### МАТЕМАТИКА

[Тема 1. Роль математики в современном мире. Основные этапы становления математики.](#tema1)

[Тема 2. Аксиоматический метод построения научной теории. «Начала» Евклида – образец научного метода. История создания неевклидовой геометрии.](#tema2)

[Тема 3. История развития науки о числе . Комплексные числа и действия с ними. Геометрическая интерпретация комплексного числа.](#tema3)

[Тема 4. Аналитическая геометрия. Координатный метод. Прямая линия на плоскости.](#tema4)

[Тема 5. Кривые второго порядка.](#tema5)

[Тема 6. Элементы линейной алгебры. Определители, их свойства. Способы вычисления определителей. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.](#tema5)

[Тема 7. Матрицы. Алгебра матриц](#tema6).

[Тема 8. Понятие множества. Пересечение множеств, объединение множеств, множества на числовой прямой.](#tema8)

[Тема 9. Математический анализ. Функция. Классификация функций.](#tema9)

[Тема 10. Предел функции. Теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. Понятие о непрерывности функции.](#tema10)

[Тема 11. Производная и дифференциал.](#tema11)

[Тема 12. Понятие первообразной. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.](#tema12)

[Тема 13. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона – Лейбница.](#tema13)

[Тема 14. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от разрывных функций](#tema14).

**[Т](#test)****[е](#test)****[с](#test)****[т](#test)****[ы.](#test)**

[Лите](#literat)[ра](#literat)[тура](#literat)

**Базовая учебная литература к курсу:**

1.Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1975г.

2.Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике – М.:Наука, 1975г Тема 1. Роль математики в современном мире. Основные этапы становления математики.

Целью изучения математики является – повышение общего кругозора, культуры мышления, формирование научного мировоззрения.

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Академик Колмогоров А.Н. выделяет четыре периода развития математики: зарождение математики, элементарная математика, математика переменных величин, современная математика.

Начало периода **элементарной математики** относят к VI-V веку до нашей эры. Был накоплен к этому времени достаточно большой фактический материал. Понимание математики, как самостоятельной науки возникло впервые в Древней Греции.

В течение этого периода математические исследования имеют дело лишь с достаточно ограниченным запасом основных понятий, возникших для удовлетворения самых простых запросов хозяйственной жизни. Развивается арифметика – наука о числе.

В период развития элементарной математики появляется теория чисел, выросшая постепенно из арифметики. Создается алгебра, как буквенное исчисление. Обобщается труд большого числа математиков, занимающихся решением геометрических задач в стройную и строгую систему элементарной геометрии – геометрию Евклида, изложенную в его замечательной книге «Начала» (300 лет до н. э.).

В XVII веке запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создание дифференциального и интегрального исчисления начинается **период математики переменных величин**. Великим открытиям XVII века является введенная Ньютоном и Лейбницем понятие «бесконечно малой величины», создание основ анализа бесконечно малых (математического анализа).

На первый план выдвигается понятие функции. Функция становится основным предметом изучения. Изучение функции приводит к основным понятиям математического анализа: пределу, производной, дифференциалу, интегралу.

К этому времени относятся и появление гениальной идеи Р. Декарта – метода координат. Создается аналитическая геометрия, которая позволяет изучать геометрические объекты методами алгебры и анализа. С другой стороны метод координат открыл возможность геометрической интерпретации алгебраических и аналитических фактов.

Дальнейшее развитие математики привело в начале ХIX века к постановке задачи изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм с достаточно общей точки зрения.

Связь математики и естествознания приобретает все более сложные формы. Возникают новые теории. Новые теории возникают не только в результате запросов естествознания и техники, но и в результате внутренней потребности математики. Замечательным примером такой теории является «воображаемая геометрия» Н. И. Лобачевского. Развитие математики в XIX и XX веках позволяет отнести ее к периоду **современной математики**. Развитие самой математики, «математизация» различных областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению новых математических дисциплин, например, исследование операций, теория игр, математическая экономика и другие.

В основе построения математической теории лежит аксиоматический метод. В основу научной теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные положения теории получаются, как логические следствия аксиом.

Основными методами в математических исследованиях являются **математические доказательства** – строгие логические рассуждения. Математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, для оценки выбора способа ее решения необходима **математическая интуиция**.

В математике изучаются математические модели объектов. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга реальных явлений. Так, одно и тоже дифференциальное уравнение может описывать процессы роста населения и распад радиоактивного вещества. Для математика важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.

В математике используют два вида умозаключений: дедукция и индукция.

**Индукция** – метод исследования, в котором общий вывод строится не основе частных посылок.

**Дедукция** – способ рассуждения, посредством которого от общих посылок следует заключение частного характера.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Причина проникновения математики в различные отрасли знаний заключается в том, что она предлагает весьма четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Без современной математики с ее развитым логическими и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

**Тема 2. Аксиоматический метод построения научной теории. «Начала» Евклида – образец аксиоматического построения научной теории. История создания неевклидовой геометрии.**

Создание дедуктивного или аксиоматического метода построения науки является одним из величайших достижений математической мысли. Оно потребовало работы многих поколений ученых.

***Основные черты дедуктивного метода.***

Замечательной чертой дедуктивной системы изложения является простота этого построения, позволяющая описать его в немногих словах.

Дедуктивная система изложения сводится:

1. к перечислению основных понятий,
2. к изложению определений,
3. к изложению аксиом,
4. к изложению теорем,
5. к доказательству этих теорем.

*Аксиома* – утверждение, принимаемое без доказательств.

*Теорема* – утверждение, вытекающее из аксиом.

*Доказательство* – составная часть дедуктивной системы, это есть рассуждение, которое показывает, что истинность утверждения вытекает логически из истинности предыдущих теорем или аксиом.

Внутри дедуктивной системы не могут быть решены два вопроса: 1) О смысле основных понятий, 2) об истинности аксиом. Но это не значит, что эти вопросы вообще неразрешимы.

История естествознания свидетельствует, что возможность аксиоматического построения той или иной науки появляется лишь на довольно высоком уровне развития этой науки, на базе большого фактического материала, позволяет отчетливо выявить те основные связи и соотношения, которые существуют между объектами, изучаемыми данной наукой.

Образцом аксиоматического построения математической науки является элементарная геометрия. Система аксиом геометрии были изложены Евклидом (около 300 г. до н. э.) в непревзойденном по своей значимости труде – «Начала». Эта система в основных чертах сохранилась и по сей день.

**Основные понятия**: точка, прямая, плоскость – основные образы; лежать между, принадлежать, движение – основные отношения.

Элементарная геометрия имеет 13 аксиом, которые разбиты на пять групп. В пятой группе одна аксиома – аксиома о параллельных (V постулат Евклида). Через точку на плоскости можно провести только одну прямую, не пересекающую данную прямую. Это единственная аксиома, вызывавшая потребность доказательства. Попытки доказать пятый постулат занимали математиков более 2-х тысячелетий, вплоть до первой половины 19 века, т.е. до того момента, когда Николай Иванович Лобачевский доказал в своих трудах полную безнадежность этих попыток. В настоящее время недоказуемость пятого постулата является строго доказанным математическим фактом.

Аксиому о параллельных Н.И. Лобачевский заменил аксиомой: Пусть в данной плоскости дана прямая и лежащая вне прямой точка. Через эту точку можно провести к данной прямой, по крайней мере, две параллельные прямые.

Из новой системы аксиом Н.И. Лобачевский с безупречной логической строгостью вывел стройную систему теорем, составляющих содержание неевклидовой геометрии. Обе геометрии Евклида и Лобачевского, как логические системы равноправны.

Три великих математика в 19 веке почти одновременно, независимо друг от друга пришли к одним результатам – недоказуемости пятого постулата и к созданию неевклидовой геометрии.

Николай Иванович Лобачевский (1792-1856)

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855)

Янош Бойяй (1802-1860)

Судьба открытия Лобачевского.

В 2004 г. Казанский Государственный Университет будет отмечать 200 летие своего существования. Имя Николая Ивановича Лобачевского тесно связано с Казанским Университетом и составляет его гордость.

