**Перспективы исследований в философии математики**

Философия математики как отдельная ветвь философии родилась сто лет назад. Исследования в области оснований математики и математической логики, начатые в конце XIX - начале XX в., были связаны с грандиозными философскими программами, а именно, с логицизмом, интуиционизмом и формализмом. Поначалу эта связь казалась необходимой, но по ходу времени росло разочарование в выполнимости этих программ, и к 60-м годам в настроениях математиков и логиков стала превалировать усталость. В этом отношении весьма симптоматично замечание А.Мостовского в его работе 'Thirty years of foundational studies': 'Философские цели трех школ не были достигнуты, и, судя по всему, мы не ближе к полному пониманию математики, чем основатели этих школ'1. Больше того, многие полагают, что сами программы не имеют прямого отношения к основаниям математики и математической логики и возникновение программ обязано философским талантам и интересам основателей школ. Опять-таки Мостовский замечает в связи с этим: ':Нельзя отрицать, что активность этих школ принесла огромное число важных результатов и открытий, которые углубили наше знание математики и ее отношения к логике. Как часто случается, эти побочные продукты оказались более важными, чем исходные цели основателей этих школ'2. Недавно Х.Патнэм опубликовал статью с характерным названием 'Почему все это не работает' (имея в виду традиционно главные направления в философии математики). В некотором смысле это итоговое впечатление о нынешнем состоянии философии математики.

Другими словами, философия математики оказалась в глубоком кризисе, начиная с 50-60-х годов, когда были исчерпаны ресурсы традиционных подходов к пониманию математики. И хотя традиционное преподнесение проблем этой области философских исследований опиралось (да и опирается сейчас) на три великих направления, существует глубокий скепсис относительно возможностей самой дисциплины. И тем не менее, по мнению ряда авторитетных исследователей, дисциплина выжила, поскольку старые проблемы были заменены новыми3. Цель данной статьи состоит в анализе сложившейся ситуации в философии математики и наброске перспектив ее развития в свете этих новых проблем.

Отсутствие прогресса часто объясняют тем, что проблемы, бывшие собственно философскими, перестали быть таковыми, перейдя в разряд 'технических', чисто математических или логических. Быть может, исследования в области философии математики, точнее, оснований математики, действительно должны быть в высшей степени техническими исследованиями, а само появление традиционных классических направлений было обязано тому, что 'отцы-основатели' сумели увязать (быть может, и не совсем обоснованно) математические и философские проблемы, как, например, это сделал Рассел, связав поиски спасения от парадоксов с логицизмом.

Другой немаловажной причиной ощущения стагнации в философии математики является огромное уважение к авторитетам, временами препятствующее нормальному процессу критического обсуждения проблем. Типичным случаем является крайний платонизм К.Геделя, в отношении которого, несмотря на неудовлетворительность крайней формы платонизма, постоянно возобновлялись попытки оправдания или реабилитации весьма сложных для интерпретации и понимания утверждений. В частности, речь идет о хорошо известном высказывании Геделя о том, что математические сущности доступны интуиции математика точно так же, как физические объекты доступны чувственному восприятию. И только в последнее время возобладало скептическое отношение к попыткам придать более точный смысл подобным тезисам4. То же относится к тезису В.Куайна о том, что логика второго порядка является скрытой теорией множеств ('волк в овечьей шкуре'), - тезису, который в значительной степени тормозил логицистские тенденции.

Преодоление стагнации в философии математики в последние два десятка лет было связано с общефилософскими тенденциями. Главным обстоятельством тут является то, что философия математики есть часть философии, и на ней отражаются все те тенденции, которые свойственны всей философии. Философия даже относительно элементарных ветвей математики - это такая дисциплина, в которой ясно фокусируются теории о природе языка, знания, указания и истины. Именно это обстоятельство делает исследования в философии математики важным видом философского исследования. В настоящее время стало очевидным то обстоятельство, что традиционная философия математики столкнулась с дилеммами, обусловленными современной теорией познания, и, стало быть, мы имеем дело с эпистемологическим уклоном в философии математики.

