**Пирамида**

Пусть Q – плоский многоугольник в плоскости a и S – точка, не принадлежащая плоскости а. Соединим каждую точку М многоугольника Q с точкой S отрезком МS. Отрезки МS заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник называется пирамидой (рис. 1)

Пирамида называется n-угольной, если Q – n-угольник.

Треугольная пирамида называется также тетраэдром. Многоугольник Q называется основанием пирамиды, а точка S – вершиной пирамиды. Высотой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, проведенного через вершину к плоскости ее основания; концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра; на рисунке 1 SH – высота пирамиды. (Высотой пирамиды называют длину этого отрезка.) Пусть A, B, C, …, K – вершины многоугольника Q, лежащего в основании пирамиды. Тогда треугольники ASB, BCS, …, KSA называются боковыми гранями пирамиды, а отрезки AS, BS, CS, …, KS боковыми ребрами.

Сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания, называется диагональным сечением пирамиды. Например, треугольник ACS (см. рис.1) – диагональное сечение пирамиды.

Пирамида называется правильной, если основанием ее является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (центром основания). Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, называется апофемой пирамиды (обозначение hбок). Все апофемы правильной пирамиды равны между собой.

На рисунке 2 изображена правильная треугольная пирамида, где SO – высота, а SD – апофема.

Часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется усеченной пирамидой (рис. 3). Параллельные грани ABC и A1B1C1 называются основаниями, а отрезок перпендикуляра ОО1, опущенного из какой-нибудь точки О1 верхнего основания на нижнее основание, - высотой усеченной пирамиды. Усеченная пирамида называется правильной, если она составляет часть правильной пирамиды. Ее ось – прямая, проходящая через центры оснований. Боковые грани правильной усеченной пирамиды – равные равнобочные трапеции; их высоты называются апофемами.

Пример 1. Определить боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна 7 см, а сторона основания равна 8 см.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 4. Из прямоугольного треугольника ADC согласно теореме Пифагора имеем:

AC=√AD² + DC² = √8² + 8² = 8√2

и, значит, AO = 4√2. Наконец из прямоугольного треугольника AOS согласно той же теореме находим:

AS = √AO² + SO² =√32 + 49 =√81 = 9,

т.е. боковое ребро пирамиды равно 9 см.

Пример 2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 14 м, а площадь диагонального сечения – 14 м. Найдите боковое ребро пирамиды.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 4.

Рассмотрим диагональное сечение ACS, где SO – высота пирамиды. Согласно известной формуле для площади треугольника:

 ½ AC ∙ SO = 14

В силу теоремы Пифагора AC = 14√2 и, значит, SO = √2.

Теперь из прямоугольного треугольника ASO по теореме Пифагора находим

AS = √SO² + (AC/2)² = √2 + 49 ∙ 2 = 10

Итак, боковое ребро пирамиды равно 10 м.

Пример 3. По данной стороне основания а и боковому ребру b определите высоту правильной треугольной пирамиды.

Решение. Так как пирамида правильная, то основание ее высоты O совпадает с центром правильного треугольника ABC – основания пирамиды (см. рис. 2). Поэтому отрезок BO равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC, и, значит, BO = а/√3. Теперь из прямоугольного треугольника BOS по теореме Пифагора получаем:

 SO = √BS² – BO² = √b² – a²/3

Пример 4. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде (рис.5) площади нижнего и верхнего оснований соответственно равны B и b, а боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол в 45º. Определить площадь диагонального сечения.

Решение. Стороны оснований равны √B и √b. Отсюда по теореме Пифагора основания диагонального сечения, которым является равнобочная трапеция, равны √2B и √2b. Далее, так как угол при основании этой трапеции равен 45º, то ее высота равна (√2B – √2b) : 2 и, значит, площадь искомого сечения

 (√2B + √2b) ∙ √2B – √2b = 2B – 2b = B – b

 2 2 4 2

**Задача повышенной сложности**

1. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, диагональ которой l составляет с большим основанием угол а. Площадь боковой поверхности этой пирамиды S. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания ее под равными углами, определить эти углы.

Высота пирамиды [KO] падает в центр вписанной окружности.

│AB │+│CD│=│AD│+│BC│;

2│AB│=2│AM│; │AB│=│AM│;

2r = │CM│;

│CM│= l sina; │AM│=l cosa.

Боковая поверхность пирамиды представляет из себя площади треугольников с равными высотами. Периметр основания:

│AD│+│BC│+│AB│+│CD│=4│AM│;

S = r :2cos x ∙4 │AM│;

cos x = 2r ∙│AM│: S=│CM│∙│AM│: S= l²∙ sin² a : 2S