Н. И. Лобачевский родился 1 декабря 1792г. в Нижнем Новгороде, в 1807 году поступил в Императорский Казанский Университет, в 1811 году окончил его. 19 февраля 1826 года представил доклад о своем открытии физико-математическому факультету. В течении всей своей жизни он развивал свои идеи, которые излагал в трудах «Начала геометрии», «Воображаемая геометрия» и других. За год до смерти он опубликовал свою работу «Пангеометрия» (1855г.).

Николай Иванович помимо научных трудов, вел громадную работу, как профессор, главный библиотекарь, декан, а позднее – ректор Университета, при нем развернулось строительство Университетского прекрасного архитектурного ансамбля. Умер он 12 февраля 1856г., так и не дождавшись признания своих идей. Эти идеи были враждебно встречены даже известными математиками того времени. Идеи Н.И. Лобачевского далеко опередили свое время, но все развитие науки подготовило их неизбежное торжество. Через пятнадцать лет после его смерти его открытие стало общеизвестным и определило на столетие вперед развитие геометрической науки, оказало сильнейшее влияние на другие разделы математики, явилось одной из предпосылок глубокого преобразования физических представлений о пространстве и времени.

**Тема 3. История развития науки о числе.**

Сложность цивилизации, как в зеркале отражается в сложности используемых ею чисел. Две с половиной тысячи лет назад вавилоняне довольствовались натуральными числами, подсчитывая принадлежащие им несколько овец, сегодня экономисты пользуются метрической алгеброй для описания взаимосвязей сотен предприятий.

Числовые системы, применяемые в математике, могут быть расчленены на пять главных ступеней: 1) множество целых положительных чисел – натуральное множество N 2) относительные числа, включающие положительные числа, отрицательные числа и нуль; 3) рациональные числа, в которые входят целые числа и дроби; 4) действительные числа, включая иррациональные числа, т.е. числа, которые можно представить бесконечной непериодической десятичной дробью, такие как π , ,  и т.д. 5) комплексные числа, вводящие в рассмотрение «мнимое число» .

История развития числа от целого числа до иррационального знакома нам по школьному курсу.

С эпохи Возрождения математики стали использовать числа вида z = x+iy для решения квадратных уравнений, дискриминант у которых отрицателен, где

i =, i² = –1, х и у – вещественные числа

Само число z = x + i y называется комплексным, а i =, мнимой единицей. Нельзя назвать число i ни положительным ни отрицательным.

«Мнимые числа – поразительный полет духа божьего» – писал Лейбниц в 1702 году. Сегодня комплексные числа прочно вошли в математический аппарат. Языком комплексных чисел написаны многие труды по математике, физике, технике.

Пример. Найти корни уравнения х²+x+1=0.

1. Находим дискриминант Д= 1 – 4 = –3 < 0; 2) Находим корни уравнения х = (-1+)/2 = (-1+i)/2;

х = (-1-)/2 = (-1-i)/2;

Это уравнение имеет комплексные корни, где i =.

Итак, число z = x + i y называется комплексным числом. x = Rez - называется вещественной частной числа, y = Im z - называется мнимой частного числа, х и у - вещественные числа.

Например, 1) z = 2 + 3i, Rez = 2 - вещественная часть числа, Im z = 3 мнимая часть числа.

2) z = -15 + i, Rez = -15 - ввещественная часть числа, Im z =1 - мнимая часть числа.

**Свойства комплексных чисел**

1. Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его вещественная и мнимая части, т.е. z = 0 <=> Rez = х=0, Im z =у=0.

(<=> - знак эквивалентности, или можно заменить слова «тогда и только тогда», необходимо и достаточно).

1. Если мнимая часть числа Im z =у=0, то z = х есть вещественное число, т.е. вещественные числа являются частью комплексных чисел.

Например, . z = 5+i0 = 5. Мнимая часть числа 5 равна 0.

1. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их вещественные и мнимые части. Пусть. z = х+iy, z = х+iy, z = z если х = х и y= y.
2. Множество комплексных чисел неупорядоченное множество, т.е. из двух комплексных чисел нельзя указать последующее и предыдущее. Между двумя комплексными числами нельзя поставить знаки неравенства >или<.

Например, z = 10+15i, z = 2-100i. Нельзя сказать которое из двух чисел больше.

**Определение.** Числа z = x + i y и  = x - i y называются комплексно сопряженными.

Например, z = -2 + 3i,  = -2 - 3i

z = 1 – i,  = 1 + i

**Действия над комплексными числами.**

Если два комплексных числа складывать, перемножать или делить друг на друга, то мы получим новое комплексное число.

Пример 1. Дано z = -1 + 2i, z = 3 - 5i. Найти z + z. Решение z + z= -1 + 2 i + 3 - 5i = 2 - 3i, т.е. складываются вещественные части и мнимые части.

Пример 2 Дано z = 2 + 3i, z = -1 + i. Найти z - z. Решение z - z= 2 + 3 i –(-1 + i) = 2 + 3i + 1 – i = 3 + 2i. т.е. складываются вещественные части и мнимые части.

Пример 3 Дано z = -1 + 2i, z = 3 - 5i. Найти z\* z. Решение, z\* z= (-1 + 2 i )\*( 3 - 5i ) = -3 + 6i +5i – 10 i² = - 3 +10 +11 i = 7+ 11 i, надо помнить, что i² = - 1.

Пример 4 Дано z = 2 - i, ,  = 2 + i. Найти z \* .

Решение z \*  = (2 – i ) \*(2+ i ) = 2² - i² = 4+1 = 5, где i² = -1. Произведение комплексно сопряженных чисел есть вещественное число равное сумме квадратов вещественной и мнимой частей.

Например, 1) z = 1 + i,  = 1 – i, z \* =1² + 1²=2

2) z = 3 + 5i,  = 3 - 5i, , z \* =9 + 25=34

Пример 5 Дано z = -1 + i, z = 2 - 3i. Найти z = (1 + i)/(2 - 3i). Решение z = (1 + i)/(2 - 3i) = (1+ i)(2 +3i) / (2 – 3i)(2+3i) = (2 +2i +3i +3i²)/ (4+9) = (2 – 3 + 5i)/13 =

= -1/3 + (5/13)i. Чтобы выделить вещественную и мнимую часть числа z надо числитель и знаменатель дроби умножить на число сопряженное знаменателю.

Рассмотрим еще один подобный пример.

Произвести действие, выделить вещественную и мнимую части числа

(2 + i)/(1 + 2i).

Решение. (2 + i)/(1 + 2i) = (2+ i)(1 -2i) / (1 + 2i)(1 - 2i) = (2 +i - 4i - 2i²)/ (1 +4) = (2 + 2 - 3i)/5 = (4 - 3i)/5= 4/5 - (3/5)i.

**Геометрическое изображение комплексного числа z = x + iy.**

Выберем декартову прямоугольную систему координат. По оси абцисс отложим вещественную часть числа х, по оси ординат отложим мнимую часть числа у, получим на плоскости точку z с координатами ( х,у )

у

Рис.1

Z (x,y)

у

х

0

х

Рис.1

Ось ох называется вещественной осью

Ось оу называется мнимой осью.

Вся плоскость хоу называется плоскостью комплексного переменного.

Пример. Построить числа z =1+ i; z =2 i, z = -2+3 i; z = -1/2 i, z =1 - i, z =-1-2 i Рис2.

y

3

Z3

2

Z2



1

Z1

-2

0

Z4

-1

1

х

Z5

-1

-2

Z6

**Тема 4. Аналитическая геометрия. Координатный метод. Прямая линия на плоскости.**

Аналитическая геометрия - область математики, занимающаяся изучением геометрических задач методом координат. Основная идея аналитической геометрии проста: положение точки на плоскости можно описать двумя числами и, таким образом, перевести любое утверждение о точках в утверждение о числах. Основоположниками метода координат принято считать Рене Декарта (1596-1650) и Пьера Ферма (1601-1665).

Декартова прямоугольная система координат на плоскости задается так: выбираются две взаимоперпендикулярные прямые с выбранным положительным направлением на каждой прямой - оси координат, точка пересечения прямых – начало координат. Выбирается на осях координат единица масштаба.

у

Рис 1.

М (х,у)

1

0

х

1

Рис 1

Ось ох – ось абцисс.

Ось оу – ось ординат

О – точка пересечения осей, начало координат.

