фактора риска. Моделирование траектории цен производится по различным моделям. Например, распространенная модель геометрического броуновского движения дает в итоге следующие выражения для моделирования цен S на каждом шаге процесса, состоящего из очень большого количества шагов, охватывающих период Т:

dSt = St (μdt + σdzt), (1)

, где dzt — винеровский случайный процесс.

Воспользовавшись определением винеровского процесса, уравнение (1) можно записать в дискретной форме:

σσ∆St= St-1 (μ∆t + σε√∆t) , (2)

т. е.

St+1 = St + St (μ∆t + σε1√∆t), (3)

St+1 = St+1 + St+1 (μ∆t + σε2√∆t), (4)

ST = St+n.

Если траектория цен состоит из n равных шагов (например, n дней), то один шаг ∆t = 1/n, а случайная величина ε подчиняется стандартному нормальному распределению (μ = 0, σ = 1). Можно использовать и иные модели эволюции цен, например экспоненциальную.

Траектория цен — это последовательность псевдослучайным образом смоделированных цен, начиная от текущей цены и заканчивая ценой на некотором конечном шаге, например на тысячном или десятитысячном. Чем больше число шагов, тем выше точность метода.

Каждая траектория представляет собой сценарий, по которому определяется цена на последнем шаге исходя из текущей цены. Затем производится полная переоценка портфеля по цене последнего шага и расчет изменения его стоимости для каждого сценария. Оценка VaR производится по распределению изменений стоимости портфеля.

Генерация случайных чисел в методе Монте-Карло состоит из двух шагов. Сначала можно воспользоваться генератором случайных чисел, равномерно распределенных на интервале между 0 и 1 (рассмотрено выше). Затем, используя как аргументы полученные случайные числа, вычисляют значения функций моделируемых распределений.

Однако следует помнить, что генераторы случайных чисел работают на детерминированных алгоритмах и воспроизводят так называемые «псевдослучайные числа», поскольку с некоторого момента последовательности этих псевдослучайных чисел начинают повторяться, т. е. они не являются независимыми. В простейших генераторах это происходит уже через несколько тысяч генераций, а в более сложных— через миллиарды генераций. Если массив случайных чисел начинает повторяться слишком быстро, то метод Монте-Карло перестает моделировать случайные, независимые сценарии и оценка VaR начинает отражать ограниченность генератора, а не свойства портфеля. Оптимальное количество шагов в процессе зависит от объема выборки, состава портфеля и сложности составляющих его инструментов и др.

Рассмотрим пример: элементы расчета VaR методом Монте-Карло на современном российском рынке. Для расчета VaR можно использовать различные модификации метода Монте-Карло; в данном случае метод описывается следующим образом:

По ретроспективным данным рассчитываются оценки математического ожидания х и волатильности σ.

С помощью датчика случайных чисел генерируются нормально распределенные случайные числа ε с математическим ожиданием, равным х, и стандартным отклонением σ.

Полученными на предыдущем шаге случайными числами ε заполняется таблица размерностью 500 столбцов на 1000 строк (вообще говоря, размерность таблицы произвольная и зависит, например, от имеющихся вычислительных мощностей, но, чтобы метод обеспечивал приемлемую точность, она должна быть достаточно большой).

Вычисляется траектория моделируемых цен вплоть до S1000 по формуле St= St-1e εt-1, где е — основание натурального логарифма, St— текущая цена (курс) актива.

Производится переоценка стоимости портфеля (состоящего в данном примере из одного актива) по формуле: ∆V= Q (S1000 – S0), где Q — количество единиц актива.

Шаги 4 и 5 выполняются 500 раз для заполнения таблицы 500 х 1000. Полученные 500 значений ∆V сортируются по убыванию (от самого большого прироста до самого большого убытка). Эти ранжированные изменения можно пронумеровать от 1 до 500. В соответствии с желаемым уровнем доверия (1 - α) риск-менеджер может определить VaR как такой максимальный убыток, который не превышается в 500(1 - α) случаях, т. е. VaR равен абсолютной величине изменения с номером, равным 500(1 - α).

Шаги 1-6 повторяются для каждого расчета каждого дневного VaR.

В качестве объекта исследования был выбран индекс РТС. Генерация случайных чисел производилась при помощи встроенного генератора МS Ехсеl.

