**ВВЕДЕНИЕ**

Теория полета (аэродинамика и динамика полета) наука фундаментальная и строгая, опирающаяся на математический аппарат. Но, как и о всякой науке, о ней можно говорить на кухне, опираясь лишь на интеллект соответствующего уровня. К сожалению, и сегодня появляются "ученые", пытающиеся на кухонном уровне объяснить основные законы природы, в том числе и аэродинамики и динамики полета. Но когда с помощью этих объяснений пытались решить серьезные задачи в авиации, это приводило и приводит к плачевным результатам: после отрыва от Земли первые самолеты "вдруг" круто пикировали в Землю; при большой скорости на самолетах с первыми турбореактивными двигателями (ТРД) "вдруг" появлялась тряска и самолет рассыпался; преодоление звукового барьера долго не давалось; перегруженные самолеты не могут завершить взлет и т.п.

Поэтому мы с Вами будем изучать науку на уровне высшего образования. А для этого придется хорошо вспомнить математику, теоретическую механику и математическое моделирование.

Человек очень давно хотел летать, как птица пытался это делать, но безуспешно. И только Ньютон смог четко выделить факторы, определяющие возможность полета тела, тяжелее воздуха.

Давайте повторим эти рассуждения Ньютона. С одной стороны, птицы тяжелее воздуха, но летают! С другой стороны, по своему опыту мы знаем, что шарообразное тяжелое тело без посторонних внешних сил подняться в воздух не может. А почему простейшая модель птицы воздушный змей взмывает в воздух?

Для того чтобы змей полетел, необходимо наличие следующих факторов: **плотность среды** (на Луне змей не полетит), **скорость** (ветра или бегуна) и **специальная геометрия тела** (угол атаки, создаваемый специально подобранными веревочками). Эти феноменологические рассуждения необходимо облечь в форму строгой теории (модели), с помощью которой можно было бы проводить расчет полета любого летательного аппарата (ЛА) в любых условиях. Ведь при создании Ил-96 никто не прыгал с прототипом его крыла с колокольни, чтобы убедиться в возможности полета!

1. **КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

1.1. Основные гипотезы механики сплошной среды

Прежде всего, займемся изучением среды. Для ее описания необходимы полные и непротиворечивые модели движения газообразных, жидких и твердых деформируемых тел, основанные на методах теоретической механики и некоторых дополнительных гипотезах. Согласованная система таких моделей носит название *механики сплошной среды*.

Все тела состоят из множества отдельных элементарных частиц, взаимодействующих сложным образом в электромагнитном и гравитационном полях. Существуют предположения и о других, пока неизвестных полях. Поэтому изучение материальных тел как **совокупности** элементарных **частиц** требует введения дополнительных гипотез об их свойствах и взаимодействиях. Кроме того, для решения уравнений динамики необходимо знать начальные условия, т.е. координаты и скорости всех частиц, что принципиально невозможно. Однако для решения практических задач совсем не обязательно знать движение каждой частицы достаточно определить некоторые осредненные характеристики. Такой научный подход применяется на основе вероятностного описания и использования законов распределения и называется *статистическим*.

Механика сплошной среды использует другой подход *феноменологический*, основанный на эмпирических **гипотезах**, подтвержденных человеческим опытом [1].

1) Гипотеза *сплошности*, предложенная Бернулли, постулирует тело как непрерывную среду, заполняющую некоторый объем, и необходима для применения математического аппарата дифференциального и интегрального исчисления.­­

2) Гипотезу *непрерывности метрического пространства*, тесно связанную с предыдущей, вводят для определения координат и расстояний.

3) Следующая гипотеза предполагает возможность *введения единой* для всех точек пространства *декартовой системы координат*. Напомним, что в декартовой системе координат каждая точка пространства имеет свои действительные координаты. Эта гипотеза позволяет применять аппарат аналитической геометрии.

4) В механике сплошной среды постулируется *абсолютность времени* для всех систем отсчета, т.е. не учитываются эффекты теории относительности.

Эти гипотезы естественны с точки зрения человеческого опыта и вполне оправданы при исследовании явлений, происходящих в не слишком больших и не слишком малых объемах с небольшими скоростями в макромире. Исходя из них, строятся все последующие положения и выводы теории.

