**Реферат по курсу ‘Общая гидродинамика’**

* Тензор скоростей деформации.
* Связь тензоров напряжений и скоростей деформации.
* Реологическое соотношение. Ньютоновская жидкость.
* Уравнения Навье-Стокса.
* Задача о стекании слоя вязкой жидкости по наклонной плоскости.

**Основные уравнения.** Уравнения сохранения массы

, (1)

количества движения

, (2)

энергии

 (3)

пригодны для различных течений жидкости и газа, но их не достаточно для решения конкретных задач. Дело в том, что число неизвестных величин в этих уравнениях больше числа уравнений. Наряду с гидродинамическими величинами , характеризующими поля течений, в них входят другие величины, в частности напряжения поверхностных сил , потоки тепла через поверхность . Необходимо ввести некоторые дополнительные соотношения, описывающие физические свойства среды, движение которой изучается на основе законов механики. Иначе говоря, необходимо построить теоретическую модель изучаемой среды, которая описывается замкнутой системой уравнений.

**Тензор напряжений.** Напряженное состояние в произвольной точке в поле определяется тройкой векторов , которые представляют напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных координатным осям x, y, z. Каждому из этих векторов соответствуют три проекции, например,

 (4)

Систему координат с началом в данной точке можно выбрать многими способами, и, следовательно, можно ввести в рассмотрение бесконечное множество троек векторов напряжений. Выясним связь между векторами напряжений в двух системах координат.

Для сокращения записи формул координатные оси будем помечать индексами 1, 2, 3. Пусть  и  - единичные векторы двух систем координат с общим началом, а  и  - векторы напряжений, действующие в этих системах на площадках, нормали к которым ориентированы по координатным осям.

Положение одной системы координат относительно другой задается таблицей направляющих косинусов



Применим формулу Коши к каждому из штрихованных векторов

 (5)

Тройка векторов , определенных в любой декартовой ортогональной системе координат таким образом, что при переходе от одной системы к другой векторы  преобразуются по формулам (5), называется тензором. Таким образом, векторы  образуют тензор напряжений. Так как каждый из векторов  определяется по (4) своими тремя проекциями , то в матричной форме этот тензор имеет следующий вид:

 (6)

Тензор напряжений является симметричным. Это свойство тензора напряжений вытекает из уравнений моментов количества движения в классическом случае, когда отсутствуют внутренние моменты количества движения и внешние массовые и поверхностные распределенные пары взаимодействия. Уравнение моментов количества движения при этих условиях записывается следующим образом:

 (7)

Интеграл по поверхности преобразуется в объемный:



Теперь уравнение (7) можно переписать так:

 (8)

В силу уравнения количества движения (2) левая часть (8) обращается в нуль, следовательно, в силу произвольности  должно обращаться в нуль подынтегральное выражение в правой части

 (9)

Из (9) следуют равенства



или в сокращенной записи, .

С симметричным тензором второго ранга  связана симметрическая квадратичная форма

 (10)

В этой записи предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Как известно, существует главная система координат , в которой квадратичная форма (10) имеет простейший вид



Тензор напряжений в этой системе содержит только диагональные члены



Приведение квадратичной формы (10), записанной в произвольной ортогональной декартовой системе координат, к главным осям () осуществляется невырожденным линейным преобразованием. Величины  называются главными напряжениями, они находятся как корни уравнения



Вещественность корней следует из симметричности тензора. Это уравнение эквивалентно следующему:

 (11)

Отсюда следует, что величины  не изменяются при замене осей координат. Таким образом, получаем три инварианта тензора напряжений: линейный , квадратичный , кубический . Их можно выразить через коэффициенты  или через корни уравнения (11):

 (12)

**Тензор скоростей деформаций.** Выберем малую частицу жидкости и точку , принадлежащую этой частице. Для любой точки , бесконечно близкой к , можно записать разложение Тейлора в линейном приближении

 (13)

Здесь - координаты точки  относительно точки , так что



Введем в рассмотрение матрицу из девяти элементов



Тогда (13) можно переписать следующим образом:



Полученное равенство не зависит от системы координат и в любой системе координат вектору  ставит в соответствие вектор . Это свойство равенства является необходимым и достаточным условием того, что входящая в него матрица  определяет тензор.

Преобразуем разложение (13) так, чтобы привести его к виду

 (14)

В силу линейности (13) по  функция  должна быть квадратичной относительно переменных, и ее можно записать следующим образом:



Спроектируем (14) на оси координат:

 (15)

Сравнивая (15) с (13), находим коэффициенты квадратичной формы  и проекции векторов :

 (16)

Эти величины определяются единственным образом. Разберем смысл формул (14). Предварительно отметим, что для абсолютно твердого тела имеем , где - скорость полюса  - вектор мгновенной угловой скорости, с которой твердое тело вращается относительно мгновенной оси, проходящей через . Из (14) следует, что скорость в некоторой точке сплошной среды складывается из скорости полюса , скорости  этой точки во вращательном движении затвердевшей частицы вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс , скорости деформации . Угловая скорость вращения частицы равна



скорость деформации частицы



На основании соотношений (16) тензор  можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

 (17)

Симметричный тензор  определяет скорости деформации частицы и называется тензором скоростей деформации. С этим тензором связана симметрическая квадратичная форма . Как и в случае тензора напряжений, существуют главные координатные оси , в которых квадратичная форма принимает простейшую форму



Переход от произвольной системы координат к главным осям осуществляется невырожденным линейным преобразованием. Главные скорости деформации  находятся как корни векового уравнения



Имеются три инварианта тензора скоростей деформации - линейный , квадратичный , кубический . В частности, для линейного инварианта имеем выражения

 (18)

**Связь тензоров напряжений и скоростей деформации. Ньютоновская жидкость.** Тензоры  и  характеризуют напряжение и деформированное состояние в данной точке сплошной среды. Для конкретной среды должна быть определена связь между этими тензорами. В случае вязкой жидкости такая связь устанавливается законом Навье-Стокса.