Метод Монте-Карло является наиболее технически сложным из всех описанных методов расчета VaR. Кроме того, для выполнения расчетов в полном объеме необходимы значительные вычислительные мощности и временные ресурсы. Современные компьютеры пока еще не позволяют обрабатывать информацию в режиме реального времени, как этого требуют трейдеры, если риск-менеджеры хотят устанавливать VaR-лимиты на величину открытых позиций с помощью метода Монте-Карло.

Существует вариант метода Монте-Карло, согласно которому можно не задавать какое-либо конкретное распределение для моделирования цен, а использовать непосредственно исторические данные. Подобно методу исторического моделирования, на основе ретроспективы моделируются гипотетические цены, но их последовательность не является единственной и не ограничена глубиной периода ретроспективы, поскольку выборка производится с возвращением (bootstrap), т. е. возмущение из исторических данных выбирается случайным образом, и каждый раз в выборе участвуют все данные. Такое построение выборки исторических данных позволяет учесть эффект «толстых хвостов» и скачки цен, не строя предположений о виде распределения. Это несомненные достоинства метода, который, в отличие от метода исторического моделирования, позволяет рассмотреть не какую-либо одну траекторию цен (сценарий), а сколь угодно много, что, как правило, повышает точность оценок. Недостатками данной методики являются низкая точность при малых объемах выборки и использование предположения о независимости доходностей во времени.

Теперь рассмотрим метод Монте-Карло для портфеля активов. Чтобы проводить моделирование по Монте-Карло для многофакторного процесса, можно точно так же моделировать каждый из к рассматриваемых факторов исходя из сгенерированных случайных чисел:

dSt,j = μt,j St,j dt + σt,j St,j Sdzt,j, j = 1,2, …, k, (5)

или для дискретного времени:

∆St,j = St-1,j(μj∆t + σjεj√∆t), j = 1,2, …, k. (6)

С целью учета корреляции между факторами необходимо, чтобы случайные величины εi и εj точно так же коррелировали между собой. Для этого используется разложение Холецкого, суть которого состоит в разложении корреляционной матрицы на две (множители Холецкого) и использовании их для вычисления коррелированных случайных чисел.

Корреляционная матрица является симметричной и может быть представлена произведением треугольной матрицы низшего порядка с нулями в верхнем правом углу на такую же транспонированную матрицу. Например, для случая двух факторов имеем:

Отсюда

Коррелированные случайные числа ε1 и ε2 получаются путем перемножения множителя Холецкого и вектора независимых случайных чисел η:

При расчетах необходимо правильно выбрать количество множителей,

чтобы получилась положительно определенная матрица.

Достоинства метода Монте-Карло:

высокая точность расчетов;

высокая точность применительно к инструментам с нелинейными ценовыми характеристиками;

возможность моделирования любых исторических и гипотетических распределений, учет эффекта «толстых хвостов» и скачков цен (вегариска).

Недостатки метода Монте-Карло:

высокая сложность моделей и соответственно высокий риск неадекватности моделей;

высокие требования к вычислительной мощности и значительные затраты времени на проведение расчетов.

**Вывод**

В данной работе был рассмотрен метод Монте – Карло. Этот метод имитации применим для решения почти всех задач при условии, что альтернативы могут быть выражены количественно. Построение модели начинается с определения функциональных зависимостей в реальной системе, которые в последствии позволяют получить количественное решение, используя теорию вероятности и таблицы случайных чисел.

Модель Монте-Карло не столь формализована и является более гибкой, чем другие имитирующие модели. Причины здесь следующие:

при моделировании по методу Монте-Карло нет необходимости определять, что именно оптимизируется;

нет необходимости упрощать реальность для облегчения решения, поскольку применение ЭВМ позволяет реализовать модели сложных систем;

в программе для ЭВМ можно предусмотреть опережения во времени.

Данный метод является общепризнанным и наилучшим, так как обладает рядом непреодолимых достоинств, в частности использует гипотезу о нормальном распределении доходностей, показывает высокую точность для нелинейных инструментов и устойчив к выбор ретроспективы. К недостаткам можно отнести техническую сложность расчётов и модельный риск.

**Список литературы**

1. Ильин И. П. «Планирование на предприятии». М: 2002.
2. «Энциклопедия финансового риск-менеджмента» под. ред. Лобанова А. А. М: 2005.