Положение всякой точки плоскости определяется ее расстоянием от осей координат. Эти расстояния называются координатами точки. Например, точка М имеет координаты х и у – М(х,у). Рис 1.

х – абцисса точки М, у – ордината точки М.

Координатам приписывают знаки, зависящие от расположения точки в различных частях координатной системы.

Пример. Построить точки: А(3,2); В(-1,4); С(-2,0); Д(-1,-1/2); Е(1,-1).

Рис 2.

у

В

4

А (3,2)

2

А (3,2)

1

С

-1

0

-1/2

Д

-2

3

х

Е

-1

Расстояние между двумя точками на плоскости М1(х1,у1) и М2(х2,у2) определяется по формуле М1М2 = (х2-х1)2+(у2-у1)2.

Например, найти АВ, если А (1,2); В (-2,-2). Используя формулу, получим АВ=корень ====5.

Соотношение, характеризующее зависимость между координатами х и у точек кривой называется уравнением этой кривой. Например: у+2х-1=0 – уравнение прямой, х2+у2=4 – уравнение окружности.

Координаты любой точки, лежащей на кривой, удовлетворяют уравнению кривой, а координаты точек, на кривой не лежащей, уравнению не удовлетворяют. Например, проверим лежит ли точка А (1,2) и В (0,1) на прямой у+2х-1=0. Для этого подставим координаты каждой точки в уравнение прямой.

1. А(1,2)-2+2-10, вывод: точка А не принадлежит прямой.
2. В(0,1)-1-1=0, вывод: точка В лежит на прямой.

Любое уравнение первой степени относительно переменных х и у, называется линейным, оно есть уравнение прямой линии.

Ах+Ву+С=0, где А, В, С – вещественные числа, есть общее уравнение прямой.

Например, х+у-1=0, у=2х, х=3, у= -1. Эти уравнения – есть уравнения прямых.

Построим эти прямые на плоскости Рис 3. Положение любой прямой определяется двумя точками. Найдем точки пересечения прямой х+у-1=0 с осями координат.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Х | 0 | 1 |
| У | 1 | 0 |

А(0,1); В(1,0). Через эти точки проводим прямую.

Рис 3.

у

А

1

В

0

Х

1

У=2х – прямая проходит через начало координат, т.к. координаты начала О(0,0) удовлетворяют уравнению прямой, подберем точку С(1,2) – лежащую на прямой, проведем прямую через точки О и С. Рис 4.

Рис.4

у

С

2

х

1

0

Прямая х=3 параллельна оси оу, прямая у=-1 параллельна оси ох. Рис 5.

Рис.5

у

3

0

х

-1

**Уравнение прямой с угловым коэффициентом.**

у=Кх+в, К=tg φ – коэффициент, φ – угол, который прямая составляет с осью абцисс, в - отрезок, который прямая отсекает от оси ординат. Рис 6.

Рис.6

у

φ

}в

х

0

Если две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. Например, у=2х+3, у=2х - 5 эти две прямые параллельны, т.к. К1=2; К2=2; К1=К2.

Если две прямые перпендикулярны, то К2= -1/К1. Например, у=2х+3, у= -(1/2)х - 1. Эти прямые перпендикулярны, т.к. К1=2, К2=-1/2; К2= -1/К1.

Пример. Указать какие из следующих пар прямых параллельны, а какие перпендикулярны.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1)3х - у+7=0  6х - 2у-1=0 | 2) 3х - у+5=0  х+3у - 1=0 | 3)3х - 4у+1=0  4х + 3у+7=0 |

Решение. 1) Найдем условные коэффициенты обеих прямых, для этого каждое уравнение разрешим относительно у.

у=3х+7, у=3х - 1/2. Эти прямые параллельны, т.к. К1=К2=3

1. Разрешим каждое уравнение относительно у

У=3х+5, у= -1/3х+1/3, К1=3, К2= -1/3, т.к. К2=-1/К1, то мы можем сказать, что эти две прямые перпендикулярны.

1. Разрешим каждое уравнение относительно у

у = 3/4х+1/4, у = - 4/3х +х/3; К1 = 3/4, К2 = 4/3

Эти прямые не являются параллельными, т.к. К1≠К2, эти прямые являются перпендикулярными, т.к. К2= -1/К1

**Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.**

у - у0=К (х - х0) – уравнение прямой, проходящей через данную точку М0 (х0,у0), в данном направлении, т.е. К известен.

Задача. Через точку М0(1,-2) провести прямую ℓ параллельную прямой у = 2х - 1

Решение. Уравнение прямой ℓ запишем в виде у-у0=К(х-х0). Х0 и у0 – нам даны, это х0=1, у0=-2, К – угловой коэффициент найдем из условия параллельности двух прямых К=2. у+2=2(х - 1) – искомое уравнение или 2х – у - 4=0

**Тема 5. Кривые второго порядка.**

К кривым второго порядка относят кривые, записанные уравнением Ах2 + Вху + Су2 + Ех + Ду + F = 0. В зависимости от значений коэффициентов (вещественные числа) это могут быть окружность, эллипс, гипербола, парабола. Эти кривые были известны с глубокой древности. Все эти кривые суть сечения прямого кругового конуса плоскостями (конические сечения).

**Эллипс.** Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек F1 и F2 (фокусов) есть величина постоянная 2а, большая F1F2. Каноническое уравнение (простейшее) уравнение эллипса: х2/а2 + у2/в2 =1

Эллипс, заданный таким уравнением симметричен относительно осей координат (рис 1)

Рис 1.

b

y

M(x,y)

F1

x

0

F2

М (х,у) – произвольная точка эллипса, (х,у) – текущие координаты этой точки. Все точки эллипса удовлетворяют условию: F1M + F2M=2a.

а,в называются полуосями эллипса, а – большая полуось, в – малая полуось. F1 и F2 – фокусы эллипса находятся на оси ох на расстоянии С= 2 – в2) от центра О. Отношение с/а = Е называется эксцентриситетом эллипса.

**Пример 1.** 1)Написать уравнение эллипса, если а=4, в=3; 2)Найти координаты фокусов; 3)Найти Е.

**Ответ:** 1) х2/16 + у2/9=1; 2) С= = , F1 (- , 0); F2 ( , 0); 3)Е = с/а = /4 < 1.

**Гипербола.** Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек F1 и F2 (фокусов) есть постоянная величина 2а (0<2a<F1, F2).

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы.

Х2 /а2 – у2/в2 = 1

Гипербола, заданная уравнением симметрична относительно осей координат (Рис 2). Она пересекает ось ох в точках А1( -а, 0) и А2(+а, 0) – вершинах гиперболы и не пересекает ось оу. Параметр а называется вещественной полуосью, в – мнимой полуосью, С=(а2 +в2) - расстояние от фокуса до центра симметрии О. Отношение с/а=Е называется эксцентриситетом гиперболы. Прямые у= ±в/а х называются асимптотами гиперболы.

Рис.2

M (x,y)

b

a

0

# F1

# F2

М(х,у) – произвольные точки гиперболы, (х,у) – текущие координаты произвольной точки. Все точки гиперболы удовлетворяют условию

│F1M-F2M│=2a.

**Пример 2**. Дана гипербола х²-4у²=16. 1)Написать каноническое уравнение гиперболы; 2)Найти вещественную и мнимую полуоси; 3) Найти асимптоты гиперболы; 4) Вычислить эксцентриситет Е.

**Ответ:** 1)х²/16 - у²/4 = 1; 2) а= = 4; в= = 2. 3) у = ±(в/а) х или у = ±(2/4)х или у = ±(1/2)х; 4) с= (а² + в²) = = = 2,

Е=с/а=(2)/4 = ()/2 ;

Е=()/2 >1.

**Парабола.** Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы имеет два вида:

1. у²= 2рх – парабола симметрична относительно ох (рис.3)
2. х²= 2ру – парабола симметрична относительно оу (рис.4)

-р/2

d

F(p/2;0)

М(х,у)

х

у

РИС.3

0

РИС.4

у

М(х,у)

F(0,p/2)

d

0

х

-р/2

директриса

М (х,у) – произвольная точка парабола,

(х,у) – текущие координаты произвольной точки,

х = -р/2 – уравнение директрисы.

FM = d, где d – расстояние от точки М до директрисы.

