**В. Я. Пивкин, Е. П. Бакулин, Д. И. Кореньков**

**Нечеткие множества в системах управления**

***Под редакцией  
доктора технических наук, профессора Ю.Н. Золотухина***

|  |
| --- |
| Данное методическое пособие является введением в теорию нечетких множеств - активно развивающейся в последние годы раздел математики, позволяющей моделировать приближенные рассуждения человека. В рукописном виде пособие было основой курса лекций, читавшегося на кафедре 'Автоматизации физико-технических исследований' физического факультета НГУ. |

**Оглавление**

Предисловие 3

ВВЕДЕНИЕ 4

1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА 5

Примеры записи нечеткого множества 5

Основные характеристики нечетких множеств 5

Примеры нечетких множеств 6

О методах построения функций принадлежности нечетких множеств 7

Операции над нечеткими множествами 8

Наглядное представление операций над нечеткими множествами 9

Свойства операций  и . 9

Алгебраические операции над нечеткими множествами 10

Расстояние между нечеткими множествами, индексы нечеткости 13

Принцип обобщения 16

2. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ 17

Операции над нечеткими отношениями 18

Композиция двух нечетких отношений 21

Условные нечеткие подмножества. 23

3. НЕЧЕТКАЯ И ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННЫЕ 27

Нечеткие числа 28

Операции над нечеткими числами 28

Нечеткие числа (L-R)-типа 29

4. НЕЧЕТКИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ И НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ 32

Правила преобразований нечетких высказываний 33

Способы определения нечеткой импликации 33

Логико-лингвистическое описание систем, нечеткие модели. 35

Модель управления паровым котлом 36

Полнота и непротиворечивость правил управления 39

Литература 40

### Предисловие

    Пожалуй, наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

Значительное продвижение в этом направлении сделано 30 лет тому назад профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Его работа "Fuzzy Sets", появившаяся в 1965 году в журнале Information and Control, ╬ 8, заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека и явилась начальным толчком к развитию новой математической теории.

    Что же предложил Заде? Во-первых, он расширил классическое канторовское понятие **множества**, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале (0;1), а не только значения 0 либо 1. Такие множества были названы им **нечеткими** (*fuzzy*). Л.Заде определил также ряд операций над нечеткими множествами и предложил обобщение известных методов логического вывода modus ponens и modus tollens.

Введя затем понятие **лингвистической переменной** и допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, Л.Заде создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражений.

Дальнейшие работы профессора Л.Заде и его последователей заложили прочный фундамент новой теории и создали предпосылки для внедрения методов нечеткого управления в инженерную практику.

Уже к 1990 году по этой проблематике опубликовано свыше 10000 работ, а число исследователей достигло 10000, причем в США, Европе и СССР по 200-300 человек, около 1000 - в Японии, 2000-3000 - в Индии и около 5000 исследователей в Китае.

    В последние 5-7 лет началось использование новых методов и моделей в промышленности. И хотя первые применения нечетких систем управления состоялись в Европе, наиболее интенсивно внедряются такие системы в Японии. Спектр приложений их широк: от управления процессом отправления и остановки поезда метрополитена, управления грузовыми лифтами и доменной печью до стиральных машин, пылесосов и СВЧ-печей. При этом нечеткие системы позволяют повысить качество продукции при уменьшении ресурсо и энергозатрат и обеспечивают более высокую устойчивость к воздействию мешающих факторов по сравнению с традиционными системами автоматического управления.

Другими словами, новые подходы позволяют расширить сферу приложения систем автоматизации за пределы применимости классической теории. В этом плане любопытна точка зрения Л.Заде: "Я считаю, что излишнее стремление к точности стало оказывать действие, сводящее на нет теорию управления и теорию систем, так как оно приводит к тому, что исследования в этой области сосредоточиваются на тех и только тех проблемах, которые поддаются точному решению. В результате многие классы важных проблем, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными для того, чтобы допустить точный математический анализ, оставались и остаются в стороне по той причине, что они не поддаются математической трактовке. Для того чтобы сказать что-либо существенное для проблем подобного рода, мы должны отказаться от наших требований точности и допустить результаты, которые являются несколько размытыми или неопределенными".

Смещение центра исследований нечетких систем в сторону практических приложений привело к постановке целого ряда проблем таких, как новые архитектуры компьютеров для нечетких вычислений, элементная база нечетких компьютеров и контроллеров, инструментальные средства разработки, инженерные методы расчета и разработки нечетких систем управления и многое другое.

Основная цель предлагаемого вниманию читателей учебного пособия - привлечь внимание студентов, аспирантов и молодых научных сотрудников к нечеткой проблематике и дать доступное введение в одну из интереснейших областей современной науки.

профессор Ю.Н.Золотухин

май 1995г.

### ВВЕДЕНИЕ

    Математическая теория нечетких множеств, предложенная *Л.Заде* более четверти века назад, позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы. Основанные на этой теории методы построения компьютерных нечетких систем существенно расширяют области применения компьютеров. В последнее время нечеткое управление является одной из самых активных и результативных областей исследований применения теории нечетких множеств. Нечеткое управление оказывается особенно полезным, когда технологические процессы являются слишком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов, или когда доступные источники информации интерпретируются качественно, неточно или неопределенно. Экспериментально показано, что нечеткое управление дает лучшие результаты, по сравнению с получаемыми при общепринятых алгоритмах управления. Нечеткие методы помогают управлять домной и прокатным станом, автомобилем и поездом, распознавать речь и изображения, проектировать роботов, обладающих осязанием и зрением. Нечеткая логика, на которой основано нечеткое управление, ближе по духу к человеческому мышлению и естественным языкам, чем традиционные логические системы. Нечеткая логика, в основном, обеспечивает эффективные средства отображения неопределенностей и неточностей реального мира. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволяет построить модель, адекватную реальности.

### 1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

Пусть **E** - универсальное множество, ***x*** - элемент **E**, а **R** - некоторое свойство. Обычное (четкое) подмножество **A** универсального множества **E**, элементы которого удовлетворяют свойству **R**, определяется как множество упорядоченных пар **A = {A (*х*)/*х*}**, где

**A(*х*)** - *характеристическая функция*, принимающая значение **1**, если ***x*** удовлетворяет свойству **R,** и **0** - в противном случае.

Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов ***x*** из **E** нет однозначного ответа *"да-нет"* относительно свойства **R**. В связи с этим, нечеткое подмножество **A** универсального множества **E** определяется как множество упорядоченных пар **A = {A(*х*)/*х*}**, где

**A(*х*)** - *характеристическая функция принадлежности* (или просто функция принадлежности), принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве **M** (например, **M = [0,1]**). Функция принадлежности указывает *степень* (или уровень) принадлежности элемента ***x*** подмножеству **A**. Множество **M** называют *множеством принадлежностей*. Если **M = {0,1}**, то нечеткое подмножество **A** может рассматриваться как обычное или четкое множество.

#### Примеры записи нечеткого множества

Пусть **E = {*x1, x2, x3, x4, x5* }**, M **= [0,1]**; A - нечеткое множество, для которого

A(*x*1)=0,3;

A(*x*2)=0;

A(*x*3)=1;

A(*x*4)=0,5;

A(*x*5)=0,9.

Тогда **A** можно представить в виде:

A = **{0,3/*x*1**; **0/*x*2**; **1/*x*3**; **0,5/*x*4**; **0,9/*x*5 }** или

A **= 0,3/*x*1 + 0/*x*2 + 1/*x*3 + 0,5/*x*4 + 0,9/*x*5**, или

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 | | 0,3 | 0 | 1 | 0,5 | 0,9 | |

.

Замечание. Здесь знак "**+**" не является обозначением операции сложения, а имеет смысл объединения.

#### Основные характеристики нечетких множеств

Пусть **M = [0,1]** и **A** - нечеткое множество с элементами из универсального множества **E** и множеством принадлежностей **M**.

Величина ** A(*x*)** называется ***высотой*** нечеткого множества **A**. Нечеткое множество **A** ***нормально***, если его высота равна **1**, т.е. верхняя граница его функции принадлежности равна **1** (** A(*x*)=1**). При **A(*x*)<1** нечеткое множество называется ***субнормальным***.



Нечеткое множество *пусто*, если  *xE*  A(*x*)=0. Непустое субнормальное множество можно нормализовать по формуле A(*x*) := .



Нечеткое множество ***унимодально***, ** A(*x*)=1** только на одном ***x*** из E.

***Носителем*** нечеткого множества **A** является обычное подмножество со свойством **A(*x*)>0**, т.е. ***носитель* A = {x/A(*x*)>0}**  **xE**.

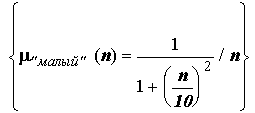
Элементы *xE*, для которых **A(*x*)=0,5** называются ***точками перехода*** множества **A**.

#### Примеры нечетких множеств

Пусть **E =** {0,1,2,..,10}, M =[0,1]. Нечеткое множество *"несколько"* можно определить следующим образом: "*несколько*" = 0,5/3+0,8/4+1/5+1/6+0,8/7+0,5/8; его характеристики: *высота* **= 1**, *носитель***=**{3,4,5,6,7,8}, *точки перехода* - {3,8}.

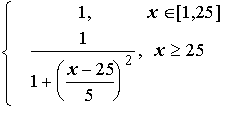
Пусть **E = {**0,1,2,3,...,***n***,...**}.** Нечеткое множество "*малый*" можно определить:

***"малый"*** = .



Пусть **E** = {1,2,3,...,100} и соответствует понятию "*возраст*", тогда нечеткое множество "*молодой*", может быть определено с помощью

***"молодой"*(*x*) =** .



Нечеткое множество "*молодой*" на универсальном множестве **E'** ={*Иванов, Петров, Сидоров*,...} задается с помощью функции принадлежности **"*молодой*"**(*x*) на **E** = {1,2,3,..100} (возраст), называемой по отношению к **E'** функцией совместимости, при этом:

***"молодой"***(*Сидоров*):= ****"*молодой*"(*x*), где ***x*** - возраст Сидорова.

Пусть **E** = {*Запорожец, Жигули, Мерседес*,....} - множество марок автомобилей, а **E'** = [0,) - универсальное множество "*стоимость*", тогда на **E'** мы можем определить нечеткие множества типа: "*для бедных*", "*для среднего класса*", "*престижные*", с функциями принадлежности типа:



Имея эти функции и зная стоимости автомобилей из **E** в данный момент времени, мы тем самым определим на **E'** нечеткие множества с этими же названиями.