В основу модели вязкой жидкости положены следующие предположения:

1. в жидкости наблюдаются только нормальные напряжения, если жидкость покоится или движется как твердое тело;
2. жидкость изотропна - свойства ее одинаковы по всем направлениям;
3. компоненты тензора напряжений есть линейные функции компонент тензора скоростей деформации.

Наиболее общий вид связи между тензорами  и , удовлетворяющий этим условиям, есть

 (19)

Здесь - единичный тензор,  и  - скалярные величины. Если движение отсутствует, отсюда получаем . Это означает, что в этом случае в жидкости действительно существуют только нормальные напряжения, одинаковые в силу изотропии жидкости. Так как вязкость проявляется лишь при движении, то естественно считать, что напряженное состояние в вязкой жидкости будет таким же, как в покоящейся идеальной жидкости, - на каждой площадке будет действовать по нормали к ней гидростатическое давление . Значение  выражается через первый инвариант тензора :



Обобщая это соотношение, определим давление в движущейся вязкой жидкости соотношением



Равенство (19) означает, что будут равны также инварианты тензоров, стоящих в левой и правой частях. Приравниваем линейные инварианты этих тензоров, которые находим с помощью формул (12), (18):



Отсюда находим



Выразим теперь  через давление ,



тогда из (19) получаем следующий закон для вязкой жидкости (М.Навье, 1843 г.; Г.Стокс, 1845 г.):

 (20)

Величина  называется коэффициентом динамической вязкости, а  - коэффициентом второй вязкости. Коэффициент динамической вязкости характеризует внутреннее трение слоев жидкости в их отдельном движении. Смысл этого коэффициента ясно виден на простейшем примере слоистого течения , , , в котором возникает сила трения



Это выражение для силы трения было предложено Ньютоном. На этом основании формулу (20) называют обобщенным законом вязкости Ньютона, а жидкости, удовлетворяющие этому закону, называются ньютоновскими.

Коэффициент  характеризует объемную вязкость, действие которой может проявляться только в сжимаемой жидкости.

Коэффициенты ,  всегда положительны, они могут быть функциями температуры, либо постоянными для данной среды. Наряду с  используется коэффициент кинематической вязкости . Значения  заметно отличаются от нуля только в особых случаях. В рамках классической гидродинамики эффект второй вязкости обычно не учитывается. Введем обозначение , тогда из (20) получаем следующие уравнения модели вязкой жидкости, связывающие компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации:

 (21)

Запишем эти уравнения в обычных обозначениях декартовых ортогональных координат:

 (22)

**Уравнение Навье-Стокса.** Если объединить уравнения движения сплошной среды

 (23)

с обобщенным законом Ньютона, иначе говоря, если подставить вместо тензора напряжений выражение его через тензор скоростей деформации, то получим уравнение движения, пригодное только для частного класса сред - вязких ньютоновских жидкостей. Получаемое при этом векторное уравнение называется уравнением Навье-Стокса (в скалярной форме - уравнениями Навье-Стокса).

Запишем уравнения Навье-Стокса в декартовой ортогональной системе координат x, y, z. Выражения для компонент тензора напряжений дается формулами (22), выражающими обобщенный закон Ньютона в декартовой системе координат. Подставляя их в уравнение движения, получим

 (24)

Если жидкость несжимаемая и  = const, то система (24) упрощается, и ее удобно записать в векторной форме

 (25)

Уравнения (24), (25) были выведены первоначально на основе представлений о молекулярной структуре среды и о межмолекулярных силах (М.Навье, 1827 г.; С.Д.Пуассон, 1831 г.) На основе феноменологических представлений о линейной связи между тензорами скоростей деформации и напряжений, обобщающих закон Ньютона, эти уравнения вывели Б.Сен-Венан в 1843 г. и Г.Г.Стокс в 1845 г.

Воспользуемся теперь формулами обобщенного закона Ньютона (22) для того, чтобы исключить  из уравнения энергии:

 (26)

Входящая в это равенство функция  называется диссипативной функцией. Очевидно,  при .

Уравнение энергии переписывается в следующей эквивалентной форме:

 (27)

**Задача о стекании слоя вязкой жидкости по наклонной плоскости.** Слой жидкости (толщины h) ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу неподвижной плоскостью, наклоненной под углом  к горизонту. Определить движение жидкости, возникающие под влиянием поля тяжести.

Решение: Выберем неподвижную нижнюю плоскость в качестве плоскости xy, причем ось x выберем по направлению течения. Ось z перпендикулярна плоскости xy и дополняет систему координат до правой ортогональной. Ищется решение, зависящее только от координаты z. Уравнение Навье-Стокса с  при наличии гравитационного поля g имеет вид:



На свободной поверхности ( z = h ) должны выполняться условия:



где - атмосферное давление, а  - коэффициент динамической вязкости. При z = 0 должно быть ; удовлетворяющие этим условиям решение есть



Количество жидкости, протекающие через поперечное сечение слоя на единицу длинны вдоль y равно

