Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Математический факультет

Кафедра МПМ

Реферат

**Начала систематического курса планиметрии в средней школе**

Исполнитель: студентка

группы М-32 Чучмай А.Ю.

Научный руководитель:

Канд. физ-мат. наук,

доцент Лебедева М.Т.

Гомель 2007

**Содержание**

Введение

1. Методика ознакомления учащихся с аксиомами в курсе школьной геометрии

2. Методика введения понятий и теорем в курсе геометрии

3. Методическая схема изучения признаков равенства треугольников

Заключение

Литература

# Введение

Одна из главных задач обучения геометрии состоит в усвоении учащимися её теоретических основ и овладение навыками применения их на практике, в развитии логического мышления учащихся, способности к доказательным, аргументированным рассуждениям. При изучении школьного курса геометрии развиваем пространственное воображение и представление учащихся, геометрическое “видение” окружающего мира.

Пособие Погорелова характеризуется более высоким уровнем строгости изложения теоретического материала в начале курса. Здесь приводится полный список аксиом, необходимые определения и теоремы, доказательства. Строгость изложения рассматривается как средство выработки у учащихся навыков полноценной логической аргументации. Усилена роль задач в обучении. Это происходит за счет рационального и компактного изложения теоретического материала и повышения удельного веса содержательных задач, практически отсутствуют задания на разучивание определений, подведение к теоремам. При изложении материала используются методы синтетической и аналитической геометрии (например, изложение векторной алгебры происходит с применением метода координат).

Логико-математическая система учебника (его логическая структура, система определений, доказательство) должна учитывать выборочное применение нескольких математических методов. Координаты, векторы, геометрические преобразования способствует не только тому, что курс геометрии становится более современным, но является и новым методами изложения учебного материала.

# 1. Методика ознакомления учащихся с аксиомами в курсе школьной геометрии

Традиционно-синтетические аспекты занимают ведущее положение в геометрии, служат основой изложения остального материала, способствуют формированию пространственного представления и воображения учащихся (недаром некоторые разделы традиционно-синтетической геометрии(параллельность, перпендекулярность прямых и плоскостей, жесткость треугольника) называют “строительной геометрией”).

Придавая темам: параллельные и перпендикулярные прямые, признаки равенства треугольников, свойства равнобедренного и равностороннего треугольников, окружность, описанная около треугольника (вписанная в треугольник), задача на построение; четырёхугольники, правильные многоугольники, излагаем традиционно, максимальные образовательные цели, можно увидеть в них начала систематического курса геометрии.

В качестве вспомогательного математического метода к традиционно-синтетическому рассматривается координатно-векторный метод. Подготовка к вспомогательному методу выражается в раннем введении системы координат в ознакомлении учащихся с примерами решения задач координатным или векторно-координатным методом, в использовании формул расстояния между точками, если отказаться от координатно-векторного метода. Одновременное введение традиционно-синтетического и координатного методов в начале курса может быть обеспечено применением аксиоматически смешанного типа, причем неизбежно избыточной. Аксиоматику, в этом случае, следует рассматривать как инструмент рационализации логико-математической системы учебника.

Роль аксиом в построении школьного курса геометрии.

Цель – сформировать базу для построения доказательств. Аксиомы ориентируются на изложение и традиционно-синтетической, и аналитической частей учебного курса. В качестве аксиом выбираются уже известные из пропедевтического курса факты, близкие к наглядным представлениям. Новым для учащихся в них является предельно точный математический язык, на котором формируются. Приведение аксиом в начале курса означает систематизацию ранее известных знаний и дополнение их новыми знаниями.

Дидактические формы приведения аксиом могут быть различными. В учебнике Погорелова использовано неформальное введение, при котором приводится немало аксиом, но выделяются и формируются только те из них, которые систематически используются в дальнейшем изложении.

Приводятся аксиомы принадлежности, измерение отрезков и углов, откладывание отрезков и углов, существование треугольника, равного данному, параллельность. Наличие аксиом измерения упростило введение меры для отрезков и углов. Аксиома откладывания отрезков и углов позволила строго доказать признаки равенства треугольника.

Методика ознакомления учащихся с аксиомами в курсе.

