Министерство общего и профессионального образования РФ

Воронежский государственный университет

факультет **ПММ**

кафедра Дифференциальных уравнении

**Курсовая работа**

“Моделирование распределения потенциала

в МДП-структуре”

Исполнитель : студент 4 курса 5 группы

Никулин Л.А.

Руководитель : старший преподаватель

Рыжков А.В.

Воронеж 1998г.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В МДП-СТРУКТУРЕ**

**Математическая модель - - - - - - - - - - - - - - - - - - - *3***

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К**

**РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ**

**Использование разностных схем для решения**

**уравнения Пуассона и для граничных условий**

**раздела сред**

**Уравнение Пуассона - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - *5***

**Граничные условия раздела сред - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - *8***

**Общий алгоритм численого решения задачи**

**Метод установления - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - *10***

**Метод переменных направлений - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - *13***

**Построение разностных схем - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - *16***

**ПРИЛОЖЕНИЕ - - - - - - - - - - - - - - - - - - -**

**ЛИТЕРАТУРА - - - - - - - - - - - - - - - - - - -**

Математическая модель распределения потенциала в МДП-структуре

**Математическая модель**

Пусть***(x,y)*** - функция, описывающая распределение потенциала в полупроводниковой структуре. В области оксла (**СDEF**) она удовлетворяет уравнению Лапласа:

**d2**d2****

 **dx2 dy2**

а в области полупроводника (прямоугольник **ABGH**) - уравнению Пуассона:

**d2**  d2** = **

 **dx2 dy2**

где

 ***q*** - элементарный заряд ***e***;

**nn** -диэлектрическая проницаемость кремния;

***N*d(x,y)** -распределение концентрации донорской примеси в подложке ;

***N*a(x,y)** -распределение концентрации акцепторной примеси в подложке;

**** -диэлектрическая постоянная

Область окисла

Область полупроводника

 0 D E

 y

 B G

 C F

 A H

 x

Рис.1.

На контактах прибора задано условие Дирихле:

****| BC = *Uu***

****| DE = *Uз***

****| FG = *Uc***

****| AH = *Un***

На боковых сторонах полупроводниковой структуры требуется выполнение

однородного условия Неймана вытекающее из симметричности структуры

относительно линий лежащих на отрезках **AB** и **GH**:

**d** d****

**dy AB dy GH**

На боковых сторонах окисла так же задается однородное условие Неймана

означающее что в направлении оси OY отсутствует течение электрического

тока:

**d** d****

**dy  DC dy EF**

На границе раздела структуры окисел- полупроводник ставится условие

сопряжения :

****| -0 = **| +0**

**ok *E*x |-0 - nn *E*x |+0 = - Qss**

где **Qss** -плотность поверхностного заряда;

 **ok** -диэлектрическая проницаемость окисла кремния;

 **nn** -диэлектрическая проницаемость полупроводника .

Под символом “**+0**” и”**-0**” понимают что значение функции берется бесконечно близко к границе **CF** со стороны либо полупроводника либо окисла кремния . Здесь первое условие означает непрерывность потенциала при переходе границы раздела сред а второе - указывает соотношение связывающее величину разрыва вектора напряженности при переходе из одной среды в другую с величиной поверхностного заряда на границе раздела.

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К**

**РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ**

 **Использование разностных схем для решения уравнения Пуассона и для граничных условий раздела сред**

**Уравнение Пуассона**

 В области **{(x,y) : 0 < x < Lx , 0 < y < Ly }** вводится сетка

**W={(x,y) : 0 < i < M1 , 0 < j < M2}**

**x0 =0 , y0=0, xM1 = Lx , yM2 = Ly**

**xi+1 = xi + hi+1 , yj+1 = yj+ rj+1**

 **i = 0,...,M1-1 j = 0,...,M2-1**

Рис.2.

 yj yj+1/2 yj+1

xi-1

 hi

 xi- 1/2

 xi

 xi+1/2

 hi+1

xi+1

yj-1  yj-1/2

rj

Потоковые точки:

**xi+ ½  = xi + hi+1 , i = 0,1,...,M1-1**

**2**

**yj+ ½  = yj + rj+1 , j = 0,1,...,M2-1**

 **2**

Обозначим :

**U(xi,yj) = Uij**

**I(xi+½,yj) = Ii+½,j**

**I(xi,yj+½) = Ii,j+½**

Проинтегрируем уравнение Пуассона:

