Предмет: Теория Автоматического Управления

Тема: Обратное дискретное преобразование Лапласа

1. Обратное дискретное преобразование Лапласа

Решетчатая функция – это результат временного квантования непрерывного сигнала – которая представляет значение непрерывного сигнала в дискретные моменты времени. Решетчатая функция получается перемножением непрерывной функции на сигма-функцию. Ее можно определить по ее изображению, используя различные способы:

1. С помощью формул обратного дискретного преобразования Лапласа.
2. С помощью разложения на простые дроби.
3. С помощью разложения в степенной ряд.

В данном реферате мы рассмотрим обратное дискретного преобразование Лапласа.

2. Определение оригинала с помощью формул обратного дискретного преобразования Лапласа

Для непрерывных оригиналов обратное преобразование Лапласа имеет вид:

(1)



Для нахождения формул обратного дискретного преобразования Лапласа установим связь между плоскостями p и z. Отображение плоскости P в плоскость Z осуществляется с помощью подстановки z = epT.

Так как p = c+jω, то z = epT = ecTe jωT, где ecT- модуль z, а ωT- фаза z.

Если с = 0, то

.



## Соответствие между плоскостями p и z отображено на рис. 3.

z = e pT



Рис. 1

Точки на мнимой оси дискретной плоскости будут повторяться, поэтому на плоскости можно выделить бесконечное множество полос с шириной ωп (0.. ωп , ωп ..2ωп и т. д.), которые дают одно и тоже изображение в плоскости Z. Корни в плоскости P являются периодическими, повторяющимися и заключены в любую из полос. Если С > 0, что соответствует правой полуплоскости, то амплитуда z > 1.

Интегрировать можно по частотам расположенным в любой из полос, считая ее как основную, а значения интеграла в других полосах просуммировать. Для удобства интегрирования в качестве основной полосы принимаем полосу частот от -ωп /2 до ωп/

При переходе в плоскость Z интегрирование осуществляется по замкнутому контуру.

Пример 7. Определить непрерывную функцию, если ее дискретное изображение определяется соотношением



Решение: Определяем значения полюсов z1 = 1, их количество n = 1 и

кратность m = 1. Используя формулу обратного дискретного преобразования, определяем оригинал



Т. е. заданному изображению соответствует единичная функция.

Пример 8. Определить непрерывную функцию, если дискретное изображение имеет вид

Решение: Определяем значения полюсов z1 = 1, их количество n = 1 и

кратность m =

Определяем оригинал, используя формулу обратного дискретного преобразования



Пример 9. Определить непрерывную функцию, если дискретное изображение имеет вид



Решение: Определяем значения полюсов z1 = 1, их количество n = 1 и кратность m = Используя формулу обратного дискретного преобразования, определяем оригинал



Пример 10. Определить непрерывную функцию, если ее дискретное изображение равно



Решение: Определяем значения полюсов z1 = d, их количество n = 1 и

кратность m = 1. Используя формулу обратного дискретного преобразования, определяем оригинал



Пример 11. Определить непрерывную функцию, если ее дискретное изображение равно



Решение: Определяем значения полюсов z1 = 1, z2 = d, их количество

n = 2 и кратность m = 1. Используя формулу обратного дискретного преобразования, определяем оригинал



Пример 1 Определить непрерывную функцию, если ее дискретное изображение равно



Решение: Определяем значения полюсов z1 = d их количество n = 1 и кратность m = 1. Используя формулу обратного дискретного преобразования, определяем оригинал



3. Определение оригинала с помощью разложения на простые дроби

Дискретное изображение можно разложить на простые дроби и, используя табличные значения изображений для каждой составляющей, входящей в разложение, найти оригиналы.

Пример 13. Определить непрерывную функцию, если ее дискретное изображение определяется соотношением



Решение: Представим x(z) в виде простых дробей



Значения параметров A и B находим методом неопределенных коэффициентов



Определение оригинала с помощью разложения дискретного изображения в степенной ряд

Для выхода импульсного элемента можно записать соотношение



Таким образом, формула прямого дискретного преобразования может быть использована для получения оригинала по изображению, так как x[nT] в формуле прямого дискретного преобразования представляет значения непрерывного сигнала в дискретные моменты времени.

Любая x(z) представляет отношение степенных полиномов.

(5)



Если это отношение разложить в ряд по степеням z, то коэффициенты при z представляют собой значения оригинала. Дробно – рациональную функцию можно разложить в ряд путем деления числителя на знаменатель или представить в виде суммы простых дробей.

Пример 14. Определить непрерывную функцию, если ее дискретное изображение определяется соотношением



Решение: Выполняем почленное деление полиномов

d=e-αT

d=eαT

1

0 T 2T 3T nT

x[nT]

## Рис. 2

z z-d

x[0] = 1;

x[T] = d;

x[2T] = d

-z+d 1+dz-1+d2z-2 +…+dnz-n

d

-d+d2z-1

d2z-1

-d2z-1+d3z-2

d3z-2

По полученным значениям x[nT] строим график функции приведенный на рис. 2.

Пример 15. Определить непрерывную функцию, если ее дискретное изображение равно



Решение:

Выполняем почленное деление полиномов

z+1 z2+z+1

-1

1

0 T 2T 3T 4T 5T 6T 7T nT

x[nT]

-z-1-z-1 z-1-z-3 +z-4 -z-6+z-7

-z-1

-z-1-z-2-z-3

z-2+ z-3

-z-2-z-3 -z-4

-z-4

-z-4-z-5 -z-6

z-5+z-6

Рис. 3

По полученным значениям x[nT] строим график функции приведенный на рис. 3.

Для определения решетчатой функции по ее дискретному изображению можно использовать любой из рассмотренных методов. Выбор метода зависит от формы представления изображения.

4. Основные теоремы дискретного преобразования Лапласа

1. Теорема линейности. Изображение линейной комбинации решетчатых функций соответствует линейной комбинации их изображений

(6)



т.е. изображение суммы равно сумме изображений

.



Теорема запаздывания и упреждения (смещения аргументов). Смещение оригинала на ±k соответствует умножению изображения на z±k

(7)



3. Теорема свертывания в вещественной области (умножения изображений)

Для непрерывных систем

(8)



Для дискретных систем

(9)



1. Дуальная теорема. Теорема свертывания в комплексной области (умножения оригиналов)

(10)



5. Теорема о начальном значении функции

(11)



6. Теорема о конечном значении функции

(12)



7. Преобразование смешанного изображения в дискретное

(13)



8. Теорема разложения



Если где , то



(14)



Список литературы

1. Кожевников Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интегралы Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа.-М., Наука, 1964
2. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения.- М., Наука, 1964.-103 с.
3. Микусинский Я. Операторное исчисление.-М., ИЛ, 1956
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. — 2-е. — Спб: Питер, 2006. — С. 751.
5. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1990.- 256 с.