В обоих случаях вершина параболы находится на оси симметрии в начале координат 0.

Парабола у² = 2рх имеет фокус F (р/2) и директрису х = - р/2

Парабола х = 2ру имеет фокус F (р/2) и директрису у = - р/2

**Пример 3.** Построить параболы заданные уравнениями:

1. у² = 4х; 2) у² = -4х; 3) х² =4у; 4) х² =-4у; а так же их фокусы и директрисы и написать уравнения директрис.

**Ответ:**

y

1)

2)

y

1

x

0 0

F (-1,0)

x

-1

F(1,0)

y² = - 4x, p=2, F(-1,0)

х = -1 – уравнение директрисы

y² = 4x, p=2, F(1,0)

х = -1 – уравнение директрисы

3)

4)

у

у

F(0,1)

1

х

0

х

0

-1

F(0,-1)

Х2  = - 4у, р = - 2, F (0, -1)

У = 1 – уравнение директрисы

Х2 = 4у, р = 2, F (0, 1)

У = -1 – уравнение директрисы.

**Окружность.** Уравнение окружности с центром в точке А (а,в) и радиусом R; (рис.6)

у

(х – а)2 + (у – в)2 = R2

R

А (а, в)

0

х

**Пример 4.** 1) Написать уравнение окружности с центром в точке А ( -1, 2), R = 2. 2) Построить ее. 3) Лежит ли точка О (0, 0) на окружности?

Ответ: 1) (х + 1)2 + (у – 2)2 = 4, если раскроем скобки, то уравнение примет вид:

х2 + у2 + 2х – 4у + 1 = 0

# Рис. 7

2)

у

А

2

0

х

-1

1. О (0,0) не лежит на окружности, т. к. координаты этой точки не удовлетворяют уравнению: 0+0+0 + 0+1 ≠ 0.

**Тема 6. Элементы линейной алгебры. Определители, их свойства. Способы вычисления определителей. Решения систем линейных алгебраичных уравнений по формулам Крамера.**

Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом  и определяемое равенством  = а11а22-а12а21.

Например, Вычислить определитель  = 3\*6 – (-2)\*4 = 18 + 8 = =26

Числа, составляющие определитель называются его элементами. Определитель второго порядка имеет две строки и два столбца.

Определитель третьего порядка называется число, обозначаемое символом  и определяемое равенством  = а11\*а22\*а33 + а12\*а23\*а31 + а13\*а32\*а21 – (а13\*а22\*а31+а32\*а23 \*а11+а33\*а12\*а21).

Например,  = 2\*(-2)\*3+3\*1\*1+4\*2\*5 – (1\*(-2)\*4 + 2\*1\*2 + 3\*3\*5) = -12+3+40 – (-8+4+45) = 31-41= - 10

Перечислим свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится от замены строк столбцами.
2. Величина определителя изменит знак на обратный при перестановке двух любых строк или столбцов.
3. Определитель равен нулю, если две его строки или два его столбца одинаковы.
4. Общий множитель строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
5. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число.

Например,  = 

**Алгебраическое дополнение. Минор.**

Минором Мij элемента аij называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i строки j столбца, т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент аij. Минор Мij есть определитель порядка на единицу ниже исходного.

Например, в определителе,  Минором к элементу 4 является М13= = = 10+2=12.

Алгебраическое дополнение Аij есть минор Мij , умноженный на (-1)i+j, т.е.

Аij = (-1)i+j Mij

В приведенном примере А13= (-1)1+3 М13 = (-1)4 \*  = 10+2=12.

В данном случае Минор и алгебраическое дополнение к элементу 4 совпали.

Продолжим изложение свойств определителей.

1. Величина определителя равна сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующее алгебраическое дополнение этих элементов.

Например,  = а11\*А11 +а12\*А12+а13\*А13; правая часть равенства называется разложением определителя по элементам первой строки.

1. Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения к элементам другой строки равна нулю.

Например, а11 А21+а12А22+а13А23=0.

Перечисленные свойства определителей справедливы для определителей любого порядка.

**Пример.** Вычислить определитель  двумя способами.

**первый способ**.  = 2\*5\*(-3)+(-3)\*(-4)\*4+1\*1\*1 – (4\*5\*1+1\*(-4)\*2 + +(-3)\*(-3)\*1) = -30+48+1 – (20 – 8+9) = 19 – 21= -2.

**Второй способ**. Разложим определитель по элементам второго столбца.  = -3 А12 + 5А22 + 1А32 = -3(-1)1+2  + 5(-1)2+2  +(-1)3+2  = -3\*(-1)\*(-3+16)+5(-6-4) – (-8 – 1) = 3\*13+5\*(-10) +9 = 48 – 50 = -2.

**Системы линейных алгебраических уравнений. Решение систем по формулам Крамера.**

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

а11х1 + а12х2 + а13х3 = в1

а21х1 + а22х2 + а23х3 = в2

а31х1 + а32х2 + а33х3 = в3

Это система трех уравнений с тремя неизвестными х1, х2, х3. Вещественные числа аij (i = , j = ) называются коэффициентами системы. в1, в2, в3 – свободные члены. Если хотя бы одно из чисел в1, в2, в3, отлично от нуля, система называется неоднородной. Если все свободные члены равны нулю, то система имеет вид:

а11х1 + а12х2 + а13х3 = 0

а21х1 + а22х2 + а23х3 = 0

а31х1 + а32х2 + а33х3 = 0

и называется однородной.

По формуле Крамера решаются только неоднородные системы.

Определитель системы Δ называется определитель, составленный из коэффициентов системы:

Δ = 

Если определитель системы Δ не равен 0, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам:

Х1 = Δх1/ Δ; х2== Δх2/ Δ; х3== Δх3/ Δ; где

Δх1=  ; Δх2= ; Δх3= .

Если определитель системы = Δ равен нулю, и хотя бы один из определителей ∆х1=∆х2=∆х3 отличен от нуля, то система несовместна.

Если определитель системы ∆=0, и ∆х1=∆х2=∆х3=0, то система имеет бесконечное множество решений. (неопределенная система).

**Пример.** Решить систему уравнений:

Х + 2у – z = 1

-3х + у = 2z = 0

х + 4у + 3z = 2

1. Вычислим определитель системы ∆ =  = 1\*1\*3+2\*2\*1+(-1)\*4\*(-3) – (1\*1\*(-1)+4\*2\*1+3\*2\*(-3))=3+4+12 – (-1 + 8 – 18) = 19+11 = 30.

Система имеет единственное решение, т.к. определитель ∆ = 30 ≠ 0.

1. Вычислим определители ∆х, ∆у, ∆z.

∆х =  = 5; ∆у =  = 13; ∆z =  = 1.

1. По формулам Крамера находим решение системы:

Х = ∆х/∆ = 5/30 = 1/6; у = ∆у/∆ = 13/30; z = ∆z/∆ = 1/30;

Ответ: решение системы (1/6; 13/30; 1/30).

По формулам Крамера можно решить систему n линейных уравнений с n неизвестными.

**Пример** Решить систему уравнений.

х - у+z=1

х + у – z=2

5х + у – z=7

1. Составим и вычислим определитель системы ∆=  = 0.
2. Вычислим определители ∆х, ∆у, ∆z.

∆х = = 0, ∆у =  = -2

Т.к. определитель ∆у= -2 ≠ 0, мы делаем заключение: Система несовместна, т.е. она не имеет решения.

**Тема 7. Алгебра матриц.**

**Определение.** Таблица, составленная из m\*n чисел называется матрицей размерности m\*n,

а11 а12 а13…а1п

а21 а22 а23…а2п

……………… = Ам\*п= //аij//

ам1 ам2 ам3…амп , где

m – число строк, n – число столбцов. Числа аij называются элементами матрицы, i- номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

**Разновидности матриц.**

1. Матрица называется прямоугольной, если m≠n.
2. Матрица называется квадратной, если m=n.
3. Матрица называется матрицей - строкой, если m=1.
4. Матрица называется матрицей - столбцом, если n=1.

Например, 1) 1 2 3 = А2\*3 – прямоугольная матрица размерности 2\*3 (два на три)

0 –1 5

2) 1 2 - квадратная матрица.

3 4

1. (1 0 3 5, -1) – матрица строка.
2. 7

12 матрица столбец.