**** = - *q* (*N*d + *N*a)**

**0n**

 **Q(x,y)**

по области:

***V*ij = { (x,y) : xi- ½** < **x** < **xi+ ½  , yj- ½** < **y** < **yj+ ½  }**

**xi+ ½ yj+ ½  xi+ ½ yj+ ½**

** *dxdy =*  Q(x,y)*dxdy***

**xi- ½ yj- ½ xi- ½  yj- ½**

Отсюда:

**yj+½  xi+½**

**(Ex(xi+½,y) - Ex(xi-½,y) )*dx +* (Ey(x,yj+½) - Ey(x,yj-½))*dy=***

**yj-½  xi-½**

**xi+ ½ yj+ ½**

***=*  Q(x,y)*dxdy***

1. **½  yj- ½**

Здесь:

**Ex(x,y) = - d**(x,y)**

 **dx (\*)**

**Ey(x,y) = - d**(x,y)**

 **dy**

**x у**-компоненты вектора напряженности электрического поля **Е**.

Предположим при

**yj-½** < **y** < **yj- ½  Ex(xi + ½,yj) = Ei+ ½ ,j = const**

 **yj-½** < **y** < **yj- ½  Ex(xi - ½ ,yj) = Ei- ½ ,j = const (\*\*)**

 **xi-½** < **x** < **xi+ ½  Ey(xi, yj + ½) = Ei,j+ ½  = const**

**xi-½** < **x** < **xi+ ½  Ey(xi, yj -½ ) = Ei,j - ½  = const**

**xi- ½** < **x** < **xi+ ½**

**yj- ½** <  **y** <  **yj+ ½  -Q(x,y) = Qij = const**

Тогда

**(Ex)i+ ½ ,j - (Ex)i -½ ,j r\*j + (Ey)ij+ ½  - (Ey)ij- ½  h\*i = Qijh\*i r\*j**

где **h\*i = hi - hi+1 , r\*j = rj - rj+1**

 **2 2**

Теперь **Еi+ ½ ,j** выражаем через значение ****(x,y)** в узлах сетки:

**xi+1**

**x(x,yj)*dx =* - **i+1,j - **ij**

**xi**

из **(\*\*)** при **y=yj**:

**(Ex)i+ ½ ,j = - **i+1j - **ij**

 **hi+1**

Анологично :

**(Ey)i,j+ ½= - **ij+1 - **ij**

 **rj+1**

Отсюда:

**(**)ij = 1 **i+1,j - **ij - **i j - **i-1,j  + 1 **i j+1 - **ij - **ij - **ij-1 =**

 **h\*i hi+1 hi r\*j rj+1 rj**

**= *N*dij + *N*aij**

**Граничные условия раздела сред**

Рис.3.

 yj+1/2 yj+1

x-1

 h-1

 x-1/2

 x1/2

 h1

x1

yj-1  yj-1/2

rj

rj+1

 SiO2

 1

 Si y

 n

 x

Для области ***V*0j**

**yj+ ½ x ½**

**n0 (Ex(x ½ ,y) - E+x(0,y))dy + n0  (Ey(x,yj+ ½) - Ey(x,j- ½ ))dx =**

**yj- ½  0**

**x ½ yj+½**

**= q   (*N*d + *N*a)dxdy**

**0 yj-½**

Для области ***V`*0j**

**yj+ ½ x ½**

**n0 (E-x(0,y) - Ex(x -½,y))dy + n0  (Ey(x,yj+½) - Ey(x,j-½))dx = 0**

**yj- ½  0**

где  **E+x(0,y)** и **E-x(0,y)** -предельные значения **х** компоненты вектора

**Е** со стороны кремния и окисла.Складывая равенства и учитывая

условия:

**n0 d** + - 10 d** - = -Qss**

 **dx dx**

имеем

**yj+½ x½**

** (n0Ex(x½,y) - 10Ex(x-½,y) - Qss(y))*dy* + n0 (Ey(x,yj+½) + y(x,yj-½))*dx* +**

**yj-½  0**

**0 x½ yj+½**

**+ 10  (Ey(x,yj+½) - Ey(x,yj-½))dx = q  (*N*d + *N*a)*dxdy***

**x-½ 0 yj-½**

Сделав относительно **Ex** и **Ey** предположения анологичные **(\*\*)** положив **Qss(y) = Qss = const** при **yj-½ < y < yj+½** и учитывая условия :

