**Реферат по дисциплине:**

**«Математика»**

**на тему: «Основные этапы становления и структура современной математики»**

**Выполнила: студентка 1 курса**

**Заочного отделения**

**группы ПБ-1Во**

**Проверил:**

**г. Москва 2006 г.**

План:

Введение

Геометрия Евклида, как первая естественнонаучная теория

Основные этапы становления современной математики. Структура современной математики

Основные черты математического мышления

Аксиоматический метод

Принципы аксиоматического построения научных теорий

Математические доказательства

Использованная литература

геометрия математика аксиометрический

**Введение**

***Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. В неразрывной связи с запросами науки и техники запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется, так что приведенное определение необходимо понимать в самом общем смысле.***

Целью изучения математики является повышение общего кругозора, культуры мышления, формирование научного мировоззрения.

Понимание самостоятельного положения математики как особой науки стало возможным после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в VI-V веках до нашей эры. Это было началом периода элементарной математики.

В течение этого периода математические исследования имеют дело лишь с достаточно ограниченным запасом основных понятий, возникших с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Вместе с тем, уже происходит качественное совершенствование математики как науки.

Современную математику часто сравнивают с большим городом. Это - прекрасное сравнение, поскольку в математике, как и в большом городе, происходит непрерывный процесс роста и совершенствования. В математике возникают новые области, строятся изящные и глубокие новые теории подобно строительству новых кварталов и зданий. Но прогресс математики не сводится только к изменению лица города из-за строительства нового. Приходится изменять и старое. Старые теории включаются в новые, более общие; возникает необходимость укрепления фундаментов старых построек. Приходится прокладывать новые улицы, чтобы устанавливать связи между далекими кварталами математического города. Но этого мало - архитектурное оформление требует значительных усилий, поскольку разностильность различных областей математики не только портит общее впечатление от науки, но и мешает пониманию науки в целом, установлению связей между различными ее частями.

Нередко используется и другое сравнение: математику уподобляют большому ветвистому дереву, которое, систематически дает новые побеги. Каждая ветвь дерева - это та или иная область математики. Число ветвей не остается неизменным, поскольку вырастают новые ветви, срастаются воедино сначала росшие раздельно, некоторые из ветвей засыхают, лишенные питательных соков. Оба сравнения удачны и очень хорошо передают действительное положение дела.

Несомненно, что в построении математических теорий большую роль играет требование красоты. Само собой разумеется, что ощущение красоты весьма субъективно и нередко встречаются достаточно уродливые представления на этот счет. И все же приходится удивляться тому единодушию, которое вкладывается математиками в понятие «красота»: результат считается красивым, если из малого числа условий удается получить общее заключение, относящееся к широкому кругу объектов. Математический вывод считается красивым, если в нем простыми и короткими рассуждениями удается доказать значительный математический факт. Зрелость математика, его талант угадываются по тому, насколько развито у него чувство красоты. Эстетически завершенные и математически совершенные результаты легче понять, запомнить и использовать; легче выявлять и их взаимоотношения с другими областями знания.

Математика в наше время превратилась в научную дисциплину со множеством направлений исследований, огромным количеством результатов и методов. Математика теперь настолько велика, что нет возможности одному человеку охватить ее во всех ее частях, нет возможности быть в ней специалистом-универсалом. Потеря связей между ее отдельными направлениями - безусловно отрицательное следствие бурного развития этой науки. Однако в основе развития всех отраслей математики есть общее - истоки развития, корни древа математики.

**Геометрия Евклида как первая естественнонаучная теория**

В III веке до нашей эры в Александрии появилась книга Евклида с тем же названием, в русском переводе "Начала". От латинского названия "Начал" произошёл термин "элементарная геометрия". Несмотря на то, что сочинения предшественников Евклида до нас не дошли, мы можем составить некоторое мнение об этих сочинениях по "Началам" Евклида. В "Началах" имеются разделы, логически весьма мало связанные с другими разделами. Появление их объясняется только тем, что они внесены по традиции и копируют "Начала" предшественников Евклида.

"Начала" Евклида состоят из 13 книг. 1 - 6 книги посвящены планиметрии, 7 - 10 книги - об арифметике и несоизмеримых величинах, которые можно построить с помощью циркуля и линейки. Книги с 11 по 13 были посвящены стереометрии.

"Начала" начинаются с изложения 23 определений и 10 аксиом. Первые пять аксиом - "общие понятия", остальные называются "постулатами". Первые два постулата определяют действия с помощью идеальной линейки, третий - с помощью идеального циркуля. Четвёртый, "все прямые углы равны между собой", является излишним, так как его можно вывести из остальных аксиом. Последний, пятый постулат гласил: "Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то, при неограниченном продолжении этих двух прямых, они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых".