Так, например, нечеткое множество "*для бедных*", заданное на универсальном множестве **E** = {*Запорожец, Жигули, Мерседес*,....} выглядит следующим образом:



Аналогично можно определить Нечеткое множество "*скоростные*", "*средние*", "*тихоходные*" и т.д.

#### О методах построения функций принадлежности нечетких множеств

В приведенных выше примерах использованы ***прямые***методы, когда эксперт либо просто задает для каждого ***xE*** значение  **A(*x*)**, либо определяет функцию совместимости. Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т.д., или когда выделяются полярные значения.

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для каждого из них определить полярные значения, соответствующие значениям функции принадлежности, 0 или 1.

Например в задаче распознавания лиц можно выделить следующие шкалы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 1 |
| ***x***1 | высота лба | низкий | широкий |
| ***x***2 | профиль носа | курносый | горбатый |
| ***x***3 | длина носа | короткий | длинный |
| ***x***4 | разрез глаз | узкие | широкие |
| ***x***5 | цвет глаз | светлые | темные |
| ***x***6 | форма подбородка | остроконечный | квадратный |
| ***x***7 | толщина губ | тонкие | толстые |
| ***x***8 | цвет лица | темный | светлый |
| ***x***9 | очертание лица | овальное | квадратное |

Для конкретного лица **А** эксперт, исходя из приведенной шкалы, задает ***A*(*x*)** [0,1], формируя векторную функцию принадлежности **{ *A*(*x1*), *A*(*x2*),... *A*(*x9*)}.**

При *прямых* методах используются также групповые прямые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретное лицо и каждый должен дать один из двух ответов: "*этот человек лысый*" *или "этот человек не лысый*", тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, дает значение ** *"лысый"*** (данного лица). (В этом примере можно действовать через функцию совместимости, но тогда придется считать число волосинок на голове у каждого из предъявленных эксперту лиц).

***Косвенные*** методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяется интересующее нас нечеткое множество. Как правило, это методы попарных сравнений. Если бы значения функций принадлежности были нам известны, например, ***A*(*xi*)** = ***wi***, ***i***=1,2,...,***n***, то попарные сравнения можно представить матрицей отношений **A** = {***aij***}, где ***aij***=***wi/wj*** (операция деления).

На практике эксперт сам формирует матрицу **A**, при этом предполагается, что диагональные элементы равны 1, а для элементов симметричных относительно диагонали ***aij*** = 1***/aij***, т.е. если один элемент оценивается в  раз сильнее чем другой, то этот последний должен быть в 1/ раз сильнее, чем первый. В общем случае задача сводится к поиску вектора ***w***, удовлетворяющего уравнению вида **А*w*** = max***w***, где max - наибольшее собственное значение матрицы **A**. Поскольку матрица **А** положительна по построению, решение данной задачи существует и является положительным.

#### Операции над нечеткими множествами

***Включение***.

Пусть **A** и **B** - нечеткие множества на универсальном множестве E.

Говорят, что **A** содержится в **B**, если ***x E* A(*x*) B(*x*).**

*Обозначение*: **A  B**.

Иногда используют термин "*доминирование*", т.е. в случае когда **A**  **B**, говорят, что **B** доминирует **A**.

***Равенство***.

**A** и **B** равны, если ***xE* A(*x*) = B (*x*).**

*Обозначение*: **A** = **B**.

***Дополнение.***

Пусть  = [0,1], **A** и **B** - нечеткие множества, заданные на **E**. **A** и **B** дополняют друг друга, если

***xE* A(*x*) = 1 -  B(*x*).**

*Обозначение*: **B** = или **A** = .



Очевидно, что = **A**. (Дополнение определено для **M** = [0,1], но очевидно, что его можно определить для любого упорядоченного **M**).



***Пересечение***.

**A****B** - наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в **A** и **B**.

**AB(*x*) = min( A(*x*),  B(*x*)).**

***Объединение.***

**А  В** - наименьшее нечеткое подмножество, включающее как **А**, так и **В**, с функцией принадлежности:

**A B(*x*) = max(A(*x*),  B(*x*)).**

***Разность.***

**А - B = А** с функцией принадлежности:



**A-B(*x*) = A  (*x*) = min( A(*x*), 1 -  B(*x*)).**



***Дизъюнктивная сумма.***

**АB = (А - B)(B - А) = (А ) ( B)** с функцией принадлежности:



**A-B(*x*) = max{[min{ A(*x*), 1 - B(*x*)}];[min{1 - A(*x*), B(*x*)}] }**

Примеры.

Пусть:

**A** = 0,4/ **x**1 + 0,2/ **x**2+0/ **x**3+1/ **x**4;

**B** = 0,7/ **x**1+0,9/ **x**2+0,1/ **x**3+1/ **x**4;

**C** = 0,1/ **x**1+1/ **x**2+0,2/ **x**3+0,9/ **x**4.

Здесь:

**AB**, т.е. **A** содержится в **B** или **B** доминирует **A**, **С** *несравнимо* ни с **A**, ни с **B**, т.е. пары {**A, С**} и {**A, С**} - пары недоминируемых нечетких множеств.

A  B  C.

= 0,6/ **x**1 + 0,8/**x**2 + 1/**x**3 + 0/**x**4;



= 0,3/**x**1 + 0,1/**x**2 + 0,9/**x**3 + 0/**x**4.



**AB** = 0,4/**x**1 + 0,2/**x**2 + 0/**x**3 + 1/**x**4.

**АВ** = 0,7/**x**1 + 0,9/**x**2 + 0,1/**x**3 + 1/**x**4.

**А - В** = **А** = 0,3/**x**1 + 0,1/**x**2 + 0/**x**3 + 0/**x**4;



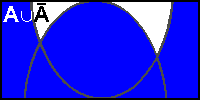
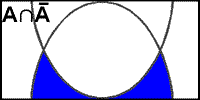
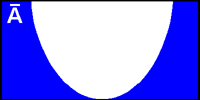
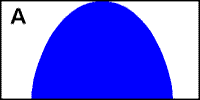
**В - А** = **В** = 0,6/**x**1 + 0,8/**x**2 + 0,1/**x**3 + 0/**x**4.



**А  В** = 0,6/**x**1 + 0,8/**x**2 + 0,1/**x**3 + 0/**x**4.

#### Наглядное представление операций над нечеткими множествами

   Для нечетких множеств можно строить визуальное представление. Рассмотрим прямоугольную систему координат, на оси ординат которой откладываются значения **A(*x*)**, на оси абсцисс в произвольном порядке расположены элементы **E** (мы уже использовали такое представление в примерах нечетких множеств). Если **E** по своей природе упорядочено, то этот порядок желательно сохранить в расположении элементов на оси абсцисс. Такое представление делает наглядными простые операции над нечеткими множествами.



На верхней части рисунка заштрихованная часть соответствует нечеткому множеству **A** и, если говорить точно, изображает область значений **А** и всех нечетких множеств, содержащихся в **A**. На нижней - даны , **A** , **A** .



#### Свойства операций  и .

Пусть **А, В, С** - нечеткие множества, тогда выполняются следующие свойства:

- коммутативность;



- ассоциативность;



- идемпотентность;



- дистрибутивность;



**A = A**, где **** - *пустое множество*, т.е. **(x) = 0 >xE**;

A = ;

**AE = A**, где **E** - универсальное множество;

AE = E;

- теоремы де Моргана.



В отличие от четких множеств, для нечетких множеств в общем случае:

A  ,



A  E.



(Что, в частности, проиллюстрировано выше в примере наглядного представления нечетких множеств).

Замечание. Введенные выше операции над нечеткими множествами основаны на использовании операций **max** и **min**. В теории нечетких множеств разрабатываются вопросы построения обобщенных, параметризованных операторов пересечения, объединения и дополнения, позволяющих учесть разнообразные смысловые оттенки соответствующих им связок "*и*", "*или*", "*не*".

Один из подходов к операторам пересечения и объединения заключается в их определении в *классе треугольных норм и конорм*.

***Треугольной нормой*** (***t****-нормой*) называется двуместная действительная функция **T**:[0,1][0,1][0,1], удовлетворяющая следующим условиям:

**T**(0,0)=0; **T**(**A**, 1) = **A**; **T**(1, ** A**) = **A** - *ограниченность*;

T(A, B) T(C, D), если AC , BD - *монотонность*;

T(A ,  B) = T(B, A) - *коммутативность*;

T(A, T( B, C))= T( T(A, B), C) - *ассоциативность*;

Простым случаем треугольных норм являются:

**min**(**A** , ** B**)

произведение **AB**

**max**(0, **A** + ** B** -1).

***Треугольной конормой*** (***t****-конормой*) называется двуместная действительная функция :[0,1][0,1] [0,1], со свойствами:

**T**(1,1) = 1; **T(A** ,0) = ** A** ; **T**(0, ** A**) = **A** - *ограниченность*;

T(A, B ) T(C, D ), если A C , B D - *монотонность*;

T(A , B ) = T(B , A ) - *коммутативность*;

T(A, T(B , C )) = T(T(A , B ), C ) - *ассоциативность*.

Примеры ***t***-конорм:

max(A,  B)

A + B - A B

min(1, A + B).

#### Алгебраические операции над нечеткими множествами

Алгебраическое произведение **A** и **B** обозначается **AB** и определяется так:

**xE AB (*x*) = A(*x*)B(*x*).**

Алгебраическая сумма этих множеств обозначается и определяется так:



***xE*** **=  A(*x*) + B(*x*)A(*x*)B(*x*).**



Для операций {, } выполняются свойства:



- коммутативность;



- ассоциативность;



A = , A = A, AE = A, AE = E



- теоремы де Моргана.



Не выполняются:

- идемпотентность;



- дистрибутивность;



а также A = , A = E.



Замечание. Доказательства приводимых свойств операций над нечеткими множествами мы оставляем читателю.

Для примера докажем свойство: . Обозначим **A(*x*)** через ***a***, **B(*x*)** через ***b***. Тогда в левой части для каждого элемента ***х*** имеем: 1-***ab***, а в правой: (1-***a***)+(1-***b***)-(1-***a***)(1-***b***) = 1-***a***+1-***b*-**1+***a***+***b-ab*** = 1-***ab***. 