Возможны два представления того, что было сделано в философии математики в последнее время. Одно связано с попыткой увязать новые исследования с традиционными направлениями - логицизмом, формализмом и интуиционизмом, т.е. представить новые направления как реакцию на традиционные. Другое связано непосредственно с эпистемологической тенденцией, вызванной к жизни постановкой двух дилемм П.Бенацеррафом в его работах 'What numbers could not be' и 'Mathematical truth'5.

Последняя четверть века прошла в поисках согласия по поводу того, что составляет ответ на теоретико-познавательную дилемму, поставленную в работе П.Бенацеррафа 'Математическая истина'. Дилемма формулируется следующим образом: если математика представляет собой исследование объективных идеальных сущностей и если когнитивные способности человека позволяют ему познавать только чувственные объекты, то как он может познавать математические объекты?

Апелляция к познанию чувственных объектов подразумевает совершенно определенную концепцию познания - так называемую причинную теорию познания. Можно возразить, что это не единственная теория, и тогда дилемма теряет смысл. Однако можно переформулировать дилемму таким образом, что она не будет опираться на специфическую теорию познания. Дилемма ставит перед нами выбор: либо отрицать, что математика говорит о числах, либо предполагать некоторые неестественные способности человека в отношении сбора информации. Поскольку обе возможности не выглядят привлекательными, предпринимались различные попытки разрешить дилемму. Многие исследователи соглашаются в том, что при решении эпистемологических вопросов приходится решать и главный онтологический вопрос о существовании математических сущностей, и решать его надо так, чтобы не нужно было жертвовать стандартной математикой, как это происходит при традиционном номиналистическом подходе.

Здесь мы хотим наметить основные направления в философии математики, цель которых состоит в попытке разрешить проблемы, связанные с эпистемологическим статусом математических утверждений, и соответствующим онтологическим статусом математических объектов. Краткий перечень основных альтернатив включает несколько направлений. Одним из наиболее влиятельных является структурализм, согласно которому математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах.

Основными представителями структурализма являются П.Бенацерраф, С.Шапиро и М.Резник6. Согласно Бенацеррафу, онтологические вопросы о существовании математических сущностей могут быть вообще обойдены, если понятие математического объекта заменить понятием места в математической структуре. В уже упомянутой статье 'Чем не должны быть числа' он приводит пример числа 2, которое должно пониматься не как некоторый абстрактный объект, а как то, что стоит после 1 и перед 3. Другими словами, указание на абстрактный объект 2 требует неявного указания на всю структуру натуральных чисел. Но тем самым устраняется необходимость в семантической схеме, согласно которой математические утверждения, будучи истинными, содержат сингулярные термины, которые должны указывать на некоторый объект.

Теперь центр тяжести переносится на понятие структуры. Почти всеми признается, что математика состоит из структур. Но что такое структура с онтологической и эпистемологической точек зрения? И является ли это понятие более простым или удобным, или более фундаментальным, чем понятие абстрактного объекта? Это тот самый вопрос, который пытаются разрешить Резник и Шапиро в целой серии влиятельных статей и книг. Н.Бурбаки полагал, что понятие структуры является более фундаментальным, чем все остальные понятия математики. Сходным образом формулируются посылки Резника и Шапиро. Если структура понимается как область объектов с определенными отношениями между ними, т.е. понимается как структура, изучаемая в математической логике, то тогда нужно иметь в виду, что в математической логике структура определяется теоретико-множественным образом. Но в этом случае следует весьма радикальное заключение, что теория множеств представляет собой дисциплину наравне с другими ветвями математики, но никак не основанием всей математики. То есть теория множеств изучает одну из множества возможных структур. Например, арифметика является исследованием не натуральных чисел, а исследованием 'натуральных структур'. Все это означает, что в этом случае нам нужно определение структуры, которое само не является теоретико-множественным понятием. Шапиро описывает структуру как 'возможную систему объектов, находящихся в определенных отношениях друг к другу, когда игнорируются те свойства объектов, которые несущественны для этих отношений'. Например, в аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля игнорируется все, кроме отношения членства в множестве. Отметим, что это лишь описание понятия структуры, а не определение. Структуралисты в философии математики избегают давать подобные определения, поскольку само понятие структуры не очень подходит на роль базисного онтологического понятия, и в то же время не снимает эпистемологические проблемы. Понятие структуры не решает, а скорее, 'рассасывает' эти проблемы в духе виттгенштейновской терапии.