Вводятся аксиомы неформально, т.е. первоначально вместо слов “аксиома”, “теорема”, “доказательство” используются “основное свойство”, “свойство”, “объяснение”. Сами термины вводятся в \*\*\* “Основные свойства простейших геометрических фигур”, когда учащиеся приобретут некоторый опыт применения аксиом в доказательствах.

Например, учащимся предлагаются отдельные предложения, после ознакомления с которыми они должны ответить на вопросы, в формулировке которых используются термины: “основное свойство”, “свойство”, “что такое…”, “какая фигура называется…?”

1. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну. Назовите основное свойство прямой.
2. Две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.
3. Отрезком **AB** называется часть прямой **a**, точками которой являются все точки **х** этой прямой, лежащие между **А** и **В**. Точки **А** и **В** называются концами отрезка. Что называется “отрезком **АВ**”? Какая фигура называется отрезком?
4. Два отрезка называются равными, если они имеют одинаковую длину.
5. Треугольники равны, если у них соответствующие стороны и соответствующие стороны углы равны.

Рассмотрим методику изучения основных свойств.

1. Основные свойства принадлежности.

1,а) Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие прямой.

1,б) Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Наглядное введение аксиом сопровождается логическим анализом их формулировок, необходимый для выяснения точного математического смысла каждой аксиомы. Анализ поправляется вопросами:

О каких геометрических фигурах говорится в основном свойстве 1,а)? Что именно говорится о прямых и точках? Сколько утверждений сформулировано в основном свойстве 1,а)? Сформулируйте их по отдельности. Какими другими словами “какова бы ни была прямая”? (“Для любой прямой” и “для каждой прямой”)

Закрепление практических навыков построения прямых и точек и усвоение соответствующей математической терминологии могут быть осуществлены с помощью математического диктанта:

1. Постройте прямую а. Отметьте точки А и В, принадлежащие прямой а. Постройте С и Д, не принадлежащие прямой а.
2. Постройте две пересекающиеся прямые c и d. Обозначьте буквой А точку пересечения этих прямых. Постройте точку В, принадлежащую прямой с, но не принадлежащую прямой d. Отметьте точку С, принадлежащую прямой d, но не принадлежащую прямой с.
3. Основные свойства расположения.

2,а) Из трех точек на прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.

2,б) Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.

Методическая схема введения аксиом:

1. ввести аксиому на наглядной основе;
2. сформулировать аксиому;
3. выполнить логический нализ формулировки аксиом;
4. провести математический диктант.
5. Основные свойства измерения отрезков и углов.

3,а) Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длины частей, на которые он разбивается любой своей точкой.

3,б) Каждый угол имеет определённую длину, большую нуля. Развёрнутый угол равен . Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

1. Основные свойства откладывания отрезков и углов.

4,а) На любой полупрямой от её начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

4,б) От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, и только один.

4,в) Каковы бы ни были треугольник и полупрямая, существует треугольник, равный данному, у которого первая вершина лежит в начале полупрямой, вторая – на полупрямой, а третья – в заданной полуплоскости относительно полупрямой и её продолжения.

Конкретно-индуктивным методом следует пользоваться лишь при изучении трудных для понимания аксиом. Рассмотрим один из вариантов введения аксиомы 4,в).

Начертим: , полупрямую ; отметим полуплоскость относительно .(полупрямой и её продолжения)

Вопрос: Можно ли построить , равный , который бы распологался следующим образом:

а) вершина совмещалась бы с началом полупрямой ;

б) вершина лежала бы на полупрямой ;

в) вершина лежала бы в заданной полуплоскости относительно полупрямой и её продолжения?

 будем “строить” с помощью картонной модели . Построение направляем вопросами:

Что дано?(, полупрямая , полуплоскость); Что требуется построить? Каким четырём условиям должен удовлетворять ? Покажите, как можно построить такой с помощью нашей модели. После построения делаем вывод.

5) Основное свойство параллельных прямых.