**j+ = j- dj + = dj -**

 **dy dy**

“+”- со стороны кремния

“-“ - со стороны окисла

Получим :

**n0(Ex)½,j - 10(Ex)-½,j - Qss r\*j + n0h1 + 10h-1 .  (Ey)0,j+½  - (Ey)0,j-½ =**

2 2

**= q (*N*d0j - *N*a0j) h1r\*j**

**2**

что можно записать :

**1 n0 ij -0j - 10 0j - ij + n0h1 + 10h-1 0,j+1 - 0j - 0j - 0,j-1 =**

**h\* h1 h-1 2h\*r\*j rj+1  rj**

**= - q ( Nd0j - Na0j ) . h1 - Qss**

 **2 h\* h\***

где **h\* = h1 + h-1**

 **2**

**Общий алгоритм численого решения задачи**

**Метод установления**

Для вычисленя решений многих решений многих многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, рассматриватривают последнии как результат установленияразвивающегося во времени процесса, расчёт которых оказывается проще, чем прямой расчёт равновесного состояния.

Рассмотрим применение метода установления на примере алгоритма для вычисления решения задачи Дирихле:

**xxUmn + yyUmn = **(xm,yn) (1)**

**Umn|г = (smn) m,n = 1,2,...,M-1**

аппроксимирующий дифференциальную задачу Дирихле:

***d2U + d2U*  = **(x,y) 0<= x <=1**

***dx2 dy2* (2)**

 ***U*|г = (s) 0<= y <=1**

Вслучае задачи **(1)** удаётся провести теоретический анализ различных алгоритмов установления с помощью конечных рядов Фурье.

Способыточного решения задачи **(1)** выдерживающие обобщения на случай переменных коэффициенто и областей скриволинейной границей, например, метод исключения Гаусса , при сколько-нибудь больших и становится неудобным и не применяются.

Решение ***U*(x,y)** Задачи **(2)** можно понимать как не зависящую от времени температуру в точке **(x,y)** пластинки, находящейся в теплолвом равновесии. Функция ****(x,y)** и **(s)** означаютв таком случае соответственно распределения источников тела и температуру на границе.

Рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу о распределении тепла:

***dV = d2V + d2V* - **(x,y)**

 ***dt dx2 dy2***

***V*|г = (s) (3)**

***V*(x,y,0) = 0(x,y)**

где ****** и **** те же что и в задаче **(2)**, а **0(x,y)** - произвольная.

Поскольку источники теплп ****(x,y)** и температура на границе **(s)** не зависит от времени, то естественно, что и решение ***V*(x,y,t)** с течением времени будет менятся всё медленнее, распределение температур ***V*(x,y,t)** в пределе при t 🡪OO превращается в равновесное распределение тмператур ***U*(x,y)**, описываемое задачей **(2)**. Поэтому вместо стационарной задачи **(2)** можно решать нестационарную задачу **(3)** до того времени **t**, пока её решение перестаёт менятся в пределах интересующей нас точности. В этом состоит идеал решения стационарных задач методом установления.

В соответствии с этим вместо задачи **(2)** решается задача **(3)**, а вместо разностной схемы **(1)** для задачи **(2)** рассмотрим и составим три различные разностные схемы для задачи **(3)**.

Именно, рассмотрим простейшую явную разностною схему:

**Up+1mn - Upmn = xxUpmn + yyUpmn - **(xm,yn)**

 ****

 **Up+1mn|г = (smn) (4)**

**U0mn = xm,yn)**

Рассмотрим так же простейшую неявную разностную схему:

**Up+1mn - Upmn = xxUp+1mn + yyUp+1mn - **(xm,yn)**

****

**Up+1mn|г = (smn) (5)**

**U0mn =0(xm,yn)**

и исследуем схему применения направлений

**U’mn - Upmn = 1 [ xxU’mn + yyUpmn - **(xm,yn)]**

 ** 2**

**Up+1mn - U’mn = 1 [ xxU’mn + yyUp+1mn - **(xm,yn)]**

 ** 2 (6)**

**Up+1mn|г = U’mn|г = (smn)**

**U0mn = 0(xm,yn)**

Будем считать, что **0(xm,yn)** по уже известному **Up={Upmn}** для схемы **(4)** оссуществляется по уже явным формулам.