Докажем, что свойство дистрибутивности не выполняется, т.е. **A(BC)  (AB)(AC)**. Для левой части имеем: ***a***(***b***+***c-bc***) = ***ab***+***ac-abc***; для правой: ***ab***+***ac***-(***ab***)(***ac***) = ***ab***+***ac***+***a*2*bc***. Это означает, что дистрибутивность не выполняется при ***aa*2**. 



Замечание. При совместном использовании операций {, ,,} выполняются свойства:

А(BC) = (AB)(A  C);

А (BC) = (AB)(AC);

А(BC) = (AB)(AC);



А(BC)=(AB)(AC).



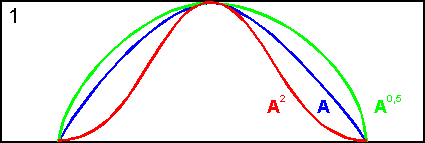
Продолжим обзор основных операций над нечеткими множествами.

На основе операции алгебраического произведения (по крайней мере для целых **** эта основа очевидна) определяется операция *возведения в степень* **** нечеткого множества **A**, где **** - положительное число. Нечеткое множество **A** определяется функцией принадлежности **A = A(x)**. Частным случаем возведения в степень являются:

**CON(A) = A2** - операция *концентрирования*,

**DIL(A) = A0,5** - операция *растяжения*,

которые используются при работе с лингвистическими неопределенностями.



Умножение на число. Если **** - положительное число, такое, что ** A(*x*)**1, то нечеткое множество **A** имеет функцию принадлежности:



A(*x*) = A(*x*).

Выпуклая комбинация нечетких множеств. Пусть **A**1, **A**2,.., **A**n - нечеткие множества универсального множества **E**, а **1, 2, ..., n** - неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Выпуклой комбинацией **A**1, **A**2,.., **A**n называется нечеткое множество **A** с функцией принадлежности:

***xE* A(*x*1, *x*1,..., *x*n) = 1A1(*x*) + 2A2(*x*) + ... + nAi(*x*).**

Декартово произведение нечетких множеств. Пусть **A**1, **A**2, ..., **A**n - нечеткие подмножества универсальных множеств **E**1, **E**2, ..., **E**n соответственно. Декартово произведение **A = A**1**A**2  ...**A**n является нечетким подмножеством множества **E = E**1**E**2  **...****E**n с функцией принадлежности:

A(*x*1, *x*1, ..., *x*n) = min{ A1(*x*1), A2(*x*2) , ... , Ai(*x*n) }.

Оператор увеличения нечеткости используется для преобразования четких множеств в нечеткие и для увеличения нечеткости нечеткого множества.

Пусть **A** - нечеткое множество, **E** - универсальное множество и для всех ***xE*** определены нечеткие множества **K(*х*)**. Совокупность всех **K(*х*)** называется ядром оператора увеличения нечеткости **Ф**. Результатом действия оператора **Ф** на нечеткое множество A является нечеткое множество вида:

Ф(A, K) = A (*x*)K(*х*),



где **A(*x*)K(*х*)** - произведение числа на нечеткое множество.

Пример:

**E** = {1,2,3,4};

**A** = 0,8/1+0,6/2+0/3+0/4;

**K**(1) = 1/1+0,4/2;

**K**(2) = 1/2+0,4/1+0,4/3;

**K**(3) = 1/3+0,5/4;

**K**(4) = 1/4.

Тогда

**Ф(A,K)** = **A**(1) **K**(1) **A**(2)**K**(2) **A**(3)**K**(3) **A**(4)**K**(4) =

= 0,8(1/1+0,4/2)  0,6(1/2+0,4/1+0,4/3) =

= 0,8/1+0,6/2+0,24/3.

*Четкое множество -уровня (или уровня )*. Множеством -уровня нечеткого множества **A** универсального множества **E** называется *четкое* подмножество **A** универсального множества **E**, определяемое в виде:

**A** ={***x***/ **A**(***x***)}, где 1.

Пример: **A** = 0,2/x1 + 0/x2 + 0,5/x3 + 1/x4 ,

тогда **A0.3** = {***x***3,***x***4},

**A0.7** = {***x***4}.

Достаточно очевидное свойство: если 1 2 , то **A**1 **A**2 .

Теорема о декомпозиции. Всякое нечеткое множество **A** разложимо по его множествам уровня в виде:

**A** = **A **, где **A** - произведение числа **** на множество **A**, и **** "пробегает" область значений **M** функции принадлежности нечеткого множества **A**.



Пример: **A** = 0,1/***x***1 + 0/***x***2 + 0,7/***x***3 + 1/***x***4 представимо в виде:

**A** = 0,1(1,0,1,1)  0,7(0,0,1,1,)  1(0,0,0,1)=

= (0,1/x1 + 0/x2 + 0,1/x3 + 0,1/x4) (0/x1 + 0/x2 + 0,7/x3 + 0,7/x4)

(0/x1 + 0/x2 + 0/x3 + 1/x4) = 0,1/x1 +0/x2 +0,7/x3 +1/x4 .

Если область значений функции принадлежности состоит из ***n*** градаций 1 2 3 ... n, то **A** (при фиксированных значениях градаций) представимо в виде:

**A** = ****i**A**i,



т.е. определяется совокупностью обычных множеств { **A**1, **A**2, ..., **A**i}, где **A**1 **A**2 , ..., **A**i.

#### Расстояние между нечеткими множествами, индексы нечеткости

Пусть **A** и **B** - нечеткие подмножества универсального множества **E**. Введем понятие расстояния (**A**, **B**) между нечеткими множествами. При введении расстояния обычно предъявляются следующие требования:

(**A, B**)  0 - неотрицательность;

(**A, B**) = (**B, A**) - симметричность;

(**A, B**) < (**A, C**) + (**C, B**).

К этим трем требованиям можно добавить четвертое: (**A, A**) = 0.

Определим следующие расстояния по формулам:

Расстояние Хемминга (или *линейное расстояние*):

(**A, B**) = **A**(xi) - **B**(xi) .



Очевидно, что (**A, B**)[0, *n*].

Евклидово или квадратичное расстояние:

(**A, B**) = , (**A, B**)[0, ].



Относительное расстояние Хемминга:

(**A, B**) = , (**A, B**)[0,1].



Относительное евклидово расстояние:

(**A, B**)=, (**A, B**)[0,1].



Расстояние Хемминга и квадратичное расстояние, в случае когда **E** бесконечно, определяются аналогично с условием сходимости соответствующих сумм:

если **E** счетное, то

(**A, B**) = **A**(xi) - **B**(xi) ,



(**A, B**) = ;

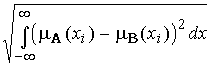


если **E** = **R** (числовая ось), то

(**A, B**) = ,



(**A, B**) = .



Замечание. Здесь приведены два наиболее часто встречающихся определения понятия расстояния. Разумеется, для нечетких множеств можно ввести и другие определения понятия расстояния.

   Перейдем к *индексам нечеткости* или *показателям размытости* нечетких множеств.

Если объект ***х*** обладает свойством ***R*** (порождающим нечеткое множество **A**) лишь в частной мере, т.е.

0**<A(*x*)**<1, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта ***х*** в отношении **R** проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, "обладающих свойством **R**", и классу объектов, "не обладающих свойством **R**". Эта двусмысленность максимальна, когда степени принадлежности объекта обеим классам равны, т.е. **A**(*x*) = (*x*) = 0,5, и минимальна, когда объект принадлежит только одному классу, т.е. либо **A**(*x*) = 1 и **(*x*)** = 0, либо **A**(*x*) = 0 и **(*x*)** = 1.



В общем случае показатель размытости нечеткого множества можно определить в виде функционала **d(A)** со значениями в **R** (положительная полуось), удовлетворяющего условиям:

**d(A)** = 0 тогда и только тогда, когда **А** - обычное множество;

**d(A)** максимально тогда и только тогда, когда **A**(*x*) = 0.5 для всех ***xE***.

**d(A)d(B)**, если **A** является *заострением* ***B***, т.е.

**A**(*x*)**B**(*x*) при **B**(*x*) < 0,5;

**A**(*x*)**B**(*x*) при **B**(*x*) > 0,5;

**A**(*x*)- любое при **B**(*x*) = 0,5.

**d(A) = d**() - симметричность по отношению к 0,5.



d(AB)+d(AB) = d(A)+d(B).

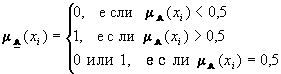
Замечание. Приведенная система аксиом при введении конкретных показателей размытости часто используется частично, т.е., например, ограничиваются свойствами **P1, P2** и **P3**, либо некоторые свойства усиливаются или ослабляются в зависимости от решаемой задачи.

Рассмотрим индексы нечеткости (показатели размытости), которые можно определить, используя понятие расстояния.

Обычное множество, ближайшее к нечеткому

Пусть **A** - нечеткое множество. *Вопрос:* какое обычное множество **AE** является ближайшим к **A**, т.е. находится на наименьшем евклидовом расстоянии от нечеткого множества **A**. Таким подмножеством, обозначаемым **A**, является подмножеством с характеристической функцией:

.



Обычно принимают **A**(xi) = 0, если **A**(xi) = 0,5.

Используя понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому, введем следующие индексы нечеткости нечеткого множества **А**.

Линейный индекс нечеткости:



Здесь (**A, A**) - линейное (хеммингово) расстояние, множитель - обеспечивает выполнение условия 0<d(**A**)<1.



Квадратичный индекс нечеткости

, 0<d(**A**)<1.



Здесь (**A, A**) - квадратичное (евклидово) расстояние.

*Замечания.*

1. Мы ввели линейный и квадратичный индексы нечеткости, используя понятие расстояния и понятие обычного множества, ближайшего к нечеткому. Эти же индексы можно определить, используя операцию дополнения, следующим образом:

- линейный индекс,



- квадратичный индекс.



2. Отметим следующие свойства, связанные с ближайшим обычным множеством:

**АВ=АВ,**

**АВ=АВ;**

а также **xE:|A(xi)-A(xi)|=**, откуда для линейного индекса нечеткости имеем:



,



т.е. в этом представлении становится очевидным, что d(**A**)=d().



3. Нечеткое множество с функцией принадлежности иногда называют векторным индикатором нечеткости.