Через точку не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

Использованная методическая форма приведения аксиом в учебнике Погорелова впервые была дана в учебнике Киселёва, а именно:

Аксиомы формулируются, но без внешнего подчеркивания формально-логического аспекта(они не нумеруются, не сообщаются названия групп). Формально-логический аспект не подчеркивается и в первых доказательствах. Непосредственные ссылки на аксиомы в этих доказательствах не делаются(они подразумеваются и при необходимости в устном изложении на уроке могут быть сделаны). Такому приёму свойственны неформальный стиль изложения и активное обращение к наглядности в первых доказательствах. Ссылки в доказатьльствах появляются после изучения признаков равенства треугольников. Подобная “маскировка” аксиом позволяет на первый план выдвинуть наглядно-геометрическую(содержательную) сторону доказательств, которые при этом тесно связываются с возможными интуитивными рассуждениями учащихся.

В учебнике Погорелова, в отличии от приведенного изложения по Киселёву, предпринята попытка формализации начала курса(чёткое выделение аксиом, ссылок в первых доказательствах)

# 2. Методика введения понятий и теорем в курсе геометрии

Ряд математических понятий является неопределенным. В учебнике Погорелова к ним отнесены: точка, прямая, точка принадлежащая прямой; “точка В лежит между точками А и С”; “полуплоскость”, “длина отрезка”, “мера угла”, “отложить отрезок(угол) заданной меры”. Свойства неопределяемых понятий описываются аксиомами. Все остальные понятия – определяемые.

Отметим особенности некоторых определений:

1)отрезок определяется таким образом, что концы ему не принадлежат; в связи с этим нельзя использовать обозначение с помощью квадратных скобок; 2) полупрямая определяется т.о., что начальная точка ей не принадлежит; 3) угол определяется так, что вершина угла не принадлежит ему; 4) вершины треугольника (но определённого) принадлежат ему:

“Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки - сторонами”.

“Углом называется фигура, которая состоит из точки - вершины угла – и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки - стороны угла”.

Одним из центральных понятий для всего курса геометрии является понятие *равных треугольников.* В учебнике Киселёва равенство треугольников определяется с помощью положения. В пособии Погорелова А.В. сразу вводится общие понятия равенства фигур (с помощью перемещения). Определение равенства треугольников, по учебнику Погорелова (первые издания) для школьной практики новые, т.к.

“Треугольники и называются равными, если у них .” Как видно из этого определения, речь идет о равенстве не просто каких-либо двух треугольников, а треугольников, между которыми установлено соответствие: , по этой причине, например, равенство = может выполняться, но для “тех же” треугольников равенство: = может оказаться несправедливым. ”

В действующем пособии Погорелова А.В. используется следующее определение равенства треугольников:

“Треугольники называются равными, если у них соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон”.

# 3. Методическая схема изучения признаков равенства треугольников

Систематический курс геометрии начнем изучать в 7 классе со знакомства с основными свойствами простейших геометрических фигур, которые сформулированы в виде аксиом.

№ 47, стр.23

АС и ВС пересекаются, т.е. точка В лежит в одной полуплоскости, а точка А – в другой (?)

Точка В1 (АС) и лежит между точками А и С

Точка А1 (ВС) и лежит между точками В и С

Рассмотрим прямую (АА1), тогда точки А и С принадлежат разным полуплоскостям, т. к. отрезки АС и ВС пересекаются. Поэтому точки В и В1 (т.к. В1 лежит между С и А) лежат в разных полуплоскостях и, следовательно, АА1 ВВ1

При решении используется понятие полуплоскости и аксиома IV (см. страница 8)

После изучения §1 учащимся даются понятия: аксиомы, теоремы, приводятся простейшие формы доказательств. (прочитать пункт 13 «аксиомы», страница 19) № 22 § 2, страница 32

Воспользуемся т. 1.1. (стр.17), согласно которой, из того что пересечена одна из сторон ∆ АВС (СА), прямая пересечет еще одну из оставшихся двух.

Рассмотрим ДОА. Если ДОА < АОВ, то луч ОД лежит между лучами АО и ОВ и, следовательно, пересекает отрезок АВ.

Если ДОА > ВОА, то луч ОД пересечет отрезок ВС (это связано

Следующими условиями: ВОА < ДОА и луч ОД лежит между лучами ОС и ОВ.

Методика изучения признаков равенства треугольников.