Вычисление **Up+1 = {Up+1mn}** по схеме **(5)** требует решения задачи :

**xxUp+1mn + yyUp+1mn - Up+1mn =  **(xm,yn) - Upmn**

**  (7)**

**Up+1mn|г = (smn)**

Вычисление **Up+1 = {Up+1mn}** по уже известным **Up = {Upmn}** по схеме **(6)** осуществляется прогонками в направлении оси **OX** для вычисления решений **{U’mn}** одномерных задач при каждом фиксированом **n**, а затем прогонками в направлнии оси **OY** для вычисления решений **{Up+1mn}** одномерных задач при каждом фиксированом **m**.

Для каждой из двух разностных схем **(4)** и **(6)** рассмотрим разность для счёта погрешностеи вычислений:

**pmn = Upmn - Umn**

между сеточной функцией **Up = {Upmn}** и точным решением **U = {Umn}** задачи **(1)**.

Решение **{Umn}** задачи **(1)** удовлетворяет уравнениям:

**Upmn - Umn = xxUmn - **(xm,yn)**

 ****

**Umn|г = (smn)**

**U0mn = Umn**

Вычитая эти равенства из **(4)** почленно, получим для погрешности **pmn** следующую разностную задачу:

**p+1mn - pmn = xxpmn + yypmn**

 ****

**p+1mn|г = 0 (9)**

**0mn = 0(xm,yn) - Umn**

Сеточная функция **pmn** при каждом **p** **(p=0,1,...)** обращается в ноль на границе **Г**.

**Метод переменных направлений**

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности:

***dU = LU + f*(x,t) , xG02 , t[0,t0]**

 ***dt***

***U*|г = (x,t) (1)**

***U*(x,0) = *U0*(x)**

***LU =* LU = (*L +L2*)*U* , где *L**U* = *d2U*  , =1,2**

***dx2***

Область **G0 =G0 = {0<= x <=*l* , =1,2}** -прямоугольник со сторонами ***l1*** и ***l2*, Г** - граница **G0 = G0 + Г**.

В **G0** построили равномерную по xa сетку **h** с шагами **h1 = *l1*/N1 , h2 = *l2*/N2.** Пусть **h** - граница сеточной области **h**, содержащая все узлы на сторонах прямоугольника, кроме его вершин, **hh + h.**

Оператор **L** заменим разностным оператором ****:

**y = yxx , **

В случае одномерного уравнения теплопроводности неявная схема на каждом слое приводит к разностной краевой задаче вида:

**Aiyi-1 - Ciyi + Biyi+1 = -F , i=1,...,N-1**

**y0=1 (2)**

**yn=N**

**Ai > 0, Bi > 0, Ci > Ai + Bi**

которая решается методом прогонки.

Рассмотрим теперь нашу двимерную задачу в прямоугольнике. Сетку **h** можно представить как совокупность узлов, расположенных на строках **i2=0,1,2,...,N2**, или как совокупность узлов расположенных на столбцах **i1=1,2,...,N1**. Всего имеется **N1+1** столбцов и **N2+1** строк. Число узлов в каждой строке равно **N1+1**, а в каждом столбце **N2+1** - узлов.

Если на каждой строке (или столбце) решать задачу вида **(2)** методом прогонки при фиксированом **i2**(или **i1**), то для отыскания решения на всех строках (или столбцах), т.е. во всех узлах сетки, понадобится **О(N1N2)** арифметических действий. Основная идея большинства экономичных методов и состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач вида **(2)** вдоль строк и вдоль столбцов.

Наряду с основными значениями искомой сеточной функции **y(x,t)**, т.е. с **y = yn** и **y` = yn+1** вводится промежуточное значение **y = yn+½** , которое можно формально рассматривать как значение при **t = tn+½ = n+½** . Переход от слоя **n** на слой **n+1** совершается в два этапа с шагами **0.5t** .

**yn+½ - yn = 1yn+½ + 2yn + **n (3)**

**0.5t**

**yn+1 - yn+½ = 1yn+½ + 2yn+1 +**n  (4)**

**0.5t**

Эти уравнения пишутся во всех внутренних узлах **x = xi** сетки **h** и для всех **t=th > 0**.