1.2. Термины механики сплошной среды

*Скорость* будем рассматривать как поле вектора в каждой точке пространства, задаваемой радиус-вектором ****** этой точки с координатами *x, y, z,* в каждый момент времени *t*:

 (1.1)

или по координатам:

 (1.2)

Очевидный смысл этих уравнений заключается в том, что скорость определяется, как производная по времени от функции местоположения частицы cреды ******(*x,y,z,t*).

Уравнения (1.1) или (1.2), задающие положение ******(*x,y,z,t*) частицы в пространстве в каждый момент времени как решение дифференциального уравнения, можно рассматривать как *траекторию* ее движения.

Если поле вектора скорости сплошной среды  не зависит от времени в каждой точке пространства, то движение называется *стационарным* или *установившимся*. В общем случае  и движение называется *нестационарным* или *неустановившимся*.

*Линиями тока* в механике сплошной среды называются линии, которые в каждый **фиксированный момент времени** имеют в каждой своей точке касательные, совпадающие с вектором скорости. Таким образом, частицы среды, попавшие на линию тока, не имеют составляющей скорости поперек нее и не могут ее пересечь. Линии тока необходимы для получения в теории математически строгих выводов. На практике линии тока в прозрачной жидкости с взвешенными частицами нерастворимой краски можно зафиксировать фотографированием с маленькой выдержкой короткие следы этих частиц, сливаясь, вырисовывают линии тока. Уравнение линии тока в момент времени *t* запишется в терминах аналитической геометрии, как условие коллинеарности векторов:

. (1.3)

Таким образом, картина линий тока в нестационарном движении все время меняется. При установившемся движении отсутствие в уравнении (1.3) времени *t* приводит к совпадению линий тока с траекториями частиц.

Трубчатая поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую замкнутую кривую, называется *трубкой тока*. Частицы сплошной среды не пересекают стенок трубки тока, не имея нормальных к ним составляющих скорости.

Если компоненты вектора скорости не обращаются в нуль и вместе со своими первыми производными однозначны и не имеют разрывов, то решение уравнения (1.3) существует и единственно. В противоположном случае существование или единственность может нарушаться, т.е. в некоторых точках пространства линии тока могут ветвиться или вырождаться в точку. Такие точки называются *особыми* или *критическими*.

Напомним некоторые математические термины [4] применительно к скорости, заданной в пространстве *полю скоростей*.

Вектором  будем обозначать поверхность с указанным направлением нормали , выражающимся через единичные векторы осей координат:, а скаляром *S* только площадь этой поверхности.

*Потоком скорости* через поверхность  с заданным вектором нормали  называется поверхностный интеграл

 (1.4)

где *Vn* обозначает проекцию скорости на единичный вектор нормали  к поверхности .

*Градиентом* называется векторная функция скаляра:

. (1.5)

*Ротор скорости* (*вихрь*) определяется формулой:

, (1.6)

а *дивергенция скорости*:

. (1.7)

*Циркуляцией скорости* по замкнутому контуру *L* с определенным направлением обхода называется криволинейный интеграл:

. (1.8)

Известные теоремы векторных полей [4] применимы и к полю скоростей. *Теорема Стокса*:

 (1.9)

справедлива при ориентации обхода контура *L* и нормали к натянутой на него поверхности  по правилу правого винта, а *теорема Остроградского-Гаусса*:

 (1.10)

при условии, что замкнутая поверхность  ограничивает объем *W*.

Полную производную по времени от скаляра *A*(*,t*) можно определить по известной [4] формуле:

 (1.11)

Производную  от интеграла по произвольному подвижному объему *W*, где от *t* зависит не только подынтегральная функция, но и объем, вычислим с помощью определения производной:



В последнем пределе *W'W* образуется сдвигом элементарных площадок d*S* поверхности *S*, ограничивающей *W*, на расстояние *Vn*d*S*. Кроме того, при Δ*t* → 0: *f*(,*t*+Δ*t*) → *f*(,*t*) и деформированная поверхность *S*′ → *S*, поэтому предел принимает значение  (сравните с (1.4)) или  по теореме Остроградского-Гаусса (1.10). Откуда в силу уравнения (1.11):

 (1.12)

Вектор  ≠ **0** тоже можно рассматривать, как поле вектора ротора скорости (,*t*) *вихревое поле*. Непосредственной проверкой легко убедиться, что всегда div = 0. Отсюда по теореме Остроградского-Гаусса следует, что поток ротора скорости сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