Изложение вопросов о равенстве треугольников во многом зависит от выбора определения равных треугольников. В учебнике Погорелова А.В. приводится гильбертовское определение равенства треугольников, которое требует выполнения шести равенств: трех для соответственных сторон треугольников и трех для соответственных углов этих треугольников. (смотри определение равенства на стр. 14)

Рассмотрим еще один вариант изложения темы равные треугольники:

1. Для равенства двух треугольников потребуем (по определению) равентсов трех соответствующих сторон этих треугольников;
2. В качестве аксиомы примем следующие утверждения: «Если две стороны и угол, заключенный между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны».

Такой подход позволяет не доказывать третий признак равенства треугольников (это предусмотренно в 1.) и I признаках равенства треугольниках (это аксиома), что приводит к сокращению теоретического материала и упрощению логической структуры темы «Равенство треугольников», позволяет кратчайшим путем ввести один из основных методов традиционно-синтетической геометрии – метод равных треугольников.

Методика изучения первого признака равенства треугольников. Методическая схема по Погорелову А.В.:

1. Построить два треугольника, у которых равны две пары соответствующих сторон и углы, заключенные между ними;
2. На основании полученного рисунка сформулируйте теорему записать ее условие и заключение;
3. Сообщить идею доказательства;
4. Сообщить план доказательства;
5. Провести доказательство с четким выделением его шагов;
6. Осуществить закрепление его доказательства;
7. Рассмотреть с учащимися задачи на примере признака.

Итак, пусть по сторонам В, С и углу А с помощью транспортира и линейки построено два треугольника: ∆ АВС и ∆ А1В1С1

Что можно сказать о ∆ АВС и ∆ А1В1С1 ?

После о том, что эти треугольники равны, формулируем теорему. Выясняем: что дано в этой теореме, а что надо доказать. Рядом с рисунком 1 краткую запись теоремы:

Дано: АВ =А1В1; АС=А1С1; А = А1

Доказать: ∆ АВС = ∆ А1В1С1

Сообщаем ученикам идею доказательства: рассмотреть третий ∆ А1В2С2, который: 1. равен ∆ АВС и расположен таким образом, что 2. его вершина В2 лежит на полупрямой А1В1; 3. вершина С2 находится в той же полуплоскости относительно прямой А1В1, в которой лежит вершина С1.

Теорема будет доказана, если установлено, что ∆ А1В2С2 совпадает с ∆ А1В1С1.

Составляем план доказательства:

* 1. Рассмотрим ∆ А1В2С2, о котором говорилось выше;
	2. Докажем, что вершина В2 совпадает с вершиной В1;
	3. Докажем, что луч А1С2 совпадает с лучом А1С1;
	4. Докажем, что вершина С2 совпадает с вершиной С1;
	5. Сделаем заключение о равенстве ∆ АВС и ∆ А1В1С1.

Приводим краткую запись доказательства на доске (оно выполняется учителем по ходу изложения, записывать доказательство в тетрадях не нужно),

1) ∆ А1В2С2 = ∆ АВС аксиома IV3

2) т.к. А1В1 = А1В2, то В2 совпадает с В1 аксиома IV1

3) т.к. В1А1С1 = В2А1С2, то лучи А1С2 и А1С1 совпадают

 аксиома IV2

4) т.к. А1С1 = А1С2, то точки С2 и С1 совпадают аксиома IV1

5) ∆ А1В2С2 и ∆ А1В1С1 совпадают п.п. 2,4

6) ∆ АВС = ∆ А1В1С1  п.п. 5,1

Вопросы для закрепления

1. Как был выбран ∆ А1В2С2?
2. Почему вершина В2 совпадает с вершиной В1 ?
3. Зачем нужно доказывать совпадения лучей А1С2 и А1С1 ?
4. Почему вершина С2 совпадает с вершиной С1 ?
5. Почему делается вывод о равенстве ∆ АВС и ∆ А1В1С1

Рассмотрим еще одну методическую схему изучения этого признака:

1. рассмотреть решение ряда подготовительных задач;
2. доказать первый признак рав-ва треугольников.