Первая схема неявная по направлению **х1** и явная по **х2**, вторая схема явная по **х1** и неявная по **х2**. К уравнениям **(3),(4)** надо добавить начальные условия:

**y(x,0) = *U*0(x) , xh (5)**

и разностно краевые условия, например, в виде:

**yn+1 = n+1 при i1=0, i2=N2 (6)**

**yn+½  =  при i1=0, i2=N1 (7)**

где ** = 1 (n+1 + n) -  L2(n+1 - n) (8)**

 **2 4**

Т.о. , разностная краевая задача **(3)-(8)** соответствует задаче **(1)**. Остановимся на методе решения этой задачи. Пререпишем **(3)** и **(4)** в виде:

**2 y - 1 y = F , F = 2 y + 2 y + ****

* **9)**

**2y` - 2 y` = F’ , F = 2 y + 1 y + ****

* ****

Введём обозначения:

**xi = (i1h1 , i2h2)**

**F = Fi1,i2**

**y = yi1,i2**

при этом, если в уравнении один из индексов фиксирован, то его не пишем. Тогда **(9)** можно записать в виде **(2)**, т.е.:

**1 yi1-1 - 2 1 + 1 yi1 + 1 yi1+1 = - Fi1**

**h21 h21  h21**

**i1 = 1,...,N1-1 (10)**

**y = при i1 = 0,N1**

**1 y`i2-1 - 2 1 + 1 y`i2 + 1 y`i2+1 = - Fi2**

**h22 h22  h22**

**i2 = 1,...,N2-1 (11)**

**y` = ` при i2 = 0,N2**

Пусть задано **у=уn**. Тогда вычисляем **F**, затем методом прогонки вдоль строк **i2=1,...,N2-1** решаем задачу **(10)** и определим **y’** во всех узлах сетки **h**, после чего вычисляем **F** и решаем задачу **(11)** вдоль столбцов **i1=1,...,N1-1**, определяя **y`=yn+1**. При переходе от слоя **n+1** к слою **n+2** процедура повторяется, т.е. происходит всё время чередование направлений.

**Построение разностных схем**

Для каждой области МДП - структуры построим консервативную разностную схему, учитывая при этом заданные условия.

Разобьём данную МДП - структуру на несколько областей следующим образом:

***L M N***

 y

***K***0

***K***1

x

***II***

***I***

***III***

Рис.4

***I*** : **jk0,y = Un**

 ** . **k+½i-1,y + 1 +  +  . **k+½ij -  . **k+½i+1y = ij**

**2h\*ihi 2h\*ihi+1 2h\*i2hi 2h\*ihi+1**

****k1,y = Un**

**где ij = **kij +  (y**kij + *f*kij )**

**2**

**y = 1 **kij+1 - **kij - **kij - **kij-1**

 **r\*j rj+1 rj**

***II: *ij=U3**

** . **k+½i-1,j + 1 +  +  . **k+½ ij -  **k+½i+1,j =**

**2h\*ihi 2h\*ihi+1 2h\*ihi 2h\*ihi+1**

****kij +  y**kij**

 **2 , 0** < **i** < **k0-1 L**< **j** <**M**

 **ok  . **k+½ i-1,j + - nn - ok . **k+½ ij + n  . **k+½ i+1,j = \*ij , i=k0**

 **h\*i-1 h\*hi h\*hi-1 h\*ihi**

 ** . **k+½i-1,j + 1 +  +  . **k+½ ij -  . **k+½i+1,j =**

 **2h\*ihi 2h\*ihi 2h\*ihi 2h\*ihi+1**

**= **kij +  y**kij - *f* kij ,k0+1**< **i** < **k1**

 **2**

****k1,j = Un**

...

***III*** : ****k0,j =Uc**

 ** . **k+½i-1,j + 1 +  +  . **k+½ ij -  **k+½i+1,j =**

**2h\*ihi 2h\*ihi+1 2h\*ihi 2h\*ihi+1**

**=**kij +  y (**kij - *f* kij ), M+1** < **j** < **N**

 **2**

****k1,j = Un**

Разностные схемы **(I)-(III)** решаются методом прогонки в направлении оси **OX**.

y

***V***

***K0***

Рис.5ю5

***IV***

***VI***

***L M N***

***K1***

 x

()

Разностные схемы **(IV)-(VI)** также решаются методом прогонки в направлении оси **OY**.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Годунов С.К.,Рыбинский В.С.: ”Разностные схемы”
2. Кобболд Р.: “Теория и приминение транзисторов”
3. Самарский А.М.: “Теория разностных схем”
4. Самарский А.М.,Николаев Е.С.: “Методы решения сеточных уравнений”
5. Самарский А.А.,Андреев В.Б.: “Разностные методы решения эллиптических уравнений”
6. Калиткин Н.Н.: ”Численные методы”