5

3

1. Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы матриц, расположенные выше или ниже главной диагонали равны нулю.

Например, 1 0 0 5 1 –3

2 6 0 или 0 4 2

-1 –2 8 0 0 -1

1. Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

Например, 1 0 0

0 –2 0

1. 0 5
2. Квадратная матрица называется единичной, если элементы диагональной матрицы, стоящие на главной диагонали равны единице.

1 0 0

Е = 0 1 0

0 0 1 .

**Алгебра матриц.**

1. **Равенство матриц.** Две матрицы Ам\*п и Вм\*п одинаковой размерности равны, если равны соответствующие элементы этих матриц.

Ам\*п = Вм\*п ⬄ аij = bij (i = , j = )

⬄ этот знак (квантор эквивалентности) заменяет слова «тогда и только тогда»,

обозначение (i = ) применяется, если хотят сказать, что i пробегает все значения от 1 до m.

**2. Сумма матриц.** Суммой двух матриц Ам\*п = //аij// и Вм\*п = //вij// называется матрица См\*п, элементы которой Сij = аij + вij . Cm\*n = Am\*n + Bm\*n. Складывать можно матрицы одинаковой соразмерности.

Нпример, Если А= 1 –2 4 В= -3 2 5

3 1 –6 , 1 –6 4 , то

А+В = 1 –2 4 -3 2 5 1-3 -2+2 4+5 -2 0 9

=

=

+

3 1 –6 1 –6 4 , 3+1 1-6 6+4 4 –5 –2

**3. Умножение матрицы на число.** Для того чтобы умножить матрицу на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

αА = //α aij//.

3 2 4 –1

-2 1 5 6

Например, вычеслить 4 А, если А =

12 8 16 –4

-8 4 20 24

3 2 4 –1

-2 1 5 6

4А = 4 \*

=

**4. Умножение матриц.** Произведением матрицы Ам\*е на матрицу Ве\*п называется матрица См\*п (Ам\*е\*Ве\*п=См\*п), элементы которой получаются по правилу «Строка на столбец»:

сij =aijbij + ai2b2j +…+ aiebej

(i= ; j= ) , т.е. для вычисления сij следует элементы i – строки левой матрицы Ам\*е умножить на соответствующие элементы j –го столбца правой матрицы Ве\*п и полученные произведения сложить.

**Замечание 1.** Из этого определения следует, что произведение матриц имеет смысл тогда, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго сомножителя.

**Замечание 2.** Если имеют смысл АВ и ВА, то как правило, АВ≠ВА.

1 2

2 4

3 1

3 4 1 3

2 –1 –2 4

**Пример.** Вычислить АВ, если А = В =

Решение: АВ=С

7 2 –3 11

14 4 –6 22

11 11 1 13

3 4 1 3

2 –1 –2 4

1 2

2 4

3 1

С11С12С13С14

С21С22С23С24

С31С32С33С34

С= \* = =

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| С11=1\*3+2\*2=7; | С12=1\*4+2\*(-1)=2 | С13=1\*1+2\*(-2)= -3 | С14=1\*3+2\*4=11 |
| С21=2\*3+4\*2=14; | С22=2\*4+4\*(-1)=4 | С23=2\*1+4\*(-2)= -6 | С24=2\*3+4\*4=22 |
| С31=3\*3+1\*2=11 | С32=3\*4+1(-1)=11 | С33=3\*1+1\*(-2)=1 | С34=3\*3+1\*4=13 |

7 2 –3 11

14 4 –6 22

11 11 1 13

Ответ: А\*В=С=

**Пример.** Найти произведения двух матриц АВ и ВА, если А = 1 2 ,

В = 2 1 3 4

1 3

Сравним эти произведения.

1) С=АВ= 1 2 2 1 4 7

\*

=

3 4 1 3 10 15

С11 = 1\*2+2\*1=4; С12 = 1\*1+2\*3=7;

С21 = 3\*2+4\*1=10; С22 = 3\*1+4\*3=15

2) Д=ВА= 2 1 1 2 5 8

=

\*

1 3 3 4 10 14

d11=2\*1+1\*3=5; d12=2\*2+1\*4=8

d21=1\*1+3\*3=10; d22=1\*2+3\*4=14

Мы убедились, что в нашем примере АВ≠ВА.

**Пример.** Вычислить АВ, если А=(4 0 -2 1); В= 

Решение: АВ=(4 0 -2 1)\*  =4\*3+0\*1+(-2)\*5+1\*(-2)=(0)

Ответ: АВ=(0) – нуль – матрица.

**Замечание.** При умножении матрицы строки на матрицу столбец получается матрица из одного элемента – число.

**5. Транспонирование матрицы.** Если в матрице А строки заменить столбцами, то новая матрица называется транспонированной по отношению к матрице А и обозначается символом Ат. Замечание (Ат)т=А.

**6.** Матрица, все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей и обозначается символом Ø. А+Ø=А.

**Основные свойства операций над матрицами:**

А+В = В+А; А+(В+С) = А+В+С; (α +β)А = αА+βА; α(А+В) = αА + αВ; (А+В)\*С=АС+ВС; С(А+В)=СА+СВ; (αА)В=α(АВ); (АВ)\*С=А(ВС); (АВ)т=Вт Ат.

Понятие матрицы, алгебра матриц имеют чрезвычайно важные значение в приложениях математики к экономике и другим наукам, т.к. позволяют записывать значительную часть математических моделей в достаточно простой, а главное компактной форме.

**Пример.** Каждое из трех предприятий производить продукцию двух видов. Количество продукции каждого вида в тоннах за рабочую силу на каждом предприятий можно задать матрицей А= 2 1 3

1 3 4 ,

Стоимость одной тонны продукции каждого вида задана матрицей В= (10 15). На какую сумму произведет всю продукцию каждое предприятие за рабочую смену?

Решение: В\*А= (10 15)\* 2 1 3 =(35 55 90)

1 3 4

**Ответ:** Первое предприятие произведет продукции на 35 тыс. руб.

Второе – на 55 тыс. руб.

Третье – на 90 тыс. руб.

**Тема 8. Понятие множества.**

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под множеством понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множества называются элементами, или точками, этого множества.

Примерами множеств являются: множество студентов данного ВУЗа, множество предприятий некоторой отрасли, множество натуральных чисел и т.п.

Множество обозначаются прописными буквами, а их элементы строчными. Если а есть элемент множества А, то используется запись а Є А. Если в не является элементом множества А, то пишут в Є А.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается Ø. Например, множество действительных корней уравнения х2+1=0 есть пустое множество.

Если множество В состоит из части элементов множества А или совпадает с ним, то множество В называется подмножеством множества А и обозначается

В С А.

Если, например, А – множество всех студентов ВУЗа, а В – множество студентов-первокурсников этого ВУЗа, то В есть подмножество множества А, т.е. В С А.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединение двух множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. С=АUВ.

Например, если А= {а, в, d, е}; В= {а, е, f, с, к}, то С = АUВ = {а, в, d, е, f, с, к}

Пересечением двух множеств А и В называется множество Д, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств А и В, т.е. Д = А∩В.

Например, 1) если А= {1, 2, 3}, В= {2, 3, 4}, то Д = А∩В = {2, 3}. 2) если А = {1, 2, 3}; В= {4, 5, 6, 7}, то А∩В = Ø.

Разностью множеств А и В называется множество Е, состоящее из всех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В, т.е. Е = А \ В.

Например, если А = {a, b, c, d}, B = {b, c}, то А\В = {а, d}.

**Пример,** Даны множества А = {1, 3, 6, 8}, В = {2, 4, 6, 8}. Найти объединение, пересечение и разность множеств А и В.

Решение: АUВ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}

А∩В = {6, 8}

А \ В = {1, 3}

Множества называется конечным, если оно состоит из конечного числа элементов, в противном случае оно называется бесконечным.

Множества элементами, которых являются действительные числа, называются числовыми. Из школьного курса алгебры известны множества: R – множество действительных чисел, Q – множество рациональных чисел, Z – множество целых чисел, N – множество натуральных чисел.

Очевидно, что N С Z C Q C R

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками числовой прямой (числовые оси). (Рис.1), т.е. прямой на которой выбрано начало отчета, положительные направления и единица масштаба.