Пять "общих понятий" Евклида являются принципами измерения длин, углов, площадей, объёмов: "равные одному и тому же равны между собой", "если к равным прибавить равные, суммы равны между собой", "если от равных отнять равные, остатки равны между собой", "совмещающиеся друг с другом равны между собой", "целое больше части".

Далее началась критика геометрии Евклида. Критиковали Евклида по трём причинам: за то, что он рассматривал только такие геометрические величины, которые можно построить с помощью циркуля и линейки; за то, что он разрывал геометрию и арифметику и доказывал для целых чисел то, что уже доказал для геометрических величин, и, наконец, за аксиомы Евклида. Наиболее сильно критиковали пятый постулат, самый сложный постулат Евклида. Многие считали его лишним, и что его можно и нужно вывести из других аксиом. Другие считали, что его следует заменить более простым и наглядным, равносильным ему: "Через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную прямую".

Критика разрыва между геометрией и арифметикой привела к расширению понятия числа до действительного числа. Споры о пятом постулате привели к тому, что в начале XIX века Н.И.Лобачевский, Я.Бойяи и К.Ф.Гаусс построили новую геометрию, в которой выполнялись все аксиомы геометрии Евклида, за исключением пятого постулата. Он был заменён противоположным утверждением: "В плоскости через точку вне прямой можно провести более одной прямой, не пересекающей данную". Эта геометрия была столь же непротиворечивой, как и геометрия Евклида.

Модель планиметрии Лобачевского на евклидовой плоскости была построена французским математиком Анри Пуанкаре в 1882 году.

На евклидовой плоскости проведём горизонтальную прямую. Эта прямая называется абсолютом (*x*). Точки евклидовой плоскости, лежащие выше абсолюта, являются точками плоскости Лобачевского. Плоскостью Лобачевского называется открытая полуплоскость, лежащая выше абсолюта. Неевклидовы отрезки в модели Пуанкаре - это дуги окружностей с центром на абсолюте или отрезки прямых, перпендикулярных абсолюту (*AB, CD*). Фигура на плоскости Лобачевского - фигура открытой полуплоскости, лежащей выше абсолюта (*F*). Неевклидово движение является композицией конечного числа инверсий с центром на абсолюте и осевых симметрий, оси которых перпендикулярны абсолюту. Два неевклидовых отрезка равны, если один из них неевклидовым движением можно перевести в другой. Таковы основные понятия аксиоматики планиметрии Лобачевского.

Все аксиомы планиметрии Лобачевского непротиворечивы. "Неевклидова прямая - это полуокружность с концами на абсолюте или луч с началом на абсолюте и перпендикулярный абсолюту". Таким образом, утверждение аксиомы параллельности Лобачевского выполняется не только для некоторой прямой *a* и точки *A*, не лежащей на этой прямой, но и для любой прямой *a* и любой не лежащей на ней точки *A*.

За геометрией Лобачевского возникли и другие непротиворечивые геометрии: от евклидовой отделилась проективная геометрия, сложилась многомерная евклидова геометрия, возникла риманова геометрия (общая теория пространств с произвольным законом измерения длин) и др. Из науки о фигурах в одном трёхмерном евклидовом пространстве геометрия за 40 - 50 лет превратилась в совокупность разнообразных теорий, лишь в чём-то сходных со своей прародительницей - геометрией Евклида.

**Основные этапы становления современной математики. Структура современной математики**

Академик А.Н.Колмогоров выделяет четыре периода развития математики[[1]](#footnote-1): зарождения математики, элементарной математики, математики переменных величин, современной математики.

В период развития элементарной математики из арифметики постепенно вырастает теория чисел. Создается алгебра как буквенное исчисление. А созданная древними греками система изложения элементарной геометрии – геометрии Евклида – на два тысячелетия вперед сделалась образцом дедуктивного построения математической теории.

В XVII веке запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создание дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин. Великим открытиям XVII века является введенное Ньютоном и Лейбницем понятие бесконечно малой величины, создание основ анализа бесконечно малых величин (математического анализа).

На первый план выдвигается понятие функции. Функция становится основным предметом изучения. Изучение функции приводит к основным понятиям математического анализа: пределу, производной, дифференциалу, интегралу.

К этому времени относятся и появление гениальной идеи Р.Декарта о методе координат. Создается аналитическая геометрия, которая позволяет изучать геометрические объекты методами алгебры и анализа. С другой стороны метод координат открыл возможность геометрической интерпретации алгебраических и аналитических фактов.

Дальнейшее развитие математики привело в начале ХIX века к постановке задачи изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм с достаточно общей точки зрения.

Связь математики и естествознания приобретает все более сложные формы. Возникают новые теории и возникают они не только в результате запросов естествознания и техники, но и в результате внутренней потребности математики. Замечательным примером такой теории является воображаемая геометрия Н.И.Лобачевского. Развитие математики в XIX и XX веках позволяет отнести ее к периоду современной математики. Развитие самой математики, математизация различных областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению новых математических дисциплин, например, исследование операций, теория игр, математическая экономика и другие.