Оценка нечеткости через энтропию

Ограничимся случаем конечного универсального множества. Энтропия системы с n состояниями 1,2, ..., n, с которыми связаны вероятности p1,p2, ..., pn определяется выражением:

H(*p*1, *p*2, ..., *p*n) = - *p*i ln *p*i, Hmin = 0, Hmax = 1.



В случае нечетких множеств положим:

A(xi) =



Тогда общую формулу, позволяющую подсчитать энтропию по нечеткости, можно записать в следующем виде:

H(A(x1), A(x2), ..., A(xn)) = - A(xi) ln A(xi).



*Замечание.* Попытки использования энтропии в теории нечетких множеств (в приведенном выше виде) показали, что это не лучший способ оценки. Однако работы по обобщению понятия энтропии для нечетких множеств продолжаются.

#### Принцип обобщения

Принцип обобщения - одна из основных идей теории нечетких множеств - носит эвристический характер и используется для расширения области применения нечетких множеств на отображения. Пусть **X** и **Y** - два заданных универсальных множества. Говорят, что имеется функция, определенная на **X** со значением в **Y**, если, в силу некоторого закона f, каждому элементу **X****X** соответствует элемент y**Y**.

Когда функцию f: **X****Y** называют отображением, значение f(x)**Y**, которое она принимает на элементе x**X**, обычно называют образом элемента x.

Образом множества **А**Х при отображении с**Y** называют множество f(**A**)**Y** тех элементов **Y**, которые являются образами элементов множества **А**.

*Замечание.* Мы напомнили классическое определение отображения, которое в теории нечетких множеств принято называть четким отображением, т.к. наряду с ним мы введем понятие нечеткого отображения (или нечеткой функции).

Будем говорить, что имеется нечеткая функция f, определенная на **X** со значением в **Y**, если она каждому элементу x**X** ставит в соответствие элемент y**Y** со степенью принадлежности f(x,y). Нечеткая функция f определяет нечеткое отображение f**:XY**.



Принцип обобщения заключается в том, что при заданном четком f**:X****Y** или нечетком f**:XY** отображении для любого нечеткого множества **А**, заданного на **Х**, определяется нечеткое множество f(**A**) на **Y**, являющееся образом **A**.



Пусть f**:XY** заданное четкое отображение,

а **A** = {A(x)/х}- нечеткое множество в **Х**. Тогда образом **А** при отображении f является нечеткое множество f(**A**) на **Y** с функцией принадлежности:

****f(A)(y) = ****A(x); y**Y**,



где f -1(y)={x/f(x)=y}.

В случае нечеткого отображения f**:XY**, когда для любых x**X** и y**Y** определена двуместная функция принадлежности f(x,y), образом нечеткого множества **А**, заданного на Х, является нечеткое множество f(**A**) на **Y** с функцией принадлежности:



****f(A)(y) = **min(**A(x), ****f(x,y)).



*Замечание.* Мы не приводим примеров использования принципа обобщения. Предлагаем подумать, каким образом можно определить нечеткое число и как с помощью принципа обобщения (не забывая декартова произведения) и классических операций возведения числа в степень(одноместная), сложения и умножения (двуместные) получать соответствующие нечеткие результаты. К нечетким отображениям мы вернемся, когда будем рассматривать понятие нечеткого отношения.

### 2. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ

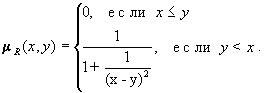
Пусть **Е = Е1Е2 ...Еn** - прямое произведение универсальных множеств и **М** - некоторое множество принадлежностей (например **М** = [0,1]). Нечеткое n-арное отношение определяется как нечеткое подмножество **R** на **E**, принимающее свои значения в **М**. В случае **n**=2 и **М** = [0,1], нечетким отношением **R** между множествами **X = Е1** и **Y = Е2** будет называться функция **R:(X,Y)** [0,1], которая ставит в соответствие каждой паре элементов (х,y)**XY** величину **R**(x,y) [0,1]. Обозначение: нечеткое отношение на **XY** запишется в виде: x**X**, y**Y**: **xRy**. В случае, когда **X = Y**, т.е. **X** и **Y** совпадают, нечеткое отношение **R:** XX[0,1] называется нечетким отношением на множестве **X**.

Примеры:

Пусть **X** = {x1,x2,x3}, **Y** = {y1,y2,y3,y4}, **М** = [0,1]. Нечеткое отношение **R=XRY** может быть задано, к примеру, таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | y1 | y2 | y3 | y4 |
| x1 | 0 | 0 | 0,1 | 0,3 |
| x2 | 0 | 0,8 | 1 | 0,7 |
| x3 | 1 | 0,5 | 0,6 | 1 |

Пусть **X** = **Y** = (-, ), т.е. множество всех действительных чисел. Отношение x>>y (x много больше y) можно задаеть функцией принадлежности:

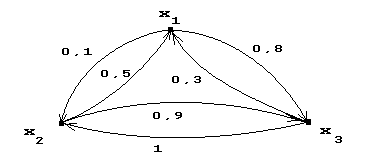


Отношение **R**, для которого **R**(x,y) = ***e****-k(x-y)2*, при достаточно больших k можно интерпретировать так: "x и y близкие друг к другу числа".

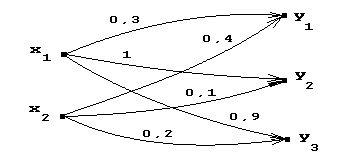
В случае конечных или счетных универсальных множеств очевидна интерпретация нечеткого отношения в виде нечеткого графа, в котором пара вершин (xi,xj) в случае XRX соединяется ребром с весом **R**(xi,xj), в случае **XRY** пара вершин (xi,yj) соединяется ребром c весом **R**(xi,yj).

Примеры:

Пусть Х={x1,x2,x3}, и задано нечеткое отношение R: XX [0,1], представимое графом:



Пусть X={x1,x2} и Y={y1,y2,y3}, тогда нечеткий граф вида:



задает нечеткое отношение **XRY**.

*Замечание.* В общем случае нечеткий граф может быть определен на некотором **G****X****Y**, где **G** - множество упорядоченных пар (x,y) (необязательно всех возможных) такое, что **G** =  и **G** = **X****Y**.



Будем использовать обозначения вместо и вместо .



Пусть **R**: **X****Y**[0,1].

**Носитель нечеткого отношения.**

Носителем нечеткого отношения **R** называется обычное множество упорядоченных пар (x,y), для которых функция принадлежности положительна:

**S(R)**={(x,y): **R**(x,y)>0}.

Нечеткое отношение содержащее данное нечеткое отношение, или содержащееся в нем.

Пусть **R1** и **R2** - два нечетких отношения такие, что:

(x,y)**X** **Y**: **R1**(x,y)**R2**(x,y),

тогда говорят, что **R2** содержит **R1** или **R1** содержится в **R2** .

*Обозначение:* **R1R2** .

Пример:



Отношения **R1** , **R2** - отношения типа y>>x (y много больше x). При k2 > k1 отношение **R2** содержит **R1** .

#### Операции над нечеткими отношениями

Объединение двух отношений ***R1*** и **R2**.

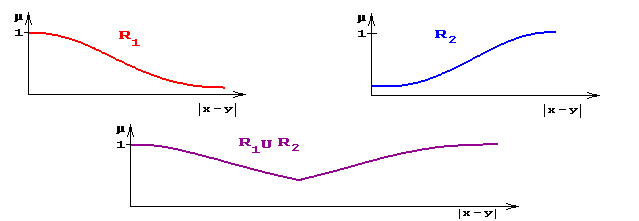
Объединение двух отношений обозначается **R1R2** и определяется выражением:

**R1R2**(x,y) = **R1**(x,y)**** **R2**(x,y)

Примеры:

**1.** Ниже изображены отношения действительных чисел, содержательно означающие: x**R1**y - "числа x и y очень близкие", **xR2y** - "числа x и y очень различны" и их объединение x**R1R2**y - "числа x и y очень близкие или очень различные".

Функции принадлежности отношений заданы на |y-x|.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| R1R2(x,y) = |      | R1(x,y), | y - x |   R2(x,y), | y - x | > |

где **** - такое |y-x|, что **R1**(x,y) = **R2**(x,y)

**2.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | R1 | | | | |  | y1 | y2 | y3 | | x1 | 0,1 | 0 | 0,8 | | x2 | 1 | 0,7 | 0 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | R2 | | | | |  | y1 | y2 | y3 | | x1 | 0,7 | 0,9 | 1 | | x2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | R1R2 | | | | |  | y1 | y2 | y3 | | x1 | 0,7 | 0,9 | 1 | | x2 | 1 | 0,7 | 0,5 | |

Пересечение двух отношений.

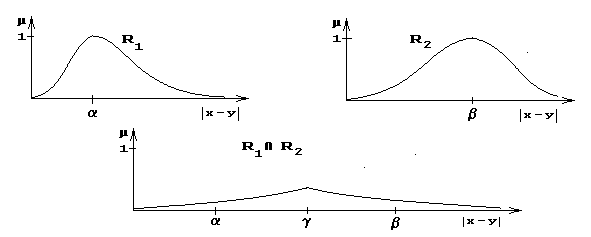
Пересечение двух отношений **R1** и **R2** обозначается **R1R2** и определяется выражением:

**R1R2**(x,y) = **R1**(x,y)**** **R2**(x,y)

.

Примеры:

**1.** Ниже изображены отношения: x**R1**y, означающее "модуль разности |y-x| близок к ", x**R2**y, означающее "модуль разности |y-x| близок к ", и их пересечение.



Алгебраическое произведение двух отношений.

Алгебраическое произведение двух отношений **R1** и **R2** обозначается **R1R2** и определяется выражением:

**R1R2**(x,y) = **R1**(x,y) **R2**(x,y)

Алгебраическая сумма двух отношений.

Алгебраическая сумма двух отношений R1 и R2 обозначается R1R2 и определяется выражением: .



Для введенных операций справедливы следующие свойства дистрибутивности:

R1(R2R3) = (R1R2 )(R1R3),

R1(R2R3) = (R1R2)(R1R3),

R1(R2R3) = (R1R2)(R1R3),

R1(R2R3) = (R1R2)(R1R3),

R1(R2R3) = (R1R2)(R1R3),



R1(R2R3) = (R1R2) (R1R3).



Дополнение отношения.