Несмотря на определенный радикализм, структурализм является лишь модификацией того, что Ч.Чихара назвал 'буквалистской точкой зрения'. Буквализм состоит в том, что экзистенциальные утверждения математики не отличаются по своей структуре от экзистенциальных утверждений эмпирических наук. Обоснование этого тезиса состоит в том, что математические утверждения делаются в терминах экзистенциальных кванторов логики первого порядка, и поэтому буквально и прямо утверждают существование математических сущностей. И поскольку структура математических утверждений в понимании структуралистов остается именно такой, перед ними встают все те же проблемы, которые они предпочли бы видеть 'рассосанными'. Действительно, 'буквализм' такого структуралиста, как Резник, заключается в двух идеях. Во-первых, логическая форма математических утверждений должна пониматься буквально, и во-вторых, семантика математических утверждений должна быть семантикой естественных наук. В противном случае нельзя будет говорить об истинности математических утверждений, а без этой посылки невозможно ничего сказать о математических объектах. Эти проблемы могли бы быть игнорированы, если бы не общепринятое, разделяемое и структуралистами, убеждение в том, что математические утверждения являются истинными. Подлинно радикальным взглядом в этом отношении является номинализм Х.Филда, который полагает математические утверждения ложными. Другой радикальный отход от буквализма можно видеть в позиции Ф.Китчера, для которого математические утверждения сутьсовокупность операций, выполняемых идеальным субъектом.

Х.Филд7 полагает, что математических объектов не существует, что стандартная математика ложна, но при этом он стремится сохранить математическую практику. Для этого он снабжает физическую реальность значительной математической структурой и описывает физические версии анализа. Математические утверждения типа 'континуум гипотезы' оказываются утверждениями об областях пространства и времени.

Такая позиция возможна лишь при некоторой сильной версии номинализма. Техническим средством выражения такого номинализма является так называемая 'теорема консервативности', суть которой в том, что любое номиналистическое заключение, которое может быть выведено с помощью математики из номиналистической теории, может быть сделано без помощи математики, с одним лишь использованием логики. Таким образом, в математической практике делается указание на математические сущности, но нет необходимости верить в существование таких вещей, поскольку указание подобного рода не требует признания математических утверждений истинными.

Таким образом, Филд полагает математические теоремы просто ложными, а математические объекты - полезными фикциями, которые в теоретическом смысле вполне устранимы.

Теория Филда не только радикальна, но и в значительной степени парадоксальна, так как соединяет в себе логицизм и номинализм. Логицизм виден в самой 'теореме консервативности', согласно которой математический вывод можно в принципе заменить более длинным логическим выводом.

Под номиналистической теорией Филд понимает теорию, в которой кванторные переменные ограничены нематематическими сущностями. Другими словами, нелогический словарь номиналистической теории не пересекается со словарем математической теории и, значит, абстрактные объекты математики избегаются. Более точно, пусть N - номиналистическая теория первого порядка, а ZFU - теория множеств Цермело-Френкеля с Urelemente. Тогда может быть показано, что если N + ZFU дает S, тогда N дает S.

На самом деле, тут требуется некоторая модификация ZFU, в частности добавление к ней некоторых экзистенциальных аксиом и изменение аксиомы множества-степени, что позволяет связать математическую теорию с номиналистической теорией.

Ф.Китчер8 полагает математику цепью непрерывных концептуальных конструкций и в этой связи развивает эволюционную модель математического познания. Таким образом, ключевой дисциплиной при подобного рода исследовании предстает история математики, из которой следует извлечь некоторые рациональные принципы, управляющие концептуальными изменениями по ходу развития математики. Ясно, что философия Т.Куна занимает в позиции Ф.Китчера самое значительное место.