Основными методами в математических исследованиях являются математические доказательства - строгие логические рассуждения. Математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, для оценки выбора способа ее решения необходима математическая интуиция.

В математике изучаются математические модели объектов. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга реальных явлений. Так, одно и тоже дифференциальное уравнение может описывать процессы роста населения и распад радиоактивного вещества. Для математика важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.

В математике используют два вида умозаключений: дедукция и индукция.

Индукция – метод исследования, в котором общий вывод строится на основе частных посылок.

Дедукция – способ рассуждения, посредством которого от общих посылок следует заключение частного характера.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Причина проникновения математики в различные отрасли знаний заключается в том, что она предлагает весьма четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Без современной математики с ее развитыми логическим и вычислительным аппаратами был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

О**сновные черты математического мышления**

По данному вопросу особый интерес представляет характеристика математического мышления, данная А.Я.Хинчиным, а точнее, его конкретно-исторической формы - стиля математического мышления. Раскрывая сущность стиля математического мышления, он выделяет четыре общие для всех эпох черты, заметно отличающие этот стиль от стилей мышления в других науках.

Во-первых, для математика характерна доведенное до предела *доминирование логической схемы рассуждения*. Математик, потерявший, хотя бы временно, из виду эту схему, вообще лишается возможности научно мыслить. Эта своеобразная черта стиля математического мышления имеет в себе много ценного. Очевидно, что она в максимальной степени позволяет следить за правильностью течения мысли и гарантирует от ошибок; с другой стороны, она заставляет мыслящего при анализе иметь перед глазами всю совокупность имеющихся возможностей и обязывает его учесть каждую из них, не пропуская ни одной (такого рода пропуски вполне возможны и фактически часто наблюдаются при других стилях мышления).

Во-вторых, *лаконизм*, т.е. сознательное стремление всегда находить кратчайший ведущий к данной цели логический путь, беспощадное отбрасывание всего, что абсолютно необходимо для безупречной полноценности аргументации. Математическое сочинение хорошего стиля, не терпит никакой “воды”, никаких украшающих, ослабляющих логическое напряжение разглагольствований, отвлечений в сторону; предельная скупость, суровая строгость мысли и ее изложения составляют неотъемлемую черту математического мышления. Черта эта имеет большую ценность не только для математического, но и для любого другого серьезного рассуждения. Лаконизм, стремление не допускать ничего излишнего, помогает и самому мыслящему, и его читателю или слушателю полностью сосредоточиться на данном ходе мыслей, не отвлекаясь побочными представлениями и не теряя непосредственного контакта с основной линией рассуждения.

Корифеи науки, как правило, мыслят и выражаются лаконично во всех областях знаний, даже тогда, когда мысль их создает и излагает принципиально новые идеи. Какое величественное впечатление производит, например, благородная скупость мысли и речи величайших творцов физики: Ньютона, Эйнштейна, Нильса Бора! Может быть, трудно найти более яркий пример того, какое глубокое воздействие может иметь на развитие науки именно стиль мышления ее творцов.

Для математики лаконизм мысли является непререкаемым, канонизированным веками законом. Всякая попытка обременить изложение не обязательно нужными (пусть даже приятными и увлекательными для слушателей) картинами, отвлечениями, разглагольствованиями заранее ставится под законное подозрение и автоматически вызывает критическую настороженность.

В-третьих, четкая расчлененность хода рассуждений. Если, например, при доказательстве какого-либо предложения мы должны рассмотреть четыре возможных случая, из которых каждый может разбиваться на то или другое число подслучаев, то в каждый момент рассуждения математик должен отчетливо помнить, в каком случае и подслучае его мысль сейчас обретается и какие случаи и подслучаи ему еще остается рассмотреть. При всякого рода разветвленных перечислениях математик должен в каждый момент отдавать себе отчет в том, для какого родового понятия он перечисляет составляющие его видовые понятия. В обыденном, не научном мышлении мы весьма часто наблюдаем в таких случаях смешения и перескоки, приводящие к путанице и ошибкам в рассуждении. Часто бывает, что человек начал перечислять виды одного какого-нибудь рода, а потом незаметно для слушателей (а часто и для самого себя), пользуясь недостаточной логической отчетливостью рассуждения, перескочил в другой род и заканчивает заявлением, что теперь оба рода расклассифицированы; а слушатели или читатели не знают, где пролегает граница между видами первого и второго рода.