х

1

0

Рис.1

Между множеством вещественных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой – определенное вещественное число.

Множество Х, элементы которого удовлетворяют неравенству а ≤ x ≤ в, называется отрезком (или сегментом), обозначается [a, в], если элементы Х удовлетворяют неравенству а<x<в - открытым интервалом (а, в); неравенствам а ≤ х < в или а< х ≤ в, называется полусегментами соответственно [а, в) и (а, в].

**Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки.**

Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа х называется само число х, если х неотрицательно, и противоположное число – х, если х – отрицательно:

# х, если х ≥ 0

-х, если х < 0

/х/=

По определению /х/ ≥ 0. Например, /5/=5; /-1,5/=1,5.

Свойства абсолютных величин:

1. │х+у│ ≤ │х│+│у│, 2. │х-у│ ≥ │х│ - │у│,

3. │ху│ = │х│\*│у│, 4. │х/у│ = │х│/│у│

Из определения абсолютной величины числа следует: -│х│≤ х ≤ │х│. Пусть │х│< ε, можно написать: -ε< -│х│≤ х ≤│х│<ε, или -ε<х<ε, т.е. значения х лежат на открытом интервале (-ε, ε).

Рассмотрим неравенства │х-а│<ε (где ε>0). Решениями этого неравенства будут точки открытого интервала (а – ε, а+ε), или а - ε<х<а+ε.

Всякий интервал, содержащий точку а называется окрестностью точки а.

Интервал (а – ε, а+ε), т.е. множество точек х таких, что │х-а│<ε (где ε>0), называется ε – окрестностью точки а. Рис.2 (ε – эсилон, буква греческого алфавита).

Рис.2

х

а – ε а а+ε

**Тема 9. Функция. Классификация функций.**

**Определение.** Рассмотрим два множества Х и У, элементами которых могут быть любые объекты. Предложим, что каждому элементу х множества Х по некоторому закону или способу поставлен в соответствие определенный элемент у множества У, то говорят что на множестве Х задана функция у = ƒ(х), (или отображение множества Х во множество У).

Множество Х называется областью определения функции ƒ, а элементы у = ƒ(х) образуют множество значений функции – У.

х – независимая переменная (аргумент).

у – зависимая переменная,

ƒ – закон соответствия, знак функции.

Пусть Х и У множества вещественных чисел.

**Пример.** Найти область определения и область значений функции у = х2 + 1

Областью определения функции является множество Х = (-∞, ∞), область значений является множество У = [0, ∞).

**Пример 2.** Найти область определения функции у = 1/(х2 – 5х + 6).

Решение: Найдем значения х, в которых знаменатель обращается в нуль.

х2 – 5х + 6=0. х1 = 2, х2=3. Функция не существует в этих точках. Областью определения является объединение таких множеств: (-∞, 2) U (2, 3) U (3, ∞).

**Пример 3.** Найти область определения функции у= log3(х – 1).

Решение: х – 1 >0, х>1. Запишем решение в виде интервала: (1, ∞) – область определения функции.

**Пример 4.** Дана функция f (х) = |х + 2|/х – 1. Найти значения функции в точках

х = -2, х = -3, х = 1, х = 0.

Решение: f(-2) = |-2+2| / (2-1) = 0/1 = 0; f (-3) = |-3+2| / (3 – 2) = | - 1| / 1= 1;

f(1) = |1+2| / (1 – 1) = 3/0, точка х = 1 в область определения функции не входит, так как знаменатель в этой точке обращается в 0.

f (0) = |0 + 2| / (0-1) = 2/ -1 = -2.

**Пример 5.** Дана функция f(х) = 3х2 + х – 1.

Найти значение этой функции при 1) х=а2 – 1, 2) х = 1/t.

Решение: 1)f(а2 – 1) = 3(а2 – 1)2 + а2 – 1 – 1=3а4 – 6а2 + 3 + а2  - 2 = 3а4 – 5а2 + 1.

2) f (1/t) = 3(1/t2) + 1/t – 1 = (3 + t – t2)/t2.

**Способы задания функции.** Существует несколько способов задания функции.

а) аналитический способ, если функция задана формулой вида у = f (х). Все функции, рассмотренные в примерах 1-5 заданы аналитически.

б) табличный способ состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей значения х и соответствующие значения f (х), например, таблица логарифмов.

в) графический способ, состоит в изображении графика функции – множество точек (х, у) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента х, а ординаты – соответствующие им значения функции у = f (х).

Например, у = х2 (Рис.1); у =  (Рис.2)

у

у

0 х 0 х

Рис. 1. Рис. 2.

Г) Описательный способ, если функция записывается правилом ее составления, например, функция Дирихле:

1, если х – рациональное число.

f(х) =

0, если х – иррациональное число.

**Основные элементарные функции.**

Все функции, с которыми встречаемся в школьном курсе, элементарные. Перечислим их:

1. у = хп, у = х –п, у = хм/п, где п, Є N, м Є Z. Эти функции называются степенными.
2. Показательная функция у = ах, а > 0, а ≠ 1.
3. Логарифмическая функция у = logах, а>0, а ≠ 1
4. Тригонометрические функции у = sin х, у = cos х , у = tg х, у = ctg х.
5. Обратные тригонометрические функции у = argsin х, у = arccos х, у = arctg х,

у = arcctg х.

**Сложная функция.** (суперпозиция функций).

Пусть функция у = f(u) есть функция от переменной u, определенная на множестве U с областью значений – У, а переменная u = φ(х) функция от переменной х, определенной на множестве Х с областью значения U. Тогда заданная на множестве Х функция у = f(φ(x)) называется сложной функцией (функцией от функций). Например, у = lg sin 3х. Эту сложную функцию от х можно расписать, как цепочку простых функций: у= lg u, u = sin t, t = 3x.

**Понятия элементарной функции.** Функции построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий называются элементарными.

Например, у = )/(sin2х+3) или у = 2 - tg х.

Примером неэлементарной функции является функция у = |х|. Ее график представлен на рис. 3.

У

Рис.3

0

х

**Классификация функции.** Элементарные функции делятся на два класса.

1 класс алгебраических функций:

а) у = А0хп + А1хп-1 + А2хп-2 + … + Ап-1х + Ап, это многочлен (полином) п – степени или целая алгебраическая функция, где А0, А1, А2, … , Ап – вещественные числа, коэффициенты многочлена.

б) у = ( А0хп + А1хп-1 + … + Ап)/(В0хм + В1хм-1 + … +Вм), это дробно – рациональная функция, она представляет собой отношения двух многочленов.

в) Иррациональная функция, например, у =  + х2.

2 класс трансценденных функций.

а) у = ах, а > 0, а ≠1, показательная функция,

б) у = logах, а> 0, а ≠1, логарифмическая функция,

в) все тригонометрические функции,

г) все обратные тригонометрические функции,

д) функции вида у = хL , где L – иррациональное число. Например, у = хπ.

**Тема 10. Предел функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы. Понятие о непрерывности функции.**

**Определение. ε** – окрестностью точки а называется открытый интервал (а-ε, а+ε) (ε – эпсилон буква греческого алфавита), или |х - а|< ε.

**Определение предела функции.** Пусть функция у = f(х) определена в некоторой точке а, кроме, может быть, самой этой точки.

Число b называется пределом функции f(х) при х стремящемся к а, если для любого сколь угодно малого, наперед заданного ε>0 существует такое δ>0, что для всех х таких, что |х-а|<δ выполняется неравенство |f(x) - b|<ε.

В компактном виде это определение можно записать lim f(x) = b.

x→a

(lim – сокращенное слово limit(предел)).

Читается так: предел f(x) при х стремящемся к а равен b.

При отыскании предела мы не учитываем значение функции в самой точке а, оно может быть любым. Рис. 1, 2, 3, 4.

y y

f(a) y= f(x)

f(a)=b

y = f (x)

b

0

0 a x а х

Рис.1 Рис.2

y

f(a)

f(a)

0 a x 0 a x

Рис.3 Рис.4

На приведенных рисунках предел существует в случаях 1) и 2), причем во 2) значение функции в точке а не совпадает с предельным, а в 1) совпадает f(a) = b . На рисунках 3) и 4) предел у функции в точке а не существует.