Кроме того, Китчер прибегает в объяснении математического познания к причинной теории указания Крипке-Патнэма, согласно которой значение термина прослеживается через цепь изменений к некоторому исходному акту употребления термина. Рано или поздно эта цепь опирается на перцептуальное познание наших предшественников-предков. В этом ключе, утверждая важность психологии, Китчер отказывается от эпистемологической ориентации в исследовании природы математических истин. Если обычная позиция в философии математики состоит в том, чтобы обосновать знание этих истин, то Китчер полагает, что большая часть людей уже знает значительную часть математических истин, и задача философского исследования состоит в том, чтобы понять, как мы получаем это знание.

Следует упомянуть также попытку Ч.Чихары9 дать объяснение математических сущностей не в рамках теории теории множеств, а в рамках теории типов. Дж.Хеллман10 и Х.Филд11 прибегают для объяснения математических сущностей к модальной логике, полагая их скорее возможностями, нежели актуальностями.

Самым важным обстоятельством при этом является то, что в основе всех подходов лежит апелляция к перцептуальному опыту, понимаемому в самом широком смысле слова. Ведь даже при номинализме Филда эпистемический доступ к областям пространства-времени, в которых зиждятся математические структуры, оказывается все-таки перцептуальным доступом. Наиболее характерны в этом отношении работы П.Мэдди12. Она считает, что предполагаемые платонистскими сущности могут быть доступны обычному восприятию.

Мэдди полагает, что абстрактные сущности математики подобны физическим сущностям, и поэтому возможен прямой перцептуальный доступ к ним. Множество физических предметов Мэдди отличает от физической совокупности этих же предметов. Каждый предмет соотносится с физической совокупностью совсем по-другому по сравнению с тем, как он соотносится с множеством этих предметов. Физические совокупности не имеют членов, в то время как множество определяется отношением членства. Именно по этой причине множество является абстрактным объектом, который, тем не менее, предполагается локализованным в том же месте пространства, в котором локализована физическая совокупность.

Следует еще раз подчеркнуть, что подобная трактовка множеств возможна за счет эпистемологических трактовок восприятия, развитых в самое последнее время. Так, согласно одному из определений, субъект Р воспринимает объект К в месте Н, если и только если, во-первых, имеется объект, принадлежащий виду К в месте Н, во-вторых, Р приобретает перцептуальное знание о виде К, и, в-третьих, объект в месте Н включен в процесс порождения состояния перцептуальной веры подходящим причинным образом. Не входя в подробности этого определения, отметим, что оно является лишь одним из нескольких подходов к определению перцептуального восприятия, и не ясно, в какой степени трактовка Мэдди множеств как перцептуально воспринимаемых объектов будет оправданной при других определениях восприятия.

Таков весьма краткий перечень основных направлений в философии математики сегодня. Недостаток места не позволяет привести критические аргументы в отношении каждой из упомянутых позиций. Но как нам кажется, эпистемологический вызов философии математики, инициированный П.Бенацеррафом, принят в качестве того, что можно назвать локальной парадигмой этой области философии.

Целищев В. В.

**Список литературы**

1 Mostowski A. Thirty years of foundational studies//Acta Philosophica Fennica, Fasc. XVII. - Helsinki, 1965. - p.8.

2 Ibid.

3 См.: Maddy P. Philosophy of Mathematics: Prospects for the 1990s//Synthese 88. 1991. - p.155-164.

4 См., например: Balaguer M. Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. - Oxford University Press, 1998.

5 Benacerraf P. What Numbers Could Not Be//Philos. Rev. - 1965. - V.74, ?1; Id. Mathematical Truth//Journ. Philos. -1973. - P. 403-419.

6 Shapiro S. Foundations without Foundalism. - Oxford University Press, 1997. Resnik M. Second-Order Logic Still Wild//Journ. Philos. - 1988. - P. 75.

7 См.: Field H. Science without Numbers. - Princeton University Press, 1980.

8 Kitcher Ph. The Nature of Mathematical Knowledge, Oxford University Press, 1983.

9 Chihara Ch. Constructibility and Mathematical Existence, Oxford University Press. - 1990.

10 Hellman G. Mathematics without Numbers. - Oxford University Press. - 1989.

11 Field H. Realism, Mathematics and Modality. - Basil Blackwell. - 1989.

12 Maddy P. Realism in mathematics. - Clarendom Press. - 1990.--