Дополнение отношения **R** обозначается и определяется функцией принадлежности:



(x,y) = 1 - **R**(x,y)



.

Дизъюнктивная сумма двух отношений.

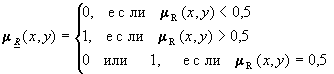
Дизъюнктивная сумма двух отношений R1 и R2 обозначается RR и определяется выражением:

R1R2 = (R12)(1R2) .



Обычное отношение, ближайшее к нечеткому.

Пусть **R** - нечеткое отношение с функцией принадлежности **R**(x,y). Обычное отношение, ближайшее к нечеткому, обозначается R и определяется выражением:



По договоренности принимают **R**(x,y)=0 при **R**(x,y) = 0,5.

Проекции нечеткого отношения.

Пусть **R** - нечеткое отношение **R**: (x,y)[0,1]. Первой проекцией отношения **R** (проекция на **X**) называется нечеткое множество , заданное на множестве **X**, с функцией принадлежности:



.



Аналогично, второй проекцией (проекцией на **Y**) называется нечеткое множество , заданное на множестве **Y**, с функцией принадлежности:



.



Величина h(R) = называется глобальной проекцией отношения **R**. Если h(R)=1, то отношение **R** нормально, в противном случае - субнормально.



Пример:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **R** = | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | *y*1 | *y*2 | *y*3 | *y*4 | *y*5 | | *x*1 | 0,1 | 0,2 | 1 | 0,3 | 0,9 | | *x*2 | 0,9 | 0,1 | 0,5 | 0,8 | 0,5 | | *x*3 | 0,4 | 0 | 0,6 | 1 | 0,3 | |  | 1-я проекция   |  | | --- | | 1 | | 0,9 | | 1 | | = **R**1' |
|  |  |  |  |  |
| **R**2' = | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | 0,9 | 0,2 | 1 | 1 | 0,9 | |  | |  | | --- | | 1 | | = h(R) |
| 2-я проекция | | | |  |

Цилиндрические продолжения проекций нечеткого отношения

Проекции **R1** и R**2** нечеткого отношения **XRY** в свою очередь определяют в **XY** нечеткие отношения и с функциями принадлежности:



(*x,y*)=(*x*) при любом *y*, (*x,y*)=(*y*) при любом *x*,



называемые, соответственно, цилиндрическим продолжением R1' и цилиндрическим продолжением R2'.

*Замечание.* Очевидно, что для любых нечетких подмножеств **А** и **В**, определенных, соответственно, на **X** и **Y**, можно построить их цилиндрические продолжения **А** и **В**.

Пример (продолжение):

Имеем:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **R1'** = | |  |  | | --- | --- | |  |  | | *x*1 | 1 | | *x*2 | 0,9 | | *x*3 | 1 | |  | = | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | *y*1 | *y*2 | *y*3 | *y*4 | *y*5 | | *x*1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | *x*2 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | | *x*3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

и

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **R2'** = | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | *y*1 | *y*2 | *y*3 | *y*4 | *y*5 | |  | 0,9 | 0,2 | 1 | 1 | 0,9 | | = | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *x*1 | 0,9 | 0,2 | 1 | 1 | 0,9 | | *x*2 | 0,9 | 0,2 | 1 | 1 | 0,9 | | *x*3 | 0,9 | 0,2 | 1 | 1 | 0,9 | |

Сепарабельность отношений

Нечеткое отношение **XRY** называется сепарабeльным, если оно равно пересечению цилиндрических продолжений своих проекций, т.е. если **R** = **** , т.е. **R** (*x,y*) = (*x*)**** (*y*).



*Замечание.* Если определено декартово произведение нечетких множеств (выше оно введено), то, очевидно, нечеткое отношение **XRY** сепарабельно, если оно является декартовым произведением своих проекций, т.е. **R = R1'R2'**.

Пример (продолжение):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  = | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | *y*1 | *y*2 | *y*3 | *y*4 | *y*5 | | *x*1 | 0,9 | 0,2 | 1 | 1 | 0,9 | | *x*2 | 0,9 | 0,2 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | | *x*3 | 0,9 | 0,2 | 1 | 1 | 0,9 | |  **R**, |

т.е. исходное отношение **R** несепарабельно.

#### Композиция двух нечетких отношений

Композиция двух нечетких отношений

**Пусть R1** - нечеткое отношение **R1**: (**X Y**)[0,1] между X и Y, и R2 - нечеткое отношение **R2**: (**YZ**) [0,1] между Y и Z. Нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое **R2R1**, определенное через **R1** и **R2** выражением

**R1R2** (*x,z*) = [**R1** (*x,y*)**R1**(*y,z*)],



называется (max-min)-композицией отношений **R1** и **R2**.

Примеры:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | R1 | | | | |  | *y*1 | *y*2 | *y*3 | | *x*1 | 0,1 | 0,7 | 0,4 | | *x*2 | 1 | 0,5 | 0 | | |  | | --- | | R2 | |  | | *z*1 | *z*2 | *z*3 | *z*4 | | *y*1 | 0,9 | 0 | 1 | 0,2 | | *y*2 | 0,3 | 0,6 | 0 | 0,9 | | *y*3 | 0,1 | 1 | 0 | 0,5 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | R2R1 | | | | | |  | *z*1 | *z*2 | *z*3 | *z*4 | | *x*1 | 0,3 | 0,6 | 0,1 | 0,7 | | *x*2 | 0,9 | 0,5 | 1 | 0,5 | |

**R1R2**(*x*1, *z*1) = [R1(*x*1, *y*1)  **R2** (*y*1, *z*1)] V [**R1**(*x*1, *y*2)  **R2**(*y*2, *z*1)] V [**R1**(*x*1, *y*3)  **R2**(*y*3, *z*1)] =

= (0,10,9)V(0,70,3)V(0,40,1) = 0,1V0,3V0,1 = 0,3

**R1R2**(*x*1,*z*2) = (0,10)V(0,70,6)V(0,4 1) = 0V0,6V0,4 = 0,6

**R1R2**(*x*1,*z*3) = 0,1

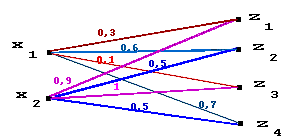
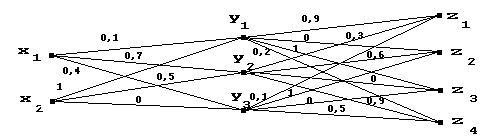
...................

...................

**R1R2**(*x*2,*z*5) = 0,5

*Замечание.* В данном примере вначале использован "аналитический" способ композиции отношений **R1** и **R2** , т.е. *i*-я строка R1 "умножается" на *j*-й столбец R2 с использованием операции , полученный результат "свертывается" с использованием операции V в  (*xi*,*zj*).

Ниже приведены графы, соответствующие R1 и R2, "склеенные" по Y. В полученном графе рассматриваем пути от *xi* к *zj* и каждому ставим в соответствие минимальный из "весов" его составляющих. Затем определяем максимум по всем путям из *xi* в *zj*, который и дает искомое (*xi*,*zj*).



Свойства max-min композиции

Операция (max-min)-композиции ассоциативна, т.е.

R3(R2R1) = (R3R2 )R1,

дистрибутивна относительно объединения, но недистрибутивна относительно пересечения:

R3(R2 R1) = (R3R2) (R3R1),

R3(R2 R1)(R3 R2)(R3 R1).

Кроме того, для (max-min)-композиции выполняется следующее важное свойство: если R1R2 то, RR1 RR2.

**(max-) - *композиция***

В выражении **R1R2**(*x, z*) = [**R1**(*x, y*)**R2**(*y, z*)] для (max-min)-композиции отношений R1 и R2 операцию  можно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для : ассоциативность и монотонность (в смысле неубывания) по каждому аргументу. Тогда:



**R1R2**(*x, z*) = [**R1**(*x, y*)**R1**(*y, z*)]



В частности, операция  может быть заменена алгебраическим умножением, тогда говорят о (max - prod)-композиции.

Обычное подмножество  - уровня нечеткого отношения

Обычным подмножеством  - уровня нечеткого отношения R называется четкое (обычное) отношение R такое, что

**R1**(*x,y*) =



Очевидно, что из 1 2 следует R1  R2.

Теорема декомпозиции

Любое нечеткое отношение R представимо в форме:

R = ****R, 0<1,



где ****R означает, что все элементы R умножаются на .

#### Условные нечеткие подмножества.

Пусть **X** и **Y** - универсальные множества, взаимосвязь которых задана нечетким отношением **R**: (**XY**)[0,1], т.е. для каждой пары (*x,y*)**XY** задано значение функции принадлежности **R**(*x,y*)[0,1].

Пусть **А** - некоторое нечеткое множество, заданное на **Х**, т.е. определена функция принадлежности A(*x*) для всех *х* из **Х**. Тогда нечеткое множество **А** и нечеткое отношение **R** индуцируют в **Y** нечеткое подмножество B с функцией принадлежности

**B**(*y*) = min[**A**(*x*), ** R**(*x,y*)] = [** A**(*x*) **R**(*x,y*)].



*Обозначение:* B = AR.

Пример:

Пусть **X** = {*x*1, *x*2, *x*3}, **Y** = {*y*1, *y*2, *y*3, *y*4} и заданы нечеткое отношение

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| XRY = |  | *y*1 | *y*2 | *y*3 | *y*4 |
| *x*1 | 0,8 | 1 | 0 | 0,3 |
| *x*2 | 0,8 | 0,3 | 0,8 | 0,2 |
| *x*3 | 0,2 | 0,3 | 0 | 0,4 |

и нечеткое множество **A** = {0,3/*x*1,0,7/*x*2,1/*x*3}.

Проведем операцию  для **А** и столбца *y*1 :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | *x*1 | *x*2 | *x*3 | | 0,3 | 0,7 | 1 | | L | |  | | --- | | *y*1 | | 0,8 | | 0,8 | | 0,2 | | = | |  | | --- | | *y*1 | | 0,30,8 | | 0,70,8 | | 10,2 | | = | |  | | --- | | *y*1 | | 0,3 | | 0,7 | | 0,2 | |

После выполнения операции V на элементах полученного столбца имеем:

**B**(*y*1) = 0,3V0,7V0,2 = 0,7.

Проделав аналогичные вычисления для *y*2, *y*3, *y*4 имеем:

**B**(*y*2) = 0,3

**B**(*y*3) = 0,7

**B**(*y*4) = 0,4.

И окончательно:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A |  | R |  | B |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | 0,3 | 0,7 | 1 | | **·** | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0,8 | 1 | 0 | 0,3 | | 0,8 | 0,3 | 0,8 | 0,2 | | 0,2 | 0,3 | 0 | 0,4 | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0,7 | 0,3 | 0,7 | 0,4 | |

*Замечание.* При заданном R, если А индуцирует В, то ближайшее четкое подмножество А индуцирует В.