**Определение.** Функция f(x) называется непрерывной в точке а, если ее предел в этой точке совпадает со значением функции в той же точке, или lim f(x) = f(a).

х→а

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке, где они определены.

**Основные теоремы о пределах функций.**

1. Предел суммы двух функций равен сумме пределов.

lim (f(x) + φ(x)) = lim f(x) + lim φ(x)

х→а

х→а

х→а

2. Предел произведения двух функций равен произведению пределов.

lim [f(x) \* φ(x)] = lim f(x) \* lim φ(x)

х→а

х→а

х→а

3. Предел произведения числа на функцию равен произведению числа на предел функции.

lim С\*f(x) = С \*lim f(x)

х→а

х→а

Это свойство можно записать так: постоянный множитель выносится за знак предела.

4. Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций. (Кроме случая, когда знаменатель стремиться к нулю).

lim f(x) / φ(x) = lim f(x) / lim φ(x), limφ(х)≠0.

х→а

х→а

х→а

х→а

Если знаменатель стремиться к нулю, а числитель - нет, то говорят, что отношение стремиться к бесконечности.

Бесконечность – это не число, ее можно добавить ко множеству вещественных чисел R в качестве нового элемента ∞. После этого числовая прямая превращается в так называемую расширенную прямую.

Раз мы добавили новый элемент ко множеству вещественных чисел, то запишем арифметические операции с этим элементом ∞.

Пусть а любое вещественное число, а Є R, тогда

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а + ∞ = ∞ | -∞ + а = -∞ | ∞ \* (-а) = - ∞, а › 0 |
| ∞ - а = ∞ | -∞ - а = - ∞ | ∞ \* ∞ = ∞ |
| а \* ∞ = ∞, а ≠ 0 | ∞ + ∞ = ∞ | а/∞ = 0, ∞/а = ∞ |
|  | - ∞ - ∞ = - ∞ |  |

Есть особые случаи, когда предел суммы, произведения или частного нельзя найти, зная только пределы слагаемых, сомножителей или делимого и делителя. Такие случаи называются неопределенностями.

Выделяют неопределенности двух типов:

Арифметические неопределенности (0/0); (00/00); (00 – 00); (0 \* 00).

Степенно-показательные неопределенности (100); (000); 00.

Эти записи не являются операциями над числами и 00, они представляют собой только деловые обозначения.

В случае неопределенности предел может быть равен нулю, конечному числу, бесконечности или не существовать. Для нахождения предела (раскрытие неопределенности) надо исследовать каждый случай отдельно.

**Пример 1.** Найти lim [(х2 – 4) / (x2+x – 2)].

х→ -2

**Решение:**

1) Подставим точку х = - 2 в нашу функцию, получим lim [(х2 – 4) / (x2+x – 2)] =

х→ -2

= (4 – 4) / (4 – 2 – 2) = (0/0).

2) Раскроем эту неопределенность, разложив числитель и знаменатель на простые множители, найдя корни числителя и знаменателя, тогда lim [(х2 – 4) / (x2+x – 2)] lim [(х – 2) \* (x+2)] / [(x-1)\*(x + 2)] = (-2 – 2)/(-2-1) = -4/ -3= 4/3/

х→ -2

х→ -2

**Пример 2.** lim [(х2 – 4) / (x2+x – 2)]

х→ 00

**Решение:**

lim [(х2 – 4) / (x2+x – 2)] = (00/00). Чтобы раскрыть эту неопределенность, вынесем за скобки из числителя и из знаменателя х в старшей степени, т.е. х2, получим: lim [(х2 – 4) / (x2+x – 2)] = lim [(х2 \*

х→ 00

х→ 00

х→ 00

(1 – 4/х2) / (x2(1+1/x – 2/x2)] = 1/1=1, т.к. lim 4/х2 = 4 / 00 = 0, . lim 1/х =

х→ 00

х→ 00

1/00=0 и . lim 2/х2 = 2/00

х→ 00

Для раскрытия неопределенностей используются не только различные приемы преобразования функций, как мы видели в примерах 1 и 2, но и так называемые замечательные пределы.

**Первый замечательный предел** .lim sinx/х = 1, он раскрывает неопределенность (0/0).

х→ 0

**Второй замечательный предел.** . lim (1+1/х)х = ℮, где ℮=2, 7, …

х→ 00

иррациональное «непперово» число. Это число часто берут за основание логарифма, тогда такой логарифм обозначается так: log℮x = lnx и называется натуральным логарифмом.

**Пример. 3** Найти lim (sin3x)/х = (0/0).

х→ 0

Решение: lim (3sin3x) / (3х) = 3 lim (sin3x) / (3х) = 3\*1 = 3

х→ 0

х→ 0

**Пример. 4** Найти lim (sin5x)/(sin2х) = (0/0).

х→ 0

Решение: lim (sin5x / sin2х) = lim [((sin5x / 5х)\*5x) / ((sin2x / 2x) \* 2x)]

х→ 0

х→ 0

= 5/2 \* [(lim (sin5x / 5х)) / lim (sin2x / 2х)] = 5/2

х→ 0

х→ 0

**Пример. 5** Найти lim (1+(1/2x))x = 100.

х→ 00

Решение: lim (1+(1/2x))2x \* (1/2) = ℮1/2=℮

х→ 0

**Пример. 6** Найти lim (1+(1/(x-1))x = 100.

х→ 00

Решение: lim [1+(1/(x-1))]x -1+1 = lim [(1+(1/(x-1)))x -1 \* (1+(1/(x-1)))1] = ℮\*1 = ℮

х→ 00

х→ 00

**Тема 11. Производная и дифференциал.**

Приращение аргумента, приращение функции.

Пусть функция у= f(х) определена в точке х0 и некоторой ее окрестности, придадим точке х0 приращение Δх и получим точку х0+Δх, значение функции в этой точке – f(х0+Δх). Разность значений f (х0+Δх) – f(х0) называется приращением функции, обозначается приращение функции Δf или Δу, т.е. Δf=f(х0+Δх) – f(х0). Рис. 1

0

у Рис.1

У = f(х)

Δу

Δх

х

х0 х0 + Δх

Производная функция у = f(х), в точке х0 определяется как предел отношения приращения функции Δу к приращению аргумента Δх, при стремлении Δх к нулю. f `(x0) = lim (Δf/Δx). Этот предел будет иметь конечное значение, если только и числитель стремиться к нулю (приращение функции Δf→0).

Производная имеет смысл скорости изменения какого – либо показателя. Дифференциал определяется как главная линейная часть приращения функции. Дифференциал показывает, как изменялась бы величина, если бы скорость ее изменения была бы постоянной. Дифференциал для функции у=f(х) обозначается через dy или df. Вычисляется он по формуле dy=f `(x)dx, где f ` (x) – производная функция f(x), а dx – число равное приращению независимой переменной (аргумента) ∆х.

Для вычисления производной выведены правила нахождения производной и таблицы производных элементарных функций. Функция, имеющая производную в точке х, называется дифференцируемой в этой точке. Если функция имеет производную в каждой точке интервала, то она называется дифференцируемой в интервале.

**Правила дифференцирования функций.**

Пусть U(х) и V(х) дифференцируемы в точке х.

1. (U(x) + V(x))` = U`(x) + V`(x)
2. (U(x) \* V(x))` = U`(x) \* V`(x) + V`(x) \* U`(x)
3. (C\*U(x))` = CU`(x), C - const
4. (U(x) / V(x))` = [U`(x) \* V(x) - V`(x) \* U(x)]/ V2(x)

**Таблица производных.**

1. C` = 0, C – const.
2. x` = 1
3. (xα)` = α xα – 1, α Є R
4. (ax)` = ax lnx, a>0 , a≠1
5. (ln x)` = 1/x
6. (sin x)` = cos x
7. (cos x)` = - sin x
8. (tg x)` = 1/(cos x)2
9. (ctg x)` = - 1/(sin x)2
10. (arcsin x)` = 1/2)
11. (arccos x)` = - 1/2)
12. (arctg x)` = 1/(1 + x2)
13. (arcctg x)` = - [1/(1 + x2)]

правила для нахождения дифференциала можно написать самим, умножив соответствующее правило взятия производной на dx.

Например: d sinx = (sinx)`dx = cosx dx.