Для того чтобы сделать такие смешения и перескоки невозможными, математики издавна широко пользуются простыми внешними приемами нумерации понятий и суждений, иногда (но гораздо реже) применяемыми и в других науках. Те возможные случаи или те родовые понятия, которые надлежит рассмотреть в данном рассуждении, заранее перенумеровываются; внутри каждого такого случая те, подлежащие рассмотрению подслучаи, которые он содержит, также перенумеровываются (иногда, для различения, с помощью какой-либо другой системы нумерации). Перед каждым абзацем, где начинается рассмотрение нового подслучая, ставится принятое для этого подслучая обозначение (например: II 3 - это означает, что здесь начинается рассмотрение третьего подслучая второго случая, или описание третьего вида второго рода, если речь идет о классификации). И читатель знает, что до тех пор, покуда он не натолкнется на новую числовую рубрику, всё излагаемое относится только к этому случаю и подслучаю. Само собою, разумеется, что такая нумерация служит лишь внешним приемом, очень полезным, но отнюдь не обязательным, и что суть дела не в ней, а в той отчетливой расчлененности аргументации или классификации, которую она и стимулирует, и знаменует собою.

В-четвертых, скрупулезная точность символики, формул, уравнений. То есть “каждый математический символ имеет строго определенное значение: замена его другим символом или перестановка на другое место, как правило, влечет за собою искажение, а подчас и полное уничтожение смысла данного высказывания”.

Выделив основные черты математического стиля мышления, А.Я.Хинчин замечает, что математика (особенно математика переменных величин) по своей природе имеет диалектический характер, а следовательно, способствует развитию диалектического мышления. Действительно, в процессе математического мышления происходит взаимодействие наглядного (конкретного) и понятийного (абстрактного). “Мы не можем мыслить линии, – писал Кант, – не проведя её мысленно, не можем мыслить себе три измерения, не проведя, из одной точки трех перпендикулярных друг к другу линий”.

Взаимодействие конкретного и абстрактного “вело” математическое мышление к освоению новых и новых понятий и философских категорий. В античной математике (математике постоянных величин) таковыми были “число” и “пространство”, которые первоначально нашли отражение в арифметике и евклидовой геометрии, а позже в алгебре и различных геометрических системах. Математика переменных величин “базировалась” на понятиях, в которых отражалось движение материи, - “конечное”, “бесконечное”, “непрерывность”, “дискретное”, “бесконечно малая”, “производная” и т.п.

Если говорить о современном историческом этапе развития математического познания, то он идет в русле дальнейшего освоения философских категорий: теория вероятностей “осваивает” категории возможного и случайного; топология - категории отношения и непрерывности; теория катастроф - категорию скачка; теория групп - категории симметрии и гармонии и т.д.

В математическом мышлении выражены основные закономерности построения сходных по форме логических связей. С его помощью осуществляется переход от единичного (скажем, от определенных математических методов – аксиоматического, алгоритмического, конструктивного, теоретико-множественного и других) к особенному и общему, к обобщенным дедуктивным построениям. Единство методов и предмета математики определяет специфику математического мышления, позволяет говорить об особом математическом языке, в котором не только отражается действительность, но и синтезируется, обобщается, прогнозируется научное знание. Могущество и красота математической мысли - в предельной четкости её логики, изяществе конструкций, искусном построении абстракций.

Принципиально новые возможности мыслительной деятельности открылись с изобретением ЭВМ, с созданием машинной математики. В языке математики произошли существенные изменения. Если язык классической вычислительной математики состоял из формул алгебры, геометрии и анализа, ориентировался на описание непрерывных процессов природы, изучаемых, прежде всего в механике, астрономии, физике, то современный её язык - это язык алгоритмов и программ, включающий старый язык формул в качестве частного случая.

Язык современной вычислительной математики становится все более универсальным, способным описывать сложные (многопараметрические) системы. Вместе с тем хочется подчеркнуть, что каким бы совершенным ни был математический язык, усиленный электронно-вычислительной техникой, он не порывает связей с многообразным “живым”, естественным языком. Мало того, разговорный язык является базой языка искусственного. В этом отношении представляет интерес недавнее открытие ученых. Речь идет о том, что древний язык индейцев аймара, на котором говорят примерно 2,5 миллиона человек в Боливии и Перу, оказался в высшей степени удобным для компьютерной техники. Еще в 1610 году итальянский миссионер-иезуит Людовико Бертони, составивший первый словарь аймара, отмечал гениальность его создателей, добившихся высокой логической чистоты. В аймара, например, не существует неправильных глаголов и никаких исключений из немногих четких грамматических правил. Эти особенности языка аймара позволили боливийскому математику Айвану Гусману де Рохас создать систему синхронного компьютерного перевода с любого из пяти заложенных в программу европейских языков, “мостиком” между которыми служит язык аймара. ЭВМ “Аймара”, созданная боливийским ученым, получила высокую оценку специалистов. Резюмируя эту часть вопроса о сущности математического стиля мышления, следует отметить, что его основным содержанием является понимание природы.

**Аксиоматический метод**

Аксиоматика - основной способ построения теории, с древности и до сегодняшнего дня подтверждающий свою универсальность и все применимость.