Подготовительные задачи:

1. отрезки А1В1 и А1В2 равны отрезку АВ и отложены на полупрямой А1В1. Что ещё можно сказать о расположении отрезков А1В1 и А1В2 ?
2. Углы В1А1С1 и В1А1С2 равны углу А. Что можно сказать о расположении углов В1А1С1 и В1А1С2 ? Что можно сказать о расположении лучей А1С1 и А1С2, если они находятся в одной полуплоскости относительно прямой А1В1?
3. Треугольники А1В1С1 и А1В2С2 равны, вершина В2 лежит на полупрямой А1В1, вершина С2 лежит в одной полуплоскости (относительно прямой А1В1) с вершиной С1. Докажите, что эти треугольники совпадают, т.1. вершинаВ2 совпадают с вершиной В1, вершина С2 – с вершиной С1.

Рассмотренная первой методическая схема доказательства основана на применении репродуктивного метода обучения и он наиболее эффективен при изучении третьего признака равенства треугольников, наиболее сложного.

Схема решения задач па данной теме:

* 1. ученики читают задачу один – два раза, выполняют рисунок, записывают условие и требования задачи. Рассказать о требованиях к построению чертежей при решении задач по планеметрии.
	2. Учитель направляет разбор задачи вопросами: “Что дано в задаче?”, “Что говорится о таком – то треугольнике?”, “Что ещё дано?”, “Что требуется выполнить в задаче?”, “С чего начнем выполнение рисунка?”, “Что ещё надо нарисовать?” и т. д.
	3. Далее приступаем к поиску решения задачи:

Рассмотрим некоторые задачи. №5, §3, стр.45

Дано:

Доказать:

Доказательство:

У данных треугольников есть по одной равной паре соответствующих сторон и одному равному углу прилежащему к этой стороне. Для док-ва рав-ва треугольников по II признаку следует найти ещё пару равных углов - как вертикальные по II признаку рав-ва треугольников.

№32, §3, стр.47 Дано: А, В, С, Д лежат на одной прямой;

Доказать:

Доказательство:

1) ;

2) - по I признаку равенства треугольников;

3) ;

4) - по I признаку равенства треугольников;

№39, §3, стр.48

Дано:

Доказать:

Доказательство:

1) (по условию); (по условию); - по III признаку равенства треугольников;

2) ;

3) - по I признаку равенства треугольников;

4) и - по III признаку равенства треугольников;

Ч.т.д.

# Заключение

Традиционно-синтетические аспекты занимают ведущее положение в геометрии, служат основой изложения остального материала, способствуют формированию пространственного представления и воображения учащихся (недаром некоторые разделы традиционно-синтетической геометрии(параллельность, перпендекулярность прямых и плоскостей, жесткость треугольника) называют “строительной геометрией”).

Придавая темам: параллельные и перпендикулярные прямые, признаки равенства треугольников, свойства равнобедренного и равностороннего треугольников, окружность, описанная около треугольника (вписанная в треугольник), задача на построение; четырёхугольники, правильные многоугольники, излагаем традиционно, максимальные образовательные цели, можно увидеть в них начала систематического курса геометрии.

В качестве вспомогательного математического метода к традиционно-синтетическому рассматривается координатно-векторный метод. Подготовка к вспомогательному методу выражается в раннем введении системы координат в ознакомлении учащихся с примерами решения задач координатным или векторно-координатным методом, в использовании формул расстояния между точками, если отказаться от координатно-векторного метода. Одновременное введение традиционно-синтетического и координатного методов в начале курса может быть обеспечено применением аксиоматически смешанного типа, причем неизбежно избыточной. Аксиоматику, в этом случае, следует рассматривать как инструмент рационализации логико-математической системы учебника.

## Литература

1. К.О. Ананченко «Общая методика преподавания математики в школе», Мн., «Унiверсiтэцкае»,1997г.

2.Н.М.Рогановский «Методика преподавания в средней школе», Мн., «Высшая школа», 1990г.

3.Г.Фройденталь «Математика как педагогическая задача»,М., «Просвещение», 1998г.

4.Н.Н. «Математическая лаборатория», М., «Просвещение», 1997г.

5.Ю.М.Колягин «Методика преподавания математики в средней школе», М., «Просвещение», 1999г.

6.А.А.Столяр «Логические проблемы преподавания математики», Мн., «Высшая школа», 2000г.