ЛЕКЦИЯ 1

Тема: Типы производственных функций и их свойства

1. Производственные функции можно разделить по количеству используемых переменных, по виду функций и по их свойствам.

Под производственной функцией понимают уравнение, связывающее выпуск продукции и затраты. Производственные функции по количеству переменных различают:

* однофакторные:  или ;
* двухфакторные: ;
* многофакторные.

По аналитическому виду:

А) линейные производственные функции

.

Здесь параметры  и  выражают производительность факторов  и , то есть показывают абсолютный прирост производства, когда один фактор остается неизменным, а другой возрастает на единицу. Линейные функции часто используются в краткосрочных и среднесрочных экономических моделях.

б) степенные производственные функции

,

,

.

Параметры  и  выражают эластичность уровня производства  по отношению к факторам  и , то есть показывают относительный прирост продукции, связанный с относительным приростом  и .

 - объем трудовых ресурсов в натуральном количестве,

 - число рабочих, число человеко-дней,

 - выпуск продукции в стоимостном или натуральном виде.

в) более сложные производственные функции CES

,

где  - параметр, выражающий эластичность замены ОФ и занятости.

2. Предполагается, что производственные факторы удовлетворяют аксиоме. Существует подмножество производства страны затрат, называемое экономической областью , в которой увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска. Если  - две точки этой области, то  влечет .

Эта аксиома утверждает, что производственные факторы не какая-то совершенно абстрактная функция, придуманная теоретиками - математиками.

Она отражает утверждение, пусть и не на всей своей области определения, а только на ее части: в мало-мальски разумной экономике увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

 В дифференциальной форме это выражается в том, что в этой области первые частные производные функции неотрицательны:  - непрерывная и дифференцируемая

.

.

Эти производные называются предельными продуктами.

Можно составить производственные функции данного производства даже ничего не зная о производстве. Надо только поставить у возможного производства счетчик (человека на какое-то автоматическое увеличение), который будет фиксировать увеличиваемые ресурсы и  - количество продукции, которую производство произвело. Если накопить достаточно много такой статической информации, учесть работу производства в различных режимах, то можно прогнозировать выпуск продукции, зная объем ввезенных ресурсов, а это и есть производственная функция.

3 Понятие «однородность производственной функции» включает в себя следующее ее свойство: равномерное увеличение всех производственных факторов вызывает пропорциональное увеличение продукта. Выразим это математически:

Функция  однородна в степени h. если

.

Таким образом, когда каждая независимая переменная принимает значения , значение функции  возрастает в  раз.

Величина  показывает степень использования производственных факторов или их эффективность. В случае, когда , эффективность производственных факторов будет равна 1, при  говорят, что производственные факторы обладают растущей эффективностью и соответственно при  эффективность факторов снижается (рис. 5.1).

Постоянная

эффективность



Пр-во

Падающая

эффективность



Пр-во

Растущая

эффективность



Пр-во

Производственные

факторы

Производственные

факторы

Производственные

факторы

Рис 5.1

4. Эластичностью экономического показателя называется его способность реагировать в большей или меньшей степени на изменение другого показателя.

Определим эластичность объема производства  по некоторому фактору как отношение темпов прироста  к темпам прироста этого фактора.

Рассчитаем коэффициент эластичности  по основным фондам :

;

;

;

Здесь  - непрерывная дифференцируемая функция по .

Так как на практике это условие выполняется редко, то коэффициент эластичность и часто выражается через приросты.

;

Пусть , тогда

 - равен относительному изменению .

;

Коэффициент эластичности показывает как изменяется (в %) величина , если величина  возрастает на 1%.

Если коэффициент эластичности в какой-нибудь точке равен 1, то относительная и предельная величины равны друг другу. Это выполняется в точках, в которых относительная величина достигает минимума или максимума.

Иногда экономические показатели характеризуются коэффициентом эластичности. Если , то говорят, что экономический показатель эластичен по ; если , то говорят, что экономический показатель абсолютно эластичен.

Так как производственная функция содержит несколько факторов, то следует исследовать эластичность по всем факторам. Вводится понятие частной эластичности.

;

.

Для функции  параметры  и  являются частными коэффициентами эластичности.

;

.

4. Понятие замещения основывается на предположении, что производственные факторы могут заменять друг друга, и показывает, как при неизменной величине продукта можно изменять соотношения между факторами. Для  можно поставить вопрос, насколько должно измениться число занятых при некотором изменении объема ОПФ, чтобы величина произведенного продукта осталась неизменной. Оценка замещения  и  определяется как отношение двух предельных величин и называется предельной нормой замещения.

 или .

Например, если единичное изменение  увеличивает  на 6 единиц, а единичное изменение  увеличивает  на 3 единицы, можно сказать, что  остается неизменным, если при росте  на одну единицу число занятых увеличивается на 2 единицы. В этом случае

; ;

 ед.