В основе построения математической теории лежит аксиоматический метод. В основу научной теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные положения теории получаются, как логические следствия аксиом.

Аксиоматический метод появился в Древней Греции, и в данное время применяется практически во всех теоретических науках, а, прежде всего в математике.

Сравнивая три, в известном отношении, дополняющие друг друга геометрии: Евклидову (параболическую), Лобачевского (гиперболическую) и Риманову (эллиптическую), следует отметить, что наряду с некоторыми сходствами имеется большое различие между сферической геометрией, с одной стороны, и геометриями Евклида и Лобачевского - с другой.

Коренное отличие современной геометрии состоит в том, что теперь она охватывает "геометрии" бесконечного множества разных воображаемых пространств. Однако следует отметить, что все эти геометрии являются интерпретациями евклидовой геометрии и в основе их лежит аксиоматический метод, впервые использованный Евклидом.

На основе исследований получил своё развитие и широкое применение аксиоматический метод. Как частный случай применения этого способа служит метод следов в стереометрии, позволяющий решать задачи на построение сечений в многогранниках и некоторых других позиционных задач.

Аксиоматический метод, развитый вначале в геометрии, теперь стал важным орудием изучения и в других разделах математики, физики и механики. В настоящее время ведутся работы по усовершенствованию и более глубокому изучению аксиоматического способа построения теории.

Аксиоматический метод построения научной теории заключается в выделении основных понятий, формулировке аксиом теорий, а все остальные утверждения выводятся логическим путём, опираясь на них. Известно, что одно понятие должно разъясняться с помощью других, которые, в свою очередь, тоже определяются с помощью каких-то известных понятий. Таким образом, мы приходим к элементарным понятиям, которые нельзя определить через другие. Эти понятия и называются основными.

Когда мы доказываем утверждение, теорему, то опираемся на предпосылки, которые считаются уже доказанными. Но эти предпосылки тоже доказывались, их нужно было обосновать. В конце концов, мы приходим к не доказываемым утверждениям и принимаем их без доказательства. Эти утверждения называются аксиомами. Набор аксиом должен быть таким, чтобы, опираясь на него, можно было доказать дальнейшие утверждения.

Выделив основные понятия и сформулировав аксиомы, далее мы выводим теоремы и другие понятия логическим путём. В этом и заключается логическое строение геометрии. Аксиомы и основные понятия составляют основания планиметрии.

Так как нельзя дать единое определение основных понятий для всех геометрий, то основные понятия геометрии следует определить как объекты любой природы, удовлетворяющие аксиомам этой геометрии. Таким образом, при аксиоматическом построении геометрической системы мы исходим из некоторой системы аксиом, или аксиоматики. В этих аксиомах описываются свойства основных понятий геометрической системы, и мы можем представить основные понятия в виде объектов любой природы, которые обладают свойствами, указанными в аксиомах.

После формулировки и доказательства первых геометрических утверждений становится возможным доказывать одни утверждения (теоремы) с помощью других. Доказательства многих теорем приписываются Пифагору и Демокриту.

Гиппократу Хиосскому приписывается составление первого систематического курса геометрии, основанного на определениях и аксиомах. Этот курс и его последующие обработки назывались "Элементы".

**Аксиоматический метод построения научной теории**

Создание дедуктивного или аксиоматического метода построения науки является одним из величайших достижений математической мысли. Оно потребовало работы многих поколений ученых.

Замечательной чертой дедуктивной системы изложения является простота этого построения, позволяющая описать его в немногих словах.

Дедуктивная система изложения сводится:

1) к перечислению основных понятий,

2) к изложению определений,

3) к изложению аксиом,

4) к изложению теорем,

5) к доказательству этих теорем.

Аксиома – утверждение, принимаемое без доказательств.

Теорема – утверждение, вытекающее из аксиом.

Доказательство – составная часть дедуктивной системы, это есть рассуждение, которое показывает, что истинность утверждения вытекает логически из истинности предыдущих теорем или аксиом.

Внутри дедуктивной системы не могут быть решены два вопроса: 1) о смысле основных понятий, 2) об истинности аксиом. Но это не значит, что эти вопросы вообще неразрешимы.

История естествознания свидетельствует, что возможность аксиоматического построения той или иной науки появляется лишь на довольно высоком уровне развития этой науки, на базе большого фактического материала, позволяет отчетливо выявить те основные связи и соотношения, которые существуют между объектами, изучаемыми данной наукой.

Образцом аксиоматического построения математической науки является элементарная геометрия. Система аксиом геометрии были изложены Евклидом (около 300 г. до н. э.) в непревзойденном по своей значимости труде “Начала”. Эта система в основных чертах сохранилась и по сей день.

Основные понятия: точка, прямая, плоскость основные образы; лежать между, принадлежать, движение.