Нечеткие подмножества последовательно обуславливающие друг друга

Если

**А1** индуцирует **А2** посредством **R1**,

**А2** индуцирует **А3** посредством **R2**,

.............................................

**А*n-1*** индуцирует **А*n*** посредством R*n-1*,

то

**А1** индуцирует **А*n*** посредством **R*n-1***R*n-2* ...R1,

где **R*n-1*R*n-2* ...R1** - определенная выше композиция нечетких отношений **R1, R2, ..., Rn**.

Пример:

Вернемся к примеру (max-min)-композиции.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| R1 | · | R2 | = | R1R2 |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | *y*1 | *y*2 | *y*3 | | *x*1 | 0,1 | 0,7 | 0,4 | | *x*2 | 1 | 0,5 | 0 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | *z*1 | *z*2 | *z*3 | *z*4 | | *y*1 | 0,9 | 0 | 1 | 0,2 | | *y*2 | 0,3 | 0,6 | 0 | 0,9 | | *y*3 | 0,1 | 1 | 0 | 0,5 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | *z*1 | *z*2 | *z*3 | *z*4 | | *x*1 | 0,3 | 0,6 | 0,1 | 0,7 | | *x*2 | 0,9 | 0,5 | 1 | 0,5 | |

Пусть А={0,3/*x*1, 0,7/*x*2 }, тогда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А1 |  | R1 |  | А2 |
| |  |  | | --- | --- | | 0,3 | 0,7 | | · | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 0,1 | 0,7 | 0,4 | | 1 | 0,5 | 0 | | = | |  |  |  | | --- | --- | --- | | 0,7 | 0,5 | 0,3 | |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А2 |  | R2 |  | А3 |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | 0,7 | 0,5 | 0,3 | | · | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0,9 | 0 | 1 | 0,2 | | 0,3 | 0,6 | 0 | 0,9 | | 0,1 | 1 | 0 | 0,5 | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0,7 | 0,5 | 0,7 | 0,5 | |
|  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А1 |  | R1R2 |  | А3 |
| |  |  | | --- | --- | | 0,3 | 0,7 | | · | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0,3 | 0,6 | 0,1 | 0,7 | | 0,9 | 0,5 | 1 | 0,5 | | = | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 0,7 | 0,5 | 0,7 | 0,5 | |
|  |  |  |

Немного о бинарных отношениях вида **XRX**

Нечеткие отношения вида **XRX** задаются функцией принадлежности ** R**(*x,y*), но с условием, что *x* и *y* - элементы одного и того же универсального множества. В зависимости от своих свойств (основные - симметричность, рефлексивность, транзитивность) конкретные нечеткие отношения задают отношения сходства и различия, порядка или слабого порядка между элементами **Х**. Они имеют обширную сферу приложений в задачах автоматической классификации и принятия решений (сравнение альтернатив).

### 3. НЕЧЕТКАЯ И ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННЫЕ

Понятие нечеткой и лингвистической переменных используется при описании объектов и явлений с помощью нечетких множеств.

***Нечеткая переменная*** характеризуется тройкой <, X, A>, где

 - наименование переменной,

X - универсальное множество (область определения ),

A - нечеткое множество на X, описывающее ограничения (т.е.  A(*x*)) на значения нечеткой переменной .

***Лингвистической переменной*** называется набор < ,T,X,G,M>, где

 - наименование лингвистической переменной;

Т - множество ее значений (терм-множество), представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество X. Множество T называется базовым терм-множеством лингвистической переменной;

G - синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества T, в частности, генерировать новые термы (значения). Множество T G(T), где G(T) - множество сгенерированных термов, называется расширенным терм-множеством лингвистической переменной;

М - семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную, т.е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

*Замечание.* Чтобы избежать большого количества символов

символ  используют как для названия самой переменной, так и для всех ее значений;

пользуются одним и тем же символом для обозначения нечеткого множества и его названия, например терм "*молодой*", являющийся значением лингвистической переменной  = "*возраст*", одновременно есть и нечеткое множество М ("*молодой*").

Присвоение нескольких значений символам предполагает, что контекст позволяет разрешить возможные неопределенности.

Пример: Пусть эксперт определяет толщину выпускаемого изделия с помощью понятий "*малая толщина*", "*средняя толщина*" и "*большая толщина*", при этом минимальная толщина равна 10 мм, а максимальная - 80 мм.

Формализация такого описания может быть проведена с помощью следующей лингвистической переменной <, T, X, G, M>, где

 - толщина изделия;

T - {"*малая толщина*", "*средняя толщина*", "*большая толщина*"};

X - [10, 80];

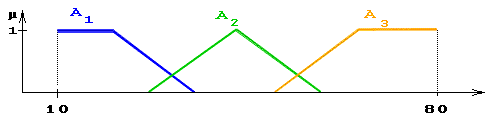
G - процедура образования новых термов с помощью связок "*и*", "*или*" и модификаторов типа "*очень*", "*не*", "*слегка*" и др. Например: "*малая или средняя толщина*", *"очень малая толщина*" и др.;

М - процедура задания на X = [10, 80] нечетких подмножеств А1="*малая толщина*", А2 *= "средняя толщина*", А3="*большая толщина*", а также нечетких множеств для термов из G(T) в соответствии с правилами трансляции нечетких связок и модификаторов "*и*", "*или*", "*не*", "*очень*", "*слегка*" и др. операции над нечеткими множествами вида: А  В, А В, , CON А = А2 , DIL А = А0,5 и др.



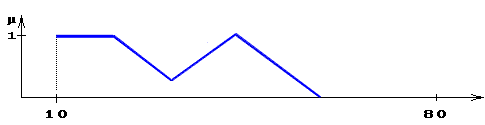
*Замечание.* Наряду с рассмотренными выше базовыми значениями лингвистической переменной "*толщина*" (Т={"*малая толщина*", "*средняя толщина*", "*большая толщина*"}) возможны значения, зависящие от области определения Х. В данном случае значения лингвистической переменной "толщина изделия" могут быть определены как "*около 20 мм*", "*около 50 мм*", "*около 70 мм*", т.е. в виде *нечетких чисел*.

Продолжение примера:



Функции принадлежности нечетких множеств:

*"малая толщина"* = А1 , "*средняя толщина*"= А2, " *большая толщина*"= А3 .



Функция принадлежности:

нечеткое множество "*малая или средняя толщина*" = А1А1.

#### Нечеткие числа

***Нечеткие числа*** - нечеткие переменные, определенные на числовой оси, т.е. нечеткое число определяется как нечеткое множество А на множестве действительных чисел R с функцией принадлежности A(*x*)[0,1], где *x* - действительное число, т.е. *x*R.

Нечеткое число А ***нормально***, если A(*x*)=1, ***выпуклое***, если для любых xyz выполняется



A(*x*)A(*y*)A(*z*).

***Множество  - уровня*** нечеткого числа А определяется как

А = {*x*/ A(*x*)}.

Подмножество SAR называется ***носителем*** нечеткого числа А, если

S = {*x*/A(*x*)>0}.

Нечеткое число А ***унимодально***, если условие A(*x*) = 1 справедливо только для одной точки действительной оси.

Выпуклое нечеткое число А называется ***нечетким нулем***, если

A(0) = (A(*x*)).



Нечеткое число А ***положительно***, если *x*SA, *x*>0

и ***отрицательно***, если *x*SA, *x*<0.

#### Операции над нечеткими числами

Расширенные бинарные арифметические операции (сложение, умножение и пр.) для нечетких чисел определяются через соответствующие операции для четких чисел с использованием принципа обобщения следующим образом.

Пусть А и В - нечеткие числа, и - нечеткая операция, соответствующая операции над обычными числами. Тогда



С = АB C(*z*)=(A(*x*)B(*y*))).



Отсюда:

С = C(*z*)=(A(*x*)B(*y*))),



С =  C(*z*)=(A(*x*)B(*y*))),



С =  C(*z*)=(A(*x*) B(*y*))),



С =  C(*z*)=(A(*x*)B(*y*))),



С =  C(*z*)=(A(*x*)B(*y*))),



С =  C(*z*)=(A(*x*)B(*y*))).



#### Нечеткие числа (L-R)-типа

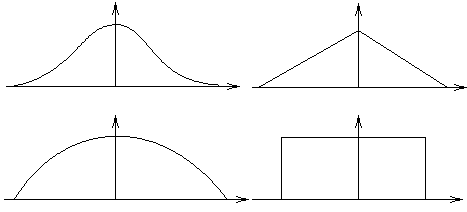
Нечеткие числа (L-R)-типа - это разновидность нечетких чисел специального вида, т.е. задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними.

Функции принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа задаются с помощью невозрастающих на множестве неотрицательных действительных чисел функций действительного переменного L(*x*) и R(*x*), удовлетворяющих свойствам:

а) L(-*x*)=L(*x*), R(-*x*)=R(*x*);

б) L(0)=R(0).

Очевидно, что к классу (L-R) функций относятся функции, графики которых имеют следующий вид:



Примерами аналитического задания (L-R) функций могут быть

L(*x*) = , *p*0;

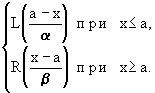


R(*x*)= , p 0 и т.д.



Пусть L(*y*) и R(*y*) - функции (L-R)-типа (конкретные). Унимодальное нечеткое число А с ***модой*** *а* (т.е. A(*a*)=1) c помощью L(*y*) и R(*y*) задается следующим образом:

A(*x*) =

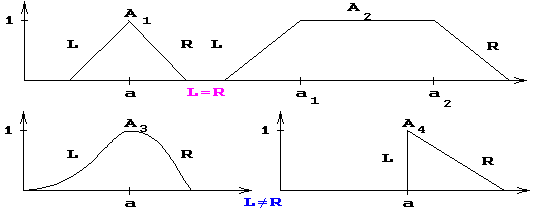


где *а* - мода; >0, >0 - левый и правый коэффициенты нечеткости.