 ед.

 ед.

 ед.

Различают ПФ (рис. 5.2, а и б).

ОПФ(К)

Рабочая сила L

Продукция

Х1

Х2

Х3

ОПФ(К)

Рабочая сила L

Продукция

Х1

Х2

Х3

а) Пф с взаимозаменяемыми факторами

б) Пф с дополняющими факторами

Рис.5.2

На рисунке изображены изокванты производственных функций. Каждая точка показывает значение продукта, произведенного с помощью комбинации факторов . Множество этих точек лежит на поверхности, называемой поверхностью производственных функций. Пересечение этой поверхности с плоскостями, параллельными плоскости , образуют кривые, называемые изоквантами. Каждая точка на этих кривых дает комбинацию производственных факторов, соответствующих одинаковому значению производственных функций.

Если производственные факторы можно заменять лишь в фиксированных пропорциях, то говорят, что производственные функции обладают нулевой предельной нормой замены.

5. ПФ Кобба-Дугласа (CDPF) принадлежит к наиболее известным, широко применяемым ПФ.

.

Ученые Дуглас и Кобб предприняли попытку оценить значения , используя данные по американской обрабатывающей промышленности за период с 1899 по 1922 года – индекс производства , индекс основного капитала , индекс труда . Они пришли к выводу, что

,

(таким образом имеет место неизменный эффект масштаба). С тех пор формула

,

,

для которой  называют функцией Кобба-Дугласа. Функция наиболее часто используемая претерпела изменения

,

где  - темп научно-технического прогресса. При 

.

Предположим, что каждый производственный фактор вырос на %, тогда значения этих факторов будут равны:

;

.

Величина конечного продукта вычисляется:

;

При  конечный продукт возрастает больше чем на r%, при  - меньше, чем на %, а при  - на %.

Частные коэффициенты эластичности равны

.

,

; .

Прологарифмируем CDPF

.

Производственная функция имеет линейный вид.

.

,

то есть при увеличении каждого производственного фактора на % выпуск продукции увеличивается на %.

ЛЕКЦИЯ 2

Тема: Модели типа «затраты – выпуск» В. Леонтьева

1 Рассмотрим обобщенную модель некоторой экономической системы (ЭС) (рис. 6.1).

Среда

ЭС2

ЭС2

ЭСn

Среда

Ресурсы

Конечная продукция



Отрасль i

ПС производства продукции

ПС распределения продукции

Валовый продукт



Промежуточный продукт

Загрязнение

Отходы



Рис. 6.1

Потоки продукции, циркулирующие между экономическими системами, показаны на рис. 6.2.

Среда

Экономика

Отрасль

1

Отрасль

n

Промежуточная

продукция

Рис. 6.2

Пусть  - количество отраслей продукции,

 - вектор валовой продукции (вектор выпуска),

 - вектор конечной продукции,

 - вектор промежуточной продукции (вектор затрат),

где  - валовая продукция -й отрасли,

 - конечная продукция -й отрасли,

 - промежуточная продукция -й отрасли.

Экономическая система характеризуется матрицей А ( производственная матрица).

**,

где  - количество продукции -й отрасли, которая затрачивается на производство единицы продукции -й отрасли (предполагается, что в каждой из отраслей производство осуществляется одним технологическим способом). Отрасли выпускают однородную продукцию.

, .

Учитывая, что на производство валовой продукции всех видов затрагивается , ,  - межотраслевые потоки -й продукции, векторы  и  свяжем линейным уравнением:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид продукции | 1 | 2 | ……. |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| ……. | ……. | ……. |  | ……. | ……. | ……. |
|  |  |  |  |  |  |  |



которую можно привести к виду

 .

Если , то есть ЭС использует весь валовый продукт на собственные нужды, то такая экономика и ее модель называются закрытыми. Если вырабатывается хоть один вид, ненулевой конечной продукции, то экономика и ее модель называются открытыми.

Модель Леонтьева можно использовать для того, чтобы:

1) вычислить по заданному количеству конечной продукции () необходимое количество валовой продукции ().

2) При заданном уровне выпуска валовой продукции () вычислить сколько будет конечного продукта ().

3) Исследовать влияние изменения технологии на производство, то есть вычислить как влияют изменения  на  и .

Для удобства математического исследования модель записывают в векторно-матричной форме

,

или в виде ,

где  - единичная матрица размера , ,

 - символ Кронекера.

«дельта»  а  - производственная матрица ЭС.

С точки зрения общей теории управления задача 2) известна как задача наблюдения для модели, которая отображает процесс распределения валовой продукции.

Задача анализа 

Задача синтеза 

(показывает процесс планирования валовой продукции  по заданному вектору конечной продукции ).

