IV Гомельская научно-практическая конференция школьников по математике, ее приложениям и информационным технологиям

"Поиск"

Учебно-исследовательская работа

«Многогранник максимального объема»

#### Ученика

11 «А» класса

ГУО СОШ№22 г. Гомеля

#### Гончарова Дмитрия Евгеньевича

Научный руководитель –

Горский Сергей Михайлович, учитель математики Государственного учреждения образования СОШ №22 г.Гомеля

Гомель, 2009

**Содержание**

Введение

1 Развертка многогранника

2 Увеличение объема

Список использованных источников

**Введение**

Как известно телом максимального объема с заданной площадью поверхности является шар.

В данной же работе рассматривается следующая задача:

Дан произвольный многоугольник. Требуется сложить из него многогранник максимального объема.

Теорема Александрова (1932) дает нам достаточные и необходимые условия существования выпуклого многогранника (причем единственного) для заданной развертки, но не говорит о том, как его построить. Конструктивное доказательство теоремы Александрова было дано Волковым [2] в 1955г.

Но в рассматриваемой задаче у нас нет условий склейки многогранника, поэтому из данного многоугольника, варьируя условия склейки, можно получить несколько выпуклых многогранников. Например, из развертки куба, известной под названием латинский крест, можно получить 85 выпуклых многогранников 5 различных типов. Используя метод динамического программирования Эрик и Мартин Демайны [Erik Demaine, Martin Demain] совместно с Анна Любив [Anna Lubiw] и Жозеф О’Рурк [Joseph O’Rourke] в 2007 г. предложили алгоритм построения всевозможных выпуклых многогранников из данного многоугольника.

Казалось бы, что задача решена: используя алгоритм построить все возможные многогранники и из них выбрать многогранник с максимальным объемом, но дело осложняет теорема Бликера [Bleecker] (1996), утверждающая, что любой выпуклый многогранник, грани которого — треугольники можно преобразовать в невыпуклый многогранник большего объема. В 2006 г. Игорь Пак и Гурий Самарин независимо друг от друга доказали обобщение теоремы Бликера — из развертки любого выпуклого многогранника можно сложить невыпуклый многогранник большего объема.

В 2002 г. С.Н. Михалёвым был предложен пример двух многогранников — выпуклого и невыпуклого — составленных из одинаковых граней таких, что объём выпуклого многогранника меньше объема невыпуклого.

## 1. Развертка многогранника

Что такое развертка многогранника? Вы скажите — кусок картона, из которого можно свернуть данный многогранник. В этом есть правда, но это не вся правда. Оказывается, понятие развертки включает в себя больше, чем просто кусок картона.

Пусть имеется, вообще говоря, несколько многоугольников, у которых каждая сторона отождествлена с одной и только одной стороной того же или другого многоугольника этой совокупности. Это отождествление (или склеивание) сторон должно удовлетворять еще двум условиям:

1) отождествляемые стороны имеют одинаковую длину;

2) от каждого многоугольника к любому другому  
можно перейти, проходя по многоугольникам, имеющим отождествленные стороны.

Совокупность многоугольников, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется разверткой.

Нам понадобится эйлерова характеристика развертки, которая определяется аналогично эйлеровой характеристике многогранника:

χ = B-P+Г,

где Г — число многоугольников, входящих в развертку, Р — число сторон многоугольников, при этом отождествляемые стороны считаются за одну, В — число вершин, при этом отождествляемые вершины считаются за одну.

В случае специальной развертки, когда каждый многоугольник развертки — это грань многогранника, ребро развертки — это ребро многогранника, а вершина развертки — вершина многогранника, очевидно, что эйлерова характеристика развертки равна эйлеровой характеристике многогранника.

Но нетрудно показать, что эйлерова характеристика сохраняется при перекраивании данной развертки в изометричную, так что эйлерова характеристика любой развертки многогранника равна характеристике многогранника. Поэтому у развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна 2.

Далее, если вершине развертки соответствует настоящая вершина многогранника, то сумма подходящих углов строго меньше 2π. Если же вершине развертки соответствует какая-нибудь точка внутри грани или ребра, то сумма подходящих к вершине углов равна 2π. Поэтому в развертке выпуклого многогранника сумма углов, подходящих к каждой ее вершине, не превышает 2π.