. (1.13)

В вихревом поле по аналогии с полем скоростей выделяют *вихревую линию*:

 (1.14)

и *вихревую трубку*. Так как через боковую поверхность вихревой трубки по определению нет потока ротора скорости, то из (1.13) вытекает постоянство такого потока через любое ее поперечное сечение (*первая кинематическая теорема Гельмгольца о вихрях*). Эта величина называется *интенсивностью вихревой трубки*. Согласно теореме Стокса (1.9) она равна циркуляции скорости по контуру, образующему вихревую трубку:

. (1.15)

1.3. Уравнение неразрывности

Как известно, плотность вещества в физике вводится предельным переходом: , где в механике сплошной среды следует понимать под Δ*m* массу вещества, заключенную в объеме Δ*W.* Посмотрим, как будет выглядеть закон сохранения массы  для произвольного подвижного объема сплошной среды, для которого . Из (1.12) тогда следует:

,

или в силу произвольности объема *W*:

. (1.16)

Это уравнение носит название *уравнения неразрывности (непрерывности).*

Рассмотрим частные случаи уравнения неразрывности. Для стационарного (установившегося) движения сплошной среды из (1.16) с учетом (1.7) следует:

, (1.17)

а если, кроме того, среда несжимаемая (, в том числе и неоднородная), то:

. (1.18)

Т.е. по теореме Остроградского-Гаусса (1.10) установившийся поток скорости несжимаемой среды (1.4) сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю. Так как через боковую поверхность трубки тока по определению нет потока скорости, то поток через любое ее поперечное сечение одинаков:

 (1.19)

и численно равен объемному **расходу** сплошной среды. Отсюда можно сделать вывод: внутри объема несжимаемой сплошной среды трубки тока (а также линии тока) не могут ни начинаться, ни заканчиваться.

1.4. Безвихревое и вихревое движение

Движение сплошной среды в некоторой области называется *безвихревым*, если в ней  = 0, и *вихревым*, если  ≠ 0 хотя бы в части этой области, называемой *вихрем*.



Из определения  (1.6) следует, что вихревое движение характеризуется наличием **вращения каждой частицы**. Этот факт иллюстрируется рис. 1, на котором крайние точки бесконечно малой частицы среды имеют разные скорости в силу наличия ненулевой величины . Если центр этой частицы покоится, а все другие частные производные скорости равны нулю, то очевидно, что ≠ 0 характеризует именно вращение бесконечно малой частицы среды. В безвихревом движении такого вращения нет и каждая частица среды совершает лишь поступательное движение. Вообще говоря, вихревое движение возникает в реальной природе, благодаря наличию границ (свободной поверхности, твердых стенок или твердых тел), а также явлению вязкости.

Примерами **безвихревого** движения могут служить:

**—** состояние покоя среды,

**—** поступательное движение,

**—** *источник* и *сток* (когда частицы среды выходят из точки или входят в нее строго по лучам),

**—** движение среды вокруг некоторого кругового цилиндра по концентрическим окружностям со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию от оси цилиндра.

Примерами **вихревого** движения могут служить:

**—** плоский сдвиг (когда скорость частиц вдоль некоторой плоскости пропорциональна расстоянию от этой плоскости),

**—** вращение среды вокруг некоторой оси, как твердого тела (в отличие от потенциального движения аналогичной геометрии в этом случае скорость с удалением от оси линейно возрастает!).

2. **ДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

2.1. Силы и моменты в механике сплошной среды

Силы, распределенные по объему *W*, называются *объемными* или *массовыми*. Они обозначаются  и относятся к элементу массы Δ*m* = ρΔ*W*. Т.е. сила, действующая на элемент массы, равна Δ*m* = ρΔ*W*, следовательно, размерность  совпадает с размерностью ускорения. Примерами массовых сил могут служить гравитационные, электромагнитные, инерционные.

Силы, распределенные по поверхности *S*, называются *поверхностными*. Поверхностные силы будем обозначать вектором  и относить к элементу поверхности Δ*S* сплошной среды. Т.е.  имеет размерность давления. Такие силы возникают, например, на свободной поверхности среды, при взаимодействии среды с твердыми телами, а также внутри среды (внутренние поверхностные силы).