Существование единого решения такой системы связано с существованием обратной матрицы. Матрица  называется обратной матрицей Леонтьева или матричным мультипликатором модели (сокращенно мультипликатором Леонтьева).

По содержанию матрица



является матрицей коэффициентов полных затрат, так как экономическое объяснение ее элементов следующее:  показывает потребность в валовой продукции -й отрасли для производства единицы конечной продукции -й отрасли.

Произведение матрицы  на вектор конечного продукта  равняется .

Решение задачи синтеза  имеет вид:

,

Возникает вопрос относительно условий, при которых существует матрица , для любого неотрицательного вектора , вектор  также неотрицателен. В этом случае матрица  называется продуктивной. Матрица , называется неотрицательной, если все ее элементы неотрицательны. Матрица  любой ЭС по определению должна быть неотрицательной.

Условия продуктивности неотрицательной матрицы:

1) max собственное число матрицы  ,  - собственный вектор.

2)  имеет неотрицательную обратную матрицу .

3) Матричный ряд

.

(ряд Неймана) матрицы  сходится (при этом ).

4) последовательные главные миноры матрицы  положительные.

С 3) выплывает, что решение задачи синтеза можно получить итерационно, вычисляя по формуле:

,

,

где приблизительное решение задачи , с номером  - по предыдущему решению .

Поиск собственных чисел матрицы 

,

где  - собственный вектор.

Пример: Дана матрица 

. Найти  и 

 и  связаны уравнением

.



Чтобы такая система уравнения имела ненулевое решение, ее определитель должен быть роавен 0.

;

;

 

; ; 

для ;

Лекція 3

Тема : Модели межотраслевого баланса

1. В основе создания балансовых моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Если вместо понятия **продукт** ввести более общее понятие ресурс, то под балансовой моделью следует понимать систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования. Примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т.д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо менее жестко – как достаточность ресурсов для покрытия потребности и, следовательно, наличие некоторого резерва.

Важнейшие виды балансовых моделей:

* статические;
* динамические;
* частные материальные, трудовые и финансовые балансы;
* межотраслевые балансы;

Балансовый метод и создаваемые на его основе балансовые модели служат основным инструментом поддержания пропорций в народном хозяйстве. Для выявления диспропорций используется балансовые модели, в которых фактические ресурсы сопоставлялись бы с потребностью в них.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. Например, в модели межотраслевого баланса такую роль играет технологическая матрица. По многим причинам исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель является весьма серьезной проблемой. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической ) отрасли, т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др. В этих условиях понятия «межпродуктовый баланс» и «межотраслевой баланс» практически идентичны, отличие заключается лишь в единицах измерения элементов баланса.

Балансовые модели относятся к тому типу экономико-математических моделей, которые называются матричными. В матричных моделях балансовый метод получает строгое математическое выражение.

2. Первый квадрант МОБ — это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются xij, где i и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих. Так, величина x32 понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице этот раздел дан укрупнённо в виде одного столбца величин Yi; в развернутой схеме баланса конечный продукт каждой отрасли показан дифференцированно по направлениям использования на личное потребление населения, общественное потребление, на накопление, возмещение потерь, экспорт и др. Итак, второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде — также распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопление по отраслям производства и потребителям.

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумму амортизации (ci) и чистой продукции (vj+mj) некоторой j-й отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Zj.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно- чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Следует особо отметить, что хотя валовая продукция отраслей не входит в рассмотренные выше четыре квадранта, она представлена на принципиальной схеме МОБ в двух местах в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов (т.е. проверки самого баланса), так и для разработки экономико-математической модели межотраслевого баланса.

.

.

.

.

.

3. Рассмотрим баланс пр-ва и распределения продукции. Обозначим затраты живого труда в производстве j-го продукта через Lj, а объем производства этого продукта (валовой выпуск), как и раньше, через Xj. Тогда прямые затраты труда на единицу j-го вида продукции (коэффициент прямой трудоемкости) можно задать следующей формулой:

.

Введем понятие полных затрат труда как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции j-го вида через Tj, то произведения вида aijTi отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу j-го продукта через i-e средство производства; при этом предполагается, что коэффициенты прямых материальных затрат аij выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу j-го вида продукции (коэффициент полной трудоемкости) будут равны

 .

Введем в рассмотрение вектор-строку коэффициентов прямой трудоемкости t=(t1, t2,…,tn) и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости T=(T1, T2,…,Tn).

Тогда с использованием уже рассматриваемой выше матрицы коэффициентов прямых материальных затрат А (в натуральном выражении) систему уравнений можно переписать в матричном виде:

Т = ТА + t

Произведя очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы Е

Т -ТА = ТЕ -ТА = Т(Е -A) = t,

получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

Т = t(E -A)-1.