Итак, у всякой развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна двум, а сумма углов, подходящих к каждой вершине, не превосходит 2π.

Удивительно то, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Теорема о развертке (А.Д.Александров). Из всякой развертки, удовлетворяющей условиям:

1. ее эйлерова характеристика равна 2;
2. сумма углов, подходящих к любой вершине развертки, не превосходит 2π, можно склеить выпуклый многогранник.

**2 Увеличение объема**

Помните, как выглядел пакет молока в советское время? Удивительно, что вся страна покупала эти пакеты почти каждый день на протяжении более 20 лет, но мало кто сейчас помнит точно, что на них было нарисовано...

Но все конечно помнят, что пакет молока был в виде тетраэдра (правильной треугольной пирамиды). Изобрела пакеты в виде тетраэдра фирма ТетраПак в 40-х годах XX века, откуда и берет свое название. В те годы эта фирма сделала два важных нововведения. Во-первых, жидкие продукты начали наливать в картон. Во-вторых, изготовление тетраэдральных пакетов было настолько простым, что его можно было поместить прямо на молокозаводах.

Можно ли из куска картона, из которого сделан этот молочный пакет, сделать пакет с большим объемом, чем сам тетраэдр?

Математически задача формулируется так: можно ли из развертки тетраэдра сделать многогранник с большим объемом?



Александр Данилович АЛЕКСАНДРОВ (1912-1999) — российский математик, исследовавший обширный круг вопросов, включая геометрию выпуклых тел, теорию меры, теорию дифференциальных уравнений в частных производных и математические основания теории относительности

По теореме А.Д. Александрова выпуклый многогранник с той же разверткой, но большим объемом сделать нельзя. Но может быть можно сделать невыпуклый с большим объемом?

Удивительно, но оказывается что можно!

Давайте проследим за конструкцией, предложенной Дэвидом Бликером в 1996 году. Разведем грани и на каждой добавим дополнительные вершины и ребра. Возьмем центральный правильный треугольник, определенный соотношением, что его сторона в два раза больше расстояния от его вершины до стороны грани. Проведем дополнительные ребра.



Те же построения сделаем на каждой грани. Изогнем каждую грань следующим образом — углы и середины сторон в сторону центра, а центральный треугольничек — от центра. Все грани изогнуты одинаково, и их можно склеить в многогранник. Некоторые новые грани лежат в одной плоскости и ребра между ними исчезают.



Подсчитаем объем получившегося многогранника. Для этого разобьем его на части. Полученный многогранник состоит из 4 одинаковых шестиугольных пирамидок и фигуры, которая является усеченным тетраэдром. Чтобы проще посчитать объем, добавим усеченные у тетраэдра углы — маленькие тетраэдры, а от получившегося значения объема отнимем объем добавленных кусочков.



Оказывается, что объем полученного таким способом многогранника больше чем на 37.7 процентов превосходит объем изначального тетраэдра, имеющего ту же развертку! Т.е из куска картона, из которого делались тетрадральные пакеты, можно делать пакеты которые вместительнее более чем на треть!



Удивительно, но тетраэдр не является исключением. Оказывается, что из развертки любого выпуклого многогранника с треугольными гранями можно сделать невыпуклый многогранник с большим объемом.

Эту теорему доказал в 1996 году Д. Бликер и привел алгоритм, как это делать.

В своей статье, кроме многогранников с треугольными гранями, Д. Бликер рассмотрел два правильных многогранника, не попадающие в этот класс — куб и додекаэдр. Из их разверток также можно сложить невыпуклые многогранники с большим объемом, чем у изначальных выпуклых.

Летом 2006 года, двумя математиками — аспирантом МГУ Гурием Самариным и Игорем Паком из MIT — независимо друг от друга было доказано, что

Из развертки любого выпуклого многогранника всегда можно сложить невыпуклый многогранник с большим объемом.

Условие треугольности граней было лишь техническим моментом, позволившем Бликеру доказать свою теорему, но в задаче оно не по существу — теорема верна и без этого условия.

**Список использованных источников**

1. David D. Bleecker. Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra /D. D. Bleecker // Journal Differential Geometry. 1996. V. 43. P. 505-526.
2. Долбилин Н.П., Жемчужины теории многогранников / Н.П. Долбилин — М.: МЦНМО, 2000.