Таким образом, при заданных L(*y*) и R(*y*) нечеткое число (унимодальное) задается тройкой А = (*а*, , ).

Толерантное нечеткое число задается, соответственно, четверкой параметров А=(*а*1*, a*2, , ), где *а*1 и *a*2 - границы толерантности, т.е. в промежутке [*а*1*,a*2] значение функции принадлежности равно 1.

Примеры графиков функций принадлежности нечетких чисел (L-R)-типа приведены ниже.



Мы не будем здесь рассматривать операции над (L-R) числами; отметим, что в конкретных ситуациях функции L(*y*), R(*y*), а также параметры ,  нечетких чисел (*а*, , ) и (*а*1*, a*2, ,  ) должны подбираться таким образом, чтобы результат операции (сложения, вычитания, деления и т.д.) был точно или приблизительно равен нечеткому числу с теми же L(*y*) и R(*y*), а параметры  и  результата не выходили за рамки ограничений на эти параметры для исходных нечетких чисел, особенно если результат в дальнейшем будет участвовать в операциях.

*Замечание.* Решение задач математического моделирования сложных систем с применением аппарата нечетких множеств требует выполнения большого объема операций над разного рода лингвистическими и другими нечеткими переменными. Для удобства исполнения операций, а также для ввода-вывода и хранения данных, желательно работать с функциями принадлежности стандартного вида.

Нечеткие множества, которыми приходится оперировать в большинстве задач, являются, как правило, унимодальными и нормальными. Одним из возможных методов аппроксимации унимодальных нечетких множеств является аппроксимация с помощью функций (L-R)-типа.

Примеры (L-R)-представлений некоторых лингвистических переменных:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Терм ЛП | (L-R)-представление | Графическое представление |
| Средний | А = (*а*, , )LR   = >0 | a b |
| Малый | А = (*а*, , )LR   =  |  =   |
| Большой | А = (*а*, , )LR  = |   =  |
| Приблизительно в диапазоне | А = (*а*1, *а*2, , )LR   = >0 |    a1 a2 |
| Определенный | А = (*а*, 0, 0)LR   =  = 0 |  = 0  = 0 |
| Разнообразный  зона полной неопределенности | А = (*а*, , )LR   =  =  |  =  =  |

### 4. НЕЧЕТКИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ И НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ

Нечеткими высказываниями будем называть высказывания следующего вида:

Высказывание < есть '>, где  - наименование лингвистической переменной, ' - ее значение, которому соответствует нечеткое множество на универсальном множестве Х.

Например высказывание <*давление большое*> предполагает, что лингвистической переменной *"давление"* придается значение *"большое"*, для которого на универсальном множестве Х переменной *"давление"* определено соответствующее данному значению "*большое*" нечеткое множество.

Высказывание < есть m'>, где m - модификатор, которому соответствуют слова "*ОЧЕНЬ*", "*БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ*", "*МНОГО БОЛЬШЕ*" и др.

Например: <*давление очень большое*>, <*скорость много больше средней*> и др.

Составные высказывания, образованные из высказываний видов 1. и 2. и союзов "*И*", "*ИЛИ*", "*ЕСЛИ*.., *ТО...", "ЕСЛИ.., ТО.., ИНАЧЕ*".

Высказывания на множестве значений фиксированной лингвистической переменной

То, что значения фиксированной лингвистической переменной соответствуют нечетким множествам одного и того же универсального множества Х, позволяет отождествлять модификаторы "*очень*" или "*не*" с операциями "CON" и "*дополнение*", а союзы "*И*", "*ИЛИ*" с операциями "*пересечение*" и "*объединение*" над нечеткими множествами .

Для иллюстрации понятия лингвистической переменной мы в качестве примера рассматривали лингвистическую переменную "*толщина изделия*" с базовым терм-множеством Т = {"*малая*", "*средняя*", "*большая*"}. При этом на Х = [10, 80] мы определили нечеткие множества А1, А2, А3, соответствующие базовым значениям: "*малая*", "*средняя*", "*большая*".

В этом случае высказыванию <*толщина изделия очень малая*> соответствует нечеткое множество CONA = A2; высказыванию <*толщина изделия не большая или средняя*> - нечеткое множество А2 высказыванию <*толщина изделия не малая и не большая*> А1.



Высказывания <*толщина изделия много больше средней*> или <*толщина изделия близка к средней*> требуют использования нечетких отношений R ("*много больше,чем*") и R ("близко к"), заданных на ХХ. Тогда этим высказываниям будут соответствовать нечеткие множества AR1 и AR2, индуцированные нечеткими отношениями R1 и R2.

Случай двух и более лингвистических переменных

Пусть <, T, X, G, M> и <, T, Y, G, M> - лингвистические переменные, и высказываниям < есть '>, < есть  '> соответствуют нечеткие множества А и В заданные на X и Y.

Составные нечеткие высказывания вида 3, связывающие значения лингвистических переменных  и , можно привести к высказываниям вида 1, введя лингвистическую переменную (, ), значениям которой будут соответствовать нечеткие множества на XY.

Напомним, что нечеткие множества А и В, заданные на X и Y, порождают на XY нечеткие множества и , называемые цилиндрическими продолжениями, с функциями принадлежности:



(*x,y*) = A(*x*) при любом *y*,



(*x,y*) = B(*y*) при любом *x*,



где (*x,y*) XY.

Нечеткие множества, соответствующие составным высказываниям

< есть ' и  есть '> и

< есть ' или  есть '>,

определяются по следующим правилам (преобразования к виду 1), справедливым при условии невзаимодействия переменных, т.е. множества X и Y таковы, что их элементы не связаны какой-либо функциональной зависимостью.

#### Правила преобразований нечетких высказываний

Правило преобразования конъюнктивной формы

Справедливо выражение:

< есть ' и  есть '><(, ) есть ('')>.

Здесь  - знак подстановки, '' - значение лингвистической переменной (, ), соответствующее исходному высказыванию < есть ' и  есть '>, которому на XY ставится в соответствие нечеткое множество  c функцией принадлежности



(*x,y*) = (*x,y*)(*x,y*) = A(*x*)B(*y*).



Правило преобразования дизъюнктивной формы

Справедливо выражение:

< есть ' или  есть '><(,) есть ('')>, где значению ('') лингвистической переменной (, ) соответствует нечеткое множество , с функцией принадлежности



(*x,y*) = (*x,y*)V(*x,y*) = A(*x*)VB(*y*).



*Замечание 1.* Правила справедливы также для переменных вида <, T1, X, G1,M1> и <, T2, Y, G2, M2>, когда в форме значений лингвистических переменных формализованы невзаимодействующие характеристики одного и того же объекта. Например, для построения нечеткого множества высказывания <*ночь теплая и очень темная*> нужно использовать правило конъюнктивной формы, а для высказывания *<ночь теплая или очень темная*> - правило дизъюнктивной формы.

*Замечание 2.* Если задана совокупность лингвистических переменных {<*i*, T*i*, X*i*, G*i*, M*i*>}, *i* = 1, 2, .., *n*, то любое составное высказывание, полученное из высказываний < есть '> с использованием модификаторов "*очень*", "*не*", "*более или менее*" и др. и связок "*и*", "*или*", можно привести к виду < есть '>, где  - составная лингвистическая переменная (1,2,..,*n* ), ' - ее значение, определяемое (как и функция принадлежности) в соответствии с вышеуказанными правилами.

Правило преобразования высказываний импликативной формы

Справедливо выражение:

<если  есть ', то  есть '> <(, ) есть ('')>, где значению ('') лингвистической переменной (, ) соответствует нечеткое отношение XRY на XY.

Функция принадлежности R(*x,y*) зависит от выбранного способа задания нечеткой импликации.

#### Способы определения нечеткой импликации

Будем считать, что заданы универсальные множества X и Y, содержащие конечное число элементов. Под способом определения нечеткой импликации "*если* А, *то* В" (где А и В нечеткие множества на X и Y соответственно) будем понимать способ задания нечеткого отношения R на XY, соответствующего данному высказыванию.

С целью обоснованного выбора определения нечеткой импликации, японскими математиками Мидзумото, Танака и Фуками было проведено исследование всех известных по литературе определений (плюс предложенные авторами). Рассмотренные определения задавали следующие нечеткие отношения для высказывания "если А, то В":

Rm = (AB)(Y)



Rm(*x,y*) = (A(*x*) B(*y*)) V (1 - A(*x*));

Ra = (Y)(XB)



Ra(*x,y*) = 1  (1-A(*x*) + B(*y*));

Rc = AB

Rc(*x,y*) = A(*x*) B(*y*);

Rs = AYXB



Rs(*x,y*) = ;



Rg = AYXB



Rg(*x,y*) = ;



Rsg = ( AYXB )  ( )



;



Rgg = ( AYXB)  ()



;



Rgs = ( AYXB)  ()



;



Rss = ( AYXB)  ()



;



Rb = (Y)(XB)

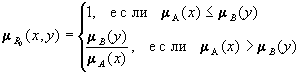


Rb(x,y) = (1-A(x))  B(y);

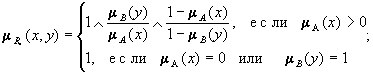
R = AYXB



;



R = AYXB



R\* = AYXB



R\*(x,y) = 1 - A(x)+ A(x) B(y);

R# = AYXB



R#(x,y)=( A(x) B(y)) ((1 - A(x)) (1 - B(y)) (B(y) (1 - A (x));

R = AYXB



Правилом вывода являлось композиционное правило вывода с использованием (max-min)-композиции.

В качестве значений на входе системы рассматривались:

A' = A;

A' = "очень А"= А2 , A0,5(x) = A(x)2 ;

A' = "более или менее А" = А0,5 A0,5(x)= A(x)0,5;

A' = A(x)0,5, (x) = 1 - A (x).



Приведем таблицу итогов исследования. В ней символ "0" означает выполнение соответствующей схемы вход-выход, символ "x" - невыполнение. Следствие "неизвестно" (Н) соответствует утверждению: "если x=A, то нельзя получить никакой информации об y".

В данной таблице первая графа -"Посылка", вторая -"Следствие".