Т = tB=t(I-A)-1.

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы будет равна



Используя соотношения, приходим к следующему равенству:

,

tX = ТУ.

Лекция 4

Тема: Одноотраслевые динамические макроэкономические модели

1. Рассмотрим модель экономики, являющейся декомпозицией общей вербальной модели (рис. 8.1). Пусть ПС производства выпускает продукцию только одного вида (так называемая однопродуктовая или односекторная модель)

**ОПФ**

Экономика

**V**

**RI**

**Ry**

**Rx**

**F**

Амортизац. отчисления

Чистые инвестиции

I`

A

ΔK

K

x

y

I

Непроизводств. потребление

Производств. потребление

L

W

N

Среда E

C

Рис. 7.1

Xt=Wt+Ct+At+It .

На рисунке показаны факторы, характеризующие производственный процесс:

L – трудовые ресурсы,

ОПФ – ОПФ или основной капитал ,

N – природные ресурсы,

W – предметы труда, возвращенные в производство как часть валового продукта X.

В блоке распределения Px разделяется на W и конечный продукт Y. В блоке распределения Py разделяется на непроизводственное потребление C и инвестиции I. Инвестиции разделяются на амортизационные отчисления A и чистые инвестиции I1.

В блоке V чистые инвестиции I1 превращаются в прирост производственного капитала ΔK.

В модели рассмотрим взаимосвязи: x, y, L, I, I`, C. Предположим, что валовые инвестиции I в том же году полностью используются на прирост ОПФ и амортизацию.

В дискретном варианте эта связь имеет вид:

It=qּΔKt+At, (8.1

где ΔKt= Kt- Kt-1 – прирост капитала в году t, q – коэффициент пропорциональности (параметр модели), At=μּKt – амортизационные отчисления,

μ – коэффициент амортизации,

Kt – производств. капитал в году t.

В непрерывном варианте аналог уравнения (8.1) есть :

I(t)=q dK(t)/dt+μK(t).

Отсюда выведем уравнение движения капитала

 ,

Вернёмся к дискретному варианту:

*xt=Wt+yt;*

*yt=It+Ct;*

Так как It=qΔKt+At, то

xt=Wt+yt=Wt+It+Ct=Wt+qΔKt+At+Ct ;

Если предположить, что промежуточные затраты W являются пропорциональными выпуску валовой продукции XWt = axt , то

xt = axt+qΔKt+μKt-Ct,

или ΔKt=(1/q)[(1-a)xt-μKt-Ct] – дискретная однопродуктовая динамическая модель. Здесь a – коэффициент производственных затрат.

В непрерывном варианте :

K`(t)=(1/q)[(1-a)x(t)-μK(t)-C(t)] – непрерывная однопродуктовая динамическая модель.

2. Предположим, что все валовые инвестиции I направлены на введение в действие новых ОПФ (основной производственный капитал не изнашивается), при этом прирост выпуска продукции

Δxt = xt+1-xt,

пропорциональный инвестициям

It = νΔxt,

ν – коэффициент использования инвестиций,

тогда

Wt =axt,

a – коэффициент производственных затрат.

xt=Wt+yt,

yt=It+Ct ;

xt=axt+νΔxt+Ct;

В непрерывном варианте эта модель имеет вид

x(t)=ax(t)+ν dx(t)/dt+C(t).

3. Рассмотренные динамические модели односекторной экономики могут быть использованы для разных целей. С одной стороны на их основе можно создавать более сложные, но и более реальные многосекторные модели. С другой стороны их можно использовать для поиска путей наилучшего развития экономики. Это приводит к задачам оптимального управления.

Из непрерывной однопродуктовой динамической модели

K`(t)=(1/q)[(1-a)x(t)-μK(t)-C(t)],

можно записать:

x(t)=ax(t)+qK`(t)+μK(t)+C(t).

Наилучшим путем развития экономики на отрезке времени [t0, t1], t1<t0 может быть тот, что максимизирует дисконтированное суммарное потребление

,

где C(t) – непроизводственное потребление,

D(t) – функция дисконтирования, которая изображает меру предпочтений потребления продукции в данный момент времени t, по сравнению с другим моментом времени.

Выпуск продукции x(t) ограничивается производственными возможностями, которые определяются моментом времени t , капиталом K(t), трудовыми ресурсами L(t) и задаются функцией

X = F( t, K(t), L(t) ),

которая является производственной функцией. Для всех t используется неравенство

0≤x(t) ≤F( t, K(t), L(t) ),

Изменение капитала ограничено снизу

K(t) ≥ Kmin , t0 ≤ t ≤ t1 .

Кроме этого считается, что в начальный момент времени известен выпуск

x(t0)=x0 .