Внутренние поверхностные силы необходимо рассматривать при изучении движения отдельных частиц среды с учетом их механического влияния друг на друга. Так, например, происходит при относительном движении двух соседних соприкасающихся частиц. Это явление может наблюдаться в любом месте сплошной среды, причем для бесконечно малых частиц поверхности соприкосновения d*S* можно построить любым образом. Тогда и , зависящее от такого выбора, можно определить по-разному в зависимости от d*S*, т.е. ориентации нормали этой площадки, поэтому такое взаимодействие обозначим вектором *S*. В силу третьего закона Ньютона на одну из пары соприкасающихся частиц действует сила *S*d*S*, на другую *S*d*S*. Однако если соприкосновения нет, т.е. если движение имеет разрыв каких-то своих характеристик, то последнее условие может нарушаться.



Вектор *S* в общем случае не перпендикулярен к d*S*, поэтому различают нормальную составляющую *pSn*, называемую *нормальным напряжением* или нормальным давлением, и тангенциальную *pSτ*, называемую *касательным напряжением* или внутренним трением: *S*d*S*= *pSn*d*S****+****pSτ****τ***d*S*.

Свойство вектора *S* рассмотрим с помощью представления бесконечно малой частицы в виде тетраэдра с ребрами, параллельными осям координат (рис. 2). Площади граней такого тетраэдра равны *S, S⋅*cos(,*x*)*, S⋅*cos(,*y*)*, S⋅*cos(,*z*)*.*

Массовые силы будем считать постоянными во всем объеме *W* = *hS*/3 бесконечно малой частицы, а поверхностные силы 1, 2***,*** 3***,*** *S* постоянными на своих гранях. Это позволит применить к частице начало Даламбера из теоретической механики:



откуда, сократив на *S,* и перейдя к пределу при *h* → 0, получаем **инвариантное** к выбору площадки равенство:

. (2.1)

Это означает, что существует некоторый объект P, компонентами

которого можно рассматривать векторы, или даже элементы матрицы (*pij*) матрицы из компонент векторов. Объект P с компонентами *pij* называется *тензором внутренних напряжений.*

Равенство (2.1) позволяет применить теорему Остроградского-Гаусса (1.10) к расчету поверхностных сил:

 (2.2)

Кроме сил на каждую частицу жидкости могут действовать и моменты. Примером может служить момент магнитного поля Земли, действующий на каждый элемент стрелки компаса. Такой момент, который действует на элемент массы Δ*m*, будем обозначать ***.*** Его принято называть *массовой парой* (*мас­совым моментом*). Размерность  совпадает с размерностью квадрата скорости.

Момент, который действует на элемент поверхности Δ*S*, будем обозначать . Он называется *поверхностной парой* (*поверхност­ным моментом*) и имеет размерность силы, деленной на длину.

2.2. Уравнения движения сплошной среды

В теоретической механике известно уравнение количества движения материальной точки:

,

где в правой части равенства стоит сумма всех действующих на нее сил. Обобщим это уравнение на конечный объем сплошной среды, состоящей из частиц, как системы материальных точек, подверженных действию рассмотренных в разделе 2.1 объемных и поверхностных сил:

. (2.3)

*Уравнение количества движения конечного объема сплошной среды* (2.3), являющееся аналогом второго закона Ньютона, имеет такое же фундаментальное значение для описания любых движений сплошной среды. Оно справедливо и для разрывных движений, и для ударных процессов, характеризующихся разрывными функциями координат и времени (но не нарушениями гипотезы сплошности см. раздел 1.1).

Заменив последнее слагаемое в (2.3) с помощью (2.2), получим:

,

левую часть которого преобразуем с помощью (1.12):

.

Это позволит записать равенство подынтегральных выражений для элементарного объема:

.

Левую часть этого уравнения в свою очередь можно преобразовать с помощью уравнения неразрывности (1.16):



Таким образом, получено основное дифференциальное *уравнение движения сплошной среды*:

, (2.4)

или в проекциях на оси декартовой системы координат:

 (2.5)

где  компоненты массовой силы .

Отметим, что уравнения (2.4) и (2.5) получены при следующих предположениях:

непрерывность и дифференцируемость векторов напряжений 1, 2***,*** 3,

неразрывность среды,

непрерывность характеристик движения.