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | Rm | Ra | Rc | Rs | Rg | Rsg | Rgg | Rgs | Rss | Rb | R | R | R\* | R# | R |
| A | B | x | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | x | x | x | x | x | x |
| A2 | B2 | x | x | x | 0 | x | 0 | x | x | 0 | x | x | x | x | x | x |
| A2 | B | x | x | 0 | x | 0 | x | 0 | 0 | x | x | x | x | x | x | x |
| A0,5 | B0,5 | x | x | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | x | x | x | x | x | x |
| A0,5 | B | x | x | 0 | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x |
|  | Н | 0 | 0 | x | 0 | 0 | x | x | x | x | 0 | 0 | 0 | 0 | x | x |
| A | B | x | x | x | x | x | 0 | 0 | 0 | 0 | x | x | x | x | x | x |

Кроме ответа о выполнении соответствующей схемы (0 или х),авторами исследованы явные выражения для функций принадлежности следствий по каждому из вариантов определения нечеткой импликации, на основе чего ими был сформулирован вывод:

- Rm и Ra не могут быть использованы;

- Rc может использоваться частично; - Rs , Rg , Rsg , Rgg , Rgs , Rss рекомендованы к использованию;

- Rb , R, R, R\* , R# , R не рекомендованы к использованию.

#### Логико-лингвистическое описание систем, нечеткие модели.

Логико-лингвистические методы описания систем основаны на том, что поведение исследуемой системы описывается на естественном (или близком к естественному) языке в терминах лингвистических переменных.

Входные и выходные параметры системы рассматриваются как лингвистические переменные, а качественное описание процесса задается совокупностью высказываний следующего вида:

L1 : если <*A*1 > то <*B*1 >,

L2 : если <*A*2 > то <*B*2 >,

....................

L*k* : если <*Ak* > то <*Bk* >,

где <*Ai*>, *i*=1,2,..,*k* - составные нечеткие высказывания, определенные на значениях входных лингвистических переменных, а <*Bi*>, *i* = 1,2,..,*k* - высказывания, определенные на значениях выходных лингвистических переменных.

С помощью правил преобразования дизъюнктивной и конъюнктивной формы описание системы можно привести к виду:

L1 : если <A1 > то <B1 >,

L2 : если <A2 > то <B2 >,

....................

L*k* : если <A*k* > то <B*k* >,

где A1,A2,..,A*k* - нечеткие множества, заданные на декартовом произведении X универсальных множеств входных лингвистических переменных, а B1, B2, .., B*k* - нечеткие множества, заданные на декартовом произведении Y универсальных множеств выходных лингвистических переменных.

Совокупность импликаций {L1, L2, ..., L*k*} отражает функциональную взаимосвязь входных и выходных переменных и является основой построения нечеткого отношения XRY, заданного на произведении XY универсальных множеств входных и выходных переменных. Если на множестве X задано нечеткое множество A, то композиционное правило вывода B = AR определяет на Y нечеткое множество B с функцией принадлежности

B(*y*) =(A(*x*) R(*x,y*))



Таким образом, композиционное правило вывода в этом случае задает закон функционирования нечеткой модели системы.

Рассмотрим широко цитируемый пример решения задачи нечеткого логического управления: построение модели управления паровым котлом.

#### Модель управления паровым котлом

Прототипом модели послужил паровой двигатель (лабораторный) с двумя входами (подача тепла, открытие дросселя) и двумя выходами (давление в котле, скорость двигателя).

*Цель управления:* поддержание заданного давления в котле (зависит от подачи тепла) и заданной скорости двигателя (зависит от открытия дросселя). В соответствии с этим, схема системы управления двигателем выглядит следующим образом:

Рассмотрим одну часть задачи - управление давлением.

**Входные лингвистические переменные**:

РЕ - отклонение давления (разность между текущим и заданным значениями);

СРЕ - скорость изменения отклонения давления.

**Выходная лингвистическая переменная:**

НС - изменение количества тепла.

Значения лингвистических переменных:

NB - отрицательное большое;

NM- отрицательное среднее;

NS- отрицательное малое;

NO- отрицательное близкое к нулю;

ZO- близкое к нулю;

PO - положительное близкое к нулю;

PS - положительное малое;

PM - положительное среднее;

PB - положительное большое.

Управляющие правила (15 правил), связывающие лингвистические значения входных и выходных переменных, имеют вид: "Если отклонение давления = Аi и, если скорость отклонения давления = Вi , то изменение количества подаваемого тепла равно Сi", где Аi, Вi ,Сi - перечисленные выше лингвистические значения.

Полный набор правил задавался таблицей:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ╬ | Отклонение  давления РЕ | Скорость изменения  отклонения давления СРЕ | Изменение количества  подаваемого тепла НС |
| 1 | NB | NB или NM | PB |
| 2 | NB или NM | NS | PM |
| 3 | NS | PS или NO | PM |
| 4 | NO | PB или PM | PM |
| 5 | NO | NB или NM | NM |
| 6 | PO или ZO | NO | NO |
| 7 | PO | NB или NM | PM |
| 8 | PO | PB или PM | NM |
| 9 | PS | PS или NO | NM |
| 10 | PB или PM | NS | NM |
| 11 | PB | NB или NM | NB |
| 12 | NO | PS | PS |
| 13 | NO | NS | NS |
| 14 | PO | PS | PS |
| 15 | PO | PS | NS |

Лингвистические значения отклонений задавались нечеткими подмножествами на шкалах X, Y, Z следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 |
| PB |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 0,3 | 0,7 | 1 |
| PM |  |  |  |  |  |  |  |  | 0,3 | 0,7 | 1 | 0,7 | 0,3 |
| PS |  |  |  |  |  |  | 0,3 | 0,7 | 1 | 0,7 | 0,3 |  |  |
| PO |  |  |  |  |  | 0,3 | 1 | 0,7 | 0,3 |  |  |  |  |
| NO |  |  |  |  | 0,3 | 0,7 | 1 | 0,3 |  |  |  |  |  |
| NS |  |  | 0,3 | 0,7 | 1 | 0,7 | 0,3 |  |  |  |  |  |  |
| NM | 0,3 | 0,7 | 1 | 0,7 | 0,3 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| NB | 1 | 0,7 | 0,3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

То есть области значений входных переменных PE, CPE и выходной переменной НС представлялись 13 точками [-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6], равномерно расположенными между максимальными отрицательными и положительными значениями этих переменных.

Приведем управляющие правила к виду: "*если* (Аi Вi ), то Сi", где (АiВi) декартово произведение нечетких множеств А и В , заданных на шкалах X и Y с функцией принадлежности

(*x,y*)= A*i*(*x*)B*i*(*y*),



определенной на XY.

Для каждого из правил вида "*если* (АiВi ), то Сi", где (АiВi)- входное нечеткое множество, а Сi - соответствующее нечеткое значение выхода, определялось нечеткое отношение

Ri=(АiВi)Сi, i = 1, 2, ..., 15

с функцией принадлежности

R*i*((*x,y*)*,z*)= (A*i*(*x*)B*i*(*y*))C*i*(*z*).

Совокупности всех правил соответствовало нечеткое отношение

R = Ri



с функцией принадлежности

R(*x,y,z*) = R*i*((*x,y*),*z*).



При заданных значениях А, В входных переменных регулирующее значение С входной переменной определялось на основе композиционного правила вывода:

С = (АВ)R,



где - (max-min)-композиция.



Функция принадлежности С имеет вид:

C(*z*) = (A(*x*)  B (*y*))  R(*x,y,z*).



Числовое значение *z*0 (изменение подаваемого тепла) определяется при этом либо из условия C(*z*0) = C (*z*),



либо по формуле

*z*0 = ,



где N - количество точек в Z (в данном случае N=13).

Задача управления скоростью двигателя решалась аналогично. Результаты практического использования показали, что разработанная нечеткая модель управления сравнима с классическими моделями оптимального управления.

Появление первых работ по построению моделей нечеткого логического управления для конкретных систем определило ряд общих вопросов, касающихся логических основ моделей, в их числе:

о полноте и непротиворечивости совокупности правил управления;

об адекватности представления правил управления вида "*если А, то В*" нечеткими отношениями, определяемыми разными способами;

о правильности способа вывода, основанного на (max-min)-композиции и возможности использования других видов операции композиции.

#### Полнота и непротиворечивость правил управления

Наиболее часто требование **полноты** для системы *"если Аi, то Вi*", *i*=1,2,..,*n*, сводится к

X = Supp A*i*,



где Supp A*i* - носитель нечеткого множества A*i*. Содержательно это означает, что для каждого текущего состояния *х* процесса существует хотя бы одно управляющее правило, посылка которого имеет ненулевую степень принадлежности для *х*.

**Непротиворечивость** системы управляющих правил чаще всего трактуется как отсутствие правил, имеющих сходные посылки и различные или взаимоисключающие следствия.

Степень непротиворечивости *i*-го и *k*-го правил можно задавать величиной

C*ik* = | (A*i*(*x*) A*k*(*x*)) - (B*i*(*y*) B*k* (*y*))|.



Суммируя по *k*, получаем оценку непротиворечивости *i*-го правила в системе:

C*i* = C*ik*, 1<*i*<*N*, *ki*.



Если эта оценка превосходит некоторое пороговое значение, то правило из системы удаляется. В частности, для рассматриваемой выше модели управляющей системы парового котла, оценки степеней непротиворечивости равны:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ╬ правила | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| C*i* | 2,4 | 3,4 | 4,2 | 3,8 | 4,2 | 1,8 | 4,5 | 3,5 | 4,0 | 3,9 | 1,7 | 3,3 | 4,1 | 3,7 | 3,3 |

Таким образом, при пороговом значении g=3 в модели остается всего три правила 1, 6 и 11.

### Литература

Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.:Мир, 1976.

Кофман А. **Введение в теорию нечетких множеств.** М.: Радио и связь, 1982.

Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта /Под ред. Д.А. Поспелова. М., 1986.

**Прикладные нечеткие системы** /Под ред. Тэтано Т., Асаи К., Сугэно М: Мир, 1993.

Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р.Ягера М.: Радио и связь, 1986.

Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.

Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. **Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования.** Рига:/ "Зинатне", 1990.

Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В. **Нечеткие модели для экспертных систем в САПР.** М.: Энергоатомиздат, 1991.

Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Коровин С.Я. **Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой.** М.: Наука, 1990.

Р.Беллман, Л.Заде. **Вопросы принятия решений в расплывчатых условиях** // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. / М.: Мир,1976.