Элементарная геометрия имеет 13 аксиом, которые разбиты на пять групп. В пятой группе одна аксиома о параллельных (V постулат Евклида): *через точку на плоскости можно провести только одну прямую, не пересекающую данную прямую*. Это единственная аксиома, вызывавшая потребность доказательства. Попытки доказать пятый постулат занимали математиков более 2-х тысячелетий, вплоть до первой половины 19 века, т.е. до того момента, когда Николай Иванович Лобачевский доказал в своих трудах полную безнадежность этих попыток. В настоящее время недоказуемость пятого постулата является строго доказанным математическим фактом.

Аксиому о параллельных Н.И. Лобачевский заменил аксиомой: *Пусть в данной плоскости дана прямая и лежащая вне прямой точка. Через эту точку можно провести к данной прямой, по крайней мере, две параллельные прямые.*

Из новой системы аксиом Н.И. Лобачевский с безупречной логической строгостью вывел стройную систему теорем, составляющих содержание неевклидовой геометрии. Обе геометрии Евклида и Лобачевского, как логические системы равноправны.

Три великих математика в 19 веке почти одновременно, независимо друг от друга пришли к одним результатам недоказуемости пятого постулата и к созданию неевклидовой геометрии.

Николай Иванович Лобачевский (1792-1856)

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855)

Янош Бойяи (1802-1860)

**Математическое доказательство**

Основным методом в математических исследованиях являются математические доказательства – строгие логические рассуждения. В силу объективной необходимости, указывает член-корреспондент РАН Л.Д.Кудрявцев[[2]](#footnote-2), логические рассуждения (которые по своей природе, если они правильные, являются и строгими) представляют метод математики, без них математика немыслима. Следует отметить, что математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, для оценки ее данных, для выделения существенных из них и для выбора способа ее решения необходима еще математическая интуиция, позволяющая предвидеть нужный результат прежде, чем он будет получен, наметить путь исследования с помощью правдоподобных рассуждений. Но справедливость рассматриваемого факта доказывается не проверкой ее на ряде примеров, не проведением ряда экспериментов (что само по себе играет большую роль в математических исследованиях), а чисто логическим путем, по законам формальной логики.

Считается, что математическое доказательство является истиной в последней инстанции. Решение, которое основано на чистой логике просто не может быть неправильным. Но с развитием науки и задачи перед математиками ставятся всё более сложные.

“Мы вошли в эпоху, когда математический аппарат стал настолько сложным и громоздким, что с первого взгляда уже нельзя сказать - правдива или нет встреченная задача”, полагает Кейт Девлин из Стенфордского Университета Калифорнии, США. Он приводит в пример “классификацию простых конечных групп”, которую сформулировали еще в 1980 году, а полного точного доказательства не привили до сих пор. Скорее всего, теорема верна, но совершенно точно об этом говорить нельзя.

Компьютерное решение тоже невозможно назвать точным, ибо такие вычисления всегда имеют погрешность. В 1998 году Хейлс предложил решение теоремы Кеплера при помощи компьютера, сформулированной еще в 1611 году. Эта теорема описывает наиболее плотную упаковку шаров в пространстве. Доказательство было представлено на 300 страницах и содержало в себе 40000 строк машинного кода. 12 рецензентов проверяли решение в течение года, но стопроцентной уверенности в правильности доказательства они так и не достигли, и исследование отправили на доработку. В результате оно было опубликовано только через четыре года и без полной сертификации рецензентов.

Все последние вычисления для прикладных задач производятся на компьютере, но ученые считают, что для большей достоверности математические выкладки должны быть представлены без погрешностей.

Теория доказательства разработана в логике и включает три структурных компонента: тезис (то, что предполагается доказать), аргументы (совокупность фактов, общепринятых понятий, законов и т.п. соответствующей науки) и демонстрация (сама процедура развертывания доказательства; последовательная цепь умозаключений, когда *n*-ное умозаключение становится одной из посылок *n+1*-го умозаключения). Выделяются правила доказательства, указаны возможные логические ошибки.

Математическое доказательство имеет много общего с теми принципами, которые устанавливаются формальной логикой. Более того, математические правила рассуждений и операций, очевидно, послужили одной из основ в разработке процедуры доказательства в логике. В частности, исследователи истории становления формальной логики считают, что в свое время, когда Аристотель предпринял первые шаги по созданию законов и правил логики, он обратился к математической и к практике юридической деятельности. В этих источниках он и находил материал для логических построений задуманной теории.

В XX веках понятие доказательства утратило строгий смысл, что произошло в связи с обнаружением логических парадоксов, таившихся в теории множеств и особенно в связи с результатами, которые принесли теоремы К. Геделя о неполноте формализации.