Итак, для описания движения сплошной среды имеются: скалярное уравнение неразрывности (1.16) и одно векторное (2.4) или три скалярных (2.5) уравнения движения. В этой системе уравнений при заданных внешних массовых силах (*Fx,Fy,Fz*) неизвестными функциями пространственных координат и времени являются: плотность ρ, скорость (*Vx,Vy,Vz*) и три вектора напряжений 1(*p*11,*p*21,*p*31), 2(*p*12,*p*22,*p*32)***,*** 3(*p*13,*p*23,*p*33) со своими девятью координатами. Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система незамкнута. Для ее замыкания необходимо использовать дополнительные соотношения между неизвестными. Такие соотношения может дать модель конкретной среды.

2.3. Виды сплошной среды

Экспериментальные данные показывают, что большинство сред обладает специфическим свойством: отсутствием или малостью касательных напряжений *pSτ*, т.е. вектор S можно считать перпендикулярным любой площадке взаимодействия d*S* и равным нормальному напряжению *pSn*. Среду, обладающую таким свойством называют *идеальной жидкостью* или *идеальным газом*. Близки к таковым обычные воздух и вода при малых скоростях.

Указанное свойство для любой площадки с нормалью  можно выразить соотношением, вытекающим из (2.1):

,

где *p* общее значение скалярных произведений. Величину *p* называют *давлением*. Его особенность заключается в независимости от направления рассматриваемого взаимодействия частиц. При *p* > 0 среда, как показывает опыт, находится в сжатом состоянии, поэтому и использован знак минус. Таким образом, матрица компонент тензора внутренних напряжений в идеальной жидкости (газе) имеет вид:

, (2.6)

и тензор P целиком определяется скаляром *p.*

Понятно, что идеальная жидкость не единственно возможная модель сплошной среды, позволяющая определить компоненты тензора внутренних напряжений. Можно, например, рассматривать его компоненты как функции от деформации частицы: в этом случае среда называется *упругой*. В частном случае линейности это соотношение приобретает вид *закона Гука*. Изучением таких сред занимается *теория упругости*.

Особое место в механике сплошной среды занимает модель *вязкой жидкости*, предполагающая связь тензора внутренних напряжений с частными производными скорости по координатам. Имеется в виду эффект "трения" слоев вязкой жидкости между собой при наличии разности их поступательных скоростей. В частном случае линейности связь представляется в виде *закона Навье-Стокса* (или обобщенного закона вязкости Ньютона):

, (2.7)

где  элементы единичной матрицы (с единицами на главной диагонали и нулями на всех остальных местах), матрица размерности 3×3, обозначенная *eμν*, называется *тензором скоростей деформации*, а тензорный коэффициент линейности *Bijμν* описывает свойства вязкой жидкости.

Если свойства среды в разных направлениях одинаковы, то она называется *изотропной*, в противном случае *анизотропной*. В изотропной среде *Bijμν* представляется симметричной матрицей размерности 3×3×3×3, одинаковой в любой системе координат. Можно показать [1], что в этом случае все компоненты тензора *Bijμν* выражаются всего лишь через два независимых параметра λ и μ, называемых *коэффициентами Ламе,* поэтому закон Навье-Стокса для вязкой изотропной жидкости имеет вид:

. (2.8)

В теории вязкой жидкости μ называется *коэффициентом внутреннего трения* или *динамическим коэффициентом вязкости*,  *кинематическим коэффициентом вязкости (коэффициен­том линейной вязкости)*,  *вторым коэффициентом вязкости (коэффициентом объемной вязкости).* Размерность μ, λ и ζ в СИ: .

Нетрудно видеть, что упомянутые модели для идеальной и вязкой жидкости вводят еще одну неизвестную давление *p.* Т.е. для замыкания системы уравнений движения сплошной среды оказывается необходимым еще одно скалярное соотношение. В этом качестве чаще всего применяются уравнения, представляющие различные гипотезы связи плотности и давления:

.

Если такое соотношение можно ввести, то жидкость называется *баротропной*. Выделяются следующие частные случаи.

1.  случай *несжимаемой жидкости*, или .

2. , где *C* постоянная, случай *изотермического* процесса.

3. , где *C* и *n* постоянные, случай *политропического* процесса, *n* называется *показателем политропы*.

4.  уравнение Клапейрона-Менделеева для *совершенного газа*, где  *универсальная газовая постоянная*,  масса вещества в *кг,* численно равная молекулярному весу, *T* абсолютная температура, которую необходимо задавать еще одним дополнительным соотношением.