Прежде всего, это коснулось самой математики, в связи, с чем было высказано убеждение, что термин "доказательство" не имеет точного определения. Но если уж подобное мнение (имеющее место и поныне) затрагивает саму математику, то приходят к выводу, согласно которому доказательство следует принять не в логико-математическом, а в психологическом смысле. При том подобный взгляд обнаруживают и у самого Аристотеля, считавшего, что доказать означает провести рассуждение, которое убедило бы нас в такой степени, что, используя его, убеждаем других в правоте чего-либо. Определенный оттенок психологического подхода находим у А.Е.Есенина-Вольпина. Он резко выступает против принятия истины без доказательства, связывая это с актом веры, и далее пишет: "Доказательством суждения я называю честный прием, делающий это суждение неоспоримым". Есенин-Вольпин отдает отчет, что его определение нуждается еще в уточнениях. Вместе с тем, сама характеристика доказательства как "честного приема" не выдает ли апелляцию к нравственно-психологической оценке?

Вместе с тем обнаружение теоретико-множественных парадоксов и появление теорем Геделя как раз содействовали и разработке теории математического доказательства, предпринятой интуиционистами, особенно конструктивистского направления, и Д.Гильбертом.

Иногда считают, что математическое доказательство носит всеобщий характер и представляет идеальный вариант научного доказательства. Однако оно - не единственный метод, есть и другие способы доказательных процедур и операций. Верно лишь то, что у математического доказательства немало сходного с формально-логическим, реализуемом в естествознании, и что математическое доказательство имеет определенную специфику, равно, как и набор приемов-операций. На этом мы и остановимся, опуская то общее, что роднит его с другими формами доказательств, то есть, не развертывая во всех шагах (даже и основных) алгоритм, правила, ошибки и т.п. процесса доказательства.

Математическое доказательство представляет рассуждение, имеющее задачей обосновать истинность (конечно, в математическом, то есть как выводимость, смысле) какого-либо утверждения.

Свод правил, применяемых в доказательстве, сформировался вместе с появлением аксиоматических построений математической теории. Наиболее четко и полно это было реализовано в геометрии Эвклида. Его "Начала" стали своего рода модельным эталоном аксиоматической организации математического знания, и долгое время оставались таковыми для математиков.

Высказывания, представляемые в виде определенной последовательности, должны гарантировать вывод, который при соблюдении правил логического оперирования и считается доказанным. Необходимо подчеркнуть, что определенное рассуждение является доказательством только относительно некоторой аксиоматической системы.

При характеристике математического доказательства выделяют две основные особенности. Прежде всего, то, что математическое доказательство исключает какие-либо ссылки на эмпирию. Вся процедура обоснования истинности вывода осуществляется в рамках принимаемой аксиоматики. Академик А.Д.Александров в связи с этим подчеркивает. Можно тысячи раз измерять углы треугольника и убедиться, что они равны 2d. Но математику этим ничего не докажешь. Ему докажешь, если выведешь приведенное утверждение из аксиом. Повторимся. Здесь математика и близка методам схоластики, которая также принципиально отвергает аргументацию опытно данными фактами.

К примеру, когда была обнаружена несоизмеримость отрезков, при доказательстве этой теоремы исключалось обращение к физическому эксперименту, поскольку, во-первых, само понятие "несоизмеримость" лишено физического смысла, а, во-вторых, математики и не могли, имея дело с абстракцией, привлекать на помощь вещественно-конкретные протяженности, измеряемы чувственно-наглядным приемом. Несоизмеримость, в частности, стороны и диагонали квадрата, доказывается, опираясь на свойство целых чисел с привлечением теоремы Пифагора о равенстве квадрата гипотенузы (соответственно - диагонали) сумме квадратов катетов (двух сторон прямоугольного треугольника). Или когда Лобачевский искал для своей геометрии подтверждение, обращаясь к результатам астрономических наблюдений, то это подтверждение осуществлялось им средствами сугубо умозрительного характера. В интерпретациях неэвклидовой геометрии, проведенных Кэли - Клейном и Бельтрами, также фигурировали типично математические, а не физические объекты.

Вторая особенность математического доказательства - его наивысшая абстрактность, которой оно отличается от процедур доказательства в остальных науках. И опять же, как в случае с понятием математического объекта, речь идет не просто о степени абстракции, а о ее природе. Дело в том, что высокого уровня абстрагирования доказательство достигает и в ряде других наук, например, в физике, космологии и, конечно, в философии, поскольку предметом последней становятся предельные проблемы бытия и мышления. Математику же отличает то, что здесь функционируют переменные, смысл которых - в отвлечении от любых конкретных свойств. Напомним, что, по определению, переменные - знаки, которые сами по себе не имеют значений и обретают последние только при подстановке вместо них имен определенных предметов (индивидные переменные) или при указании конкретных свойств и отношений (предикатные переменные), или, наконец, в случаях замены переменной содержательным высказыванием (пропозициональная переменная).

Отмеченной особенностью и обусловлен характер крайней абстрактности используемых в математическом доказательстве знаков, равно, как и утверждений, которые, благодаря включению в свою структуру переменных, превращаются в функции высказывания.

Сама процедура доказательства, определяемая в логике как демонстрация, протекает на основе правил вывода, опираясь на которые осуществляется переход от одних доказанных утверждений к другим, образуя последовательную цепь умозаключений. Наиболее распространены два правила (подстановки и вывода заключений) и теорема о дедукции.

Правило подстановки. В математике подстановка определяется как замена каждого из элементов *a* данного множества каким-либо другим элементом F (*a*) из того же множества. В математической логике правило подстановки формулируется следующим образом. Если истинная формула *M* в исчислении высказываний содержит букву, скажем *A*, то, заменив ее повсюду, где она встречается, произвольной буквой *D*, мы получим формулу, также истинную, как и исходная. Это возможно, и допустимо потому именно, что в исчислении высказываний отвлекаются от смысла высказываний (формул)... Учитываются только значения "истина" или "ложь". Например, в формуле *M*: *A-->* (*B*U*A*) на место *A* подставляем выражение (*A*U*B*), в результате получаем новую формулу (*A*U*B*) -->[(*B*U(*A*U*B*)].

Правило вывода заключений соответствует структуре условно-категорического силлогизма modus ponens (модус утверждающий) в формальной логике. Он имеет следующий вид:

*a--> b*

*a* .

*b*

Дано высказывание (*a-> b*) и еще дано *a*. Из этого следует *b*.

К примеру: Если идет дождь, то мостовая мокрая, дождь идет (*a*), следовательно, мостовая мокрая (*b*). В математической логике этот силлогизм записывается таким образом (*a-> b*) *a-> b*.



Умозаключение определяется, как правило, отделения для импликации. Если дана импликация (*a-> b*) и ее антецедент (*a*), то мы вправе присоединить к рассуждению (доказательству) также и консеквент данной импликации (*b*). Силлогизм носит принудительный характер, составляя арсенал дедуктивных средств доказательства, то есть, абсолютно отвечая требованиям математических рассуждений.

Большую роль в математическом доказательстве играет теорема о дедукции - общее название для ряда теорем, процедура которых обеспечивает возможность установить доказуемость импликации: *A-> B*, когда налицо логический вывод формулы *B* из формулы *A*. В наиболее распространенном варианте исчисления высказываний (в классической, интуиционистской и др. видах математики) теорема о дедукции утверждает следующее. Если дана система посылок G и посылка *A*, из которых, согласно правилам, выводимо *B* Г , *A* *B* ( - знак выводимости), то следует, что только из посылок G можно получить предложение *A--> B.*



Мы рассмотрели тип, который является прямым доказательством. Вместе с тем в логике используются и так называемые косвенные, есть не прямые доказательства, которые развертываются по следующей схеме. Не имея, в силу ряда причин (недоступность объекта исследования, утрата реальности его существования и т.п.) возможности провести прямое доказательство истинности какого-либо утверждения, тезиса, строят антитезис. Убеждаются, что антитезис ведет к противоречиям, и, стало быть, является ложным. Тогда из факта ложности антитезиса делают - на основании закона исключенного третьего (*a* v) - вывод об истинности тезиса.



В математике широко используется одна из форм косвенного доказательства - доказательство от противного. Оно особенно ценно и, по сути, незаменимо в принятии фундаментальных понятий и положений математики, например, понятия актуальной бесконечности, которое никак иначе ввести невозможно.

Операция доказательства от противного представлена в математической логике следующим образом. Дана последовательность формул G и отрицание *A* (G , *A*). Если из этого следует *B* и его отрицание (G , *A B, не-B*), то можно сделать вывод, что из последовательности формул G вытекает истинность *A*. Иначе говоря, из ложности антитезиса следует истинность тезиса.



**Использованная литература:**

1. Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман, Высшая математика для экономистов, учебник, Москва, 2002;
2. Л.Д.Кудрявцев, Современная математика и ее преподавание, Москва, Наука, 1985 год;
3. О.И.Ларичев, Объективные модели и субъективные решения, Москва, Наука, 1987 год;
4. А.Я.Халамайзер, «Математика? – Забавно!», издание автора, 1989 год;
5. П.К.Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, Москва, 3 издание, 1967 год;
6. В.Е.Гмурман, Теория вероятности и математическая статистика, Москва, Высшая школа, 1977 год;
7. Всемирная сеть Enternet.

1. Колмогоров А.Н. – Математика, Математический энциклопедический словарь, Москва, Советская энциклопедия, 1988 год. [↑](#footnote-ref-1)
2. Кудрявцев Л.Д. – Современная математика и ее преподавание, Москва, Наука, 1985 год. [↑](#footnote-ref-2)