Пример 1. Найти приращение функции f(x) = x2, если х = 1, ∆х = 0,1

Решение: f(х) = х2, f(х+∆х) = (х+∆х)2

Найдем приращение функции ∆f = f(x+∆x) – f(x) = (x+∆x)2 – x2 = x2+2x\*∆x+∆x2 – x2 = 2x\*∆x + ∆x2/

Подставим значения х=1 и ∆х= 0,1, получим ∆f = 2\*1\*0,1 + (0,1)2 = 0,2+0,01 = 0,21

Пример 2. Найти производную функции f(x) = x2, в произвольной точке х по определению производной, т.е. не используя таблицу производных.

Решение: (х2)` = lim ∆f / ∆х

∆x→0

Из первого примера ∆f = 2x\*∆x+∆x2, подставим, получим

(x2)` = lim ∆f / ∆х = lim (2x\*∆x+∆x2)/∆x = lim [∆x (2х + ∆х)]/ ∆x = 2x

∆x→0

∆x→0

∆x→0

Пример 3. у = 1-х, Найти ∆у при х=2, ∆ = 0,1

Решение: у(х) = 1-х, у(х+∆х) = 1 – (х+∆х),

∆у = у (х+∆х) – у(х) = 1-х - ∆х – (1 – х) = 1-х - ∆х – 1 + х = - ∆х

при х = 2, ∆х = 0,1 ∆у = -∆х = -0,1.

Пример 4. Найти производную от функции у=3х4 – 2х2 + 1.

Решение у` = 3\*4х3 – 2\*2х + 0 = 12х3 – 4х.

Пример 5. Найти производную от функции у = x2 \*℮х.

Решение: у` = (x2)` \*℮х + x2 \*(℮х)` = 2x ℮х + x2 \*℮х ln℮

ln ℮ = log℮℮ = 1. y` = 2x℮x + x2 \* ℮x

Пример 6. У = х/(х2+1). Найти у`.

Решение у` = [1\*(х2+1) – х\*2х] / (х2+1)2 = [х2+1 – 2х2] / (x2 +1)2 = (1-x2) / (x2+1)2

**Производные от сложных функций.**

Формула для нахождения производной от сложной функции такова:

[f (φ(х))]` = fφ`(φ(x)) \* φ`(x)

Например: у = (1-х2)3; у`= 3(1 –х2)2 \* (-2х) или у = sin2х; у` = 2sinx \* cosx.

Пример 7 . Найти dy, если у = sin 3х

Решение dy = у` \* dx = (sin3x)` dx = (cos3x) \* 3dx = 3 cos3x dx.

Пример 8. Найти dy, если у = 2х^2/

Решение: dy = y` \* dx = (2x^2)` \* dx = 2x^2 ln2 \* 2xdx

**Производные высших порядков.**

Пусть мы нашли от функции у = f(х) ее производную у` = f `(х). Производная от этой производной и называется производной второго порядка от функции f(х) и обозначается у`` или f `` (х) или (d2y) / (dx2). Аналогично определяются и обозначаются: производная третьего порядка у``` = f ```(x) = (d3y) / (dx3).

производная четвертого порядка уIV = f IV(x) = (d4y) / (dx4).

производная n-oго порядка у(n) = f (n)(x) = (d n y) / (dxn).

Пример: у = 5х4 – 3х3 + 2х – 2. Найти у``.

Решение. Находим в начале первую производную: у` = 20х3 – 9х2 +2, потом вторую от первой производной: у`` = 60х2 – 18х.

Пример. y=хsinx. Найти у```.

Решение. y` = sinx + xcosx

y`` = cosx + cosx – x sinx = 2cosx – x sinx

y``` = -2sinx – sinx – x cosx = -3sinx – x cosx.

**Тема 12. Понятие первообразной. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.**

**Определение.** Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на интервале Х, если в каждой точке этого интервала выполняется условие

F ` (x)=f(x).

Например, для функции f(x) = 2х первообразной является F(х) = х2 для любых х Є (-∞, ∞).

Действительно, F`(x) = 2x = f(x).

F1(x) = x2 + 2 так же является первообразной для f(x) = 2x, F2(x) = x2 – 100 первообразная той же функции f(x) = 2x.

**Теорема.** Если F1(x) и F2(x) первообразные для функции f(x) на некотором интервале Х, то найдется такое число С, что справедливо равенство:

F2(x) = F1(x) + C,

Или можно сказать так, две первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

**Определение.** Совокупность всех первообразных для функции f(x) на интервале Х называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается f(x)dx, где - знак интеграла, f(x) – подинтегральная функция, f(x)dx – подинтегральное выражение. Таким образом

f(x)dx = F(x) + C,

F(x) – некоторая первообразная для f(x), С – произвольная постоянная. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется интегрированием этой функции.

**Основные свойства неопределенного интеграла.**

1. ((f(x)dx)` = f(x). Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.
2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению. d(f(x)dx) = f(x)dx.
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

d(F(x)) = F(x) + C.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

, где к - число

1. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций

(f(x) +φ(x))dx = f(x)dx + φ(x)dx.

Для вычисления неопределенных интегралов от функций используют таблицу неопределенных интегралов, которая приводиться ниже.

**Таблица неопределенных интегралов.**

1. хα dx = [xα+1 / (α +1)] +C, α ≠ -1, α Є R
2. dx/x = ln│x│+C
3. ax = (ax/ln a)+C, exdx = ex+C
4. sinx dx = -cosx + C
5. cosx dx = sinx + C
6. dx/(cosx)2 = tgx + C
7. dx/(sinx)2 = -ctgx + C
8. dx /2-x2) = (arcsin x/a) + C
9. dx / 2 – x2) = (-arccos x/a) +C
10. dx / a2 +x2 = 1/a arctg x/a +C
11. dx / a2 +x2 = - 1/a arcctg x/a +C
12. dx / a2 -x2 = 1/2a ln │x+a/x-a│ +C
13. dx / a2 +x2) = ln │x+ 2+x2)│ +C.

**Пример 1.** Вычислить (2х2 -3 -1)dx.

Решение. Воспользуемся свойствами 4 и 5 неопределенных интегралов и первой табличной формулой. (2х2 -3 -1)dx = 2х2 dx - 3х1/2 dx - dx=

= 2(x2/2) – 3[(х3/2 \*2)/3] – x + C = x2 - 23 – x +C.

**Пример 2.** (2/ -1/х + 4sinx)dx = 2х –1/2dx – ln │х│ - 4cosx + C =

**=** 2[(x1/2 \*2)/1] – ln │x│ - 4 cosx +C = 4 -ln│x│- 4cosx + C.

Для вычисления неопределенных интегралов применяют следующие методы: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки(метод замены переменной), метод интегрирования по частям.

Существуют элементарные функции первообразные которых элементарными функциями не являются. По этой причине соответствующие неопределенные интегралы называются «неберущимися» в элементарных функциях, а сами функции не интегрируемыми в элементарных функциях.

Например, e –x^2 dx, sinх2 dx, cosх2 dx, sinx/x dx, cosx/x dx, dx/lnx – «неберущиеся» интегралы , т.е. не существует такой элементарной функции, что F `(x) = e –x^2, F ` (x) = sinx2 и т.д.

**Тема 13. Определенный интеграл, его свойства.**

**Формула Ньютона - Лейбница.**

**Понятие интегральной суммы.**

Пусть на отрезке [a, в] задана функция у = f(x). Разобьем отрезок на п элементарных отрезков точками деления а = х0, х1, х2, …, хп = в. На каждом элементарном отрезке [xi-1, xi] выберем произвольную точку Сi и положим

∆хi = xi – xi-1, где i = 1,2,…,п, в каждой точке Сi найдем значение функции f(Ci), составим произведения f(C1)∆x1, f(C2)∆x2, …, f(Ci)∆xi, …, f(Cn)∆xn, рассмотрим сумму этих произведений:

n

f(C1)∆x1 + f(C2)∆x2 + … + f(Ci)∆xi + … + f(Cn)∆xn = Σ f(Ci)∆xi.

I=1

Эту сумму будем называть интегральной суммой для функции у=f(x) на отрезке [а, в]. Интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка [a, в] на п частей так и от выбора точек С1, С2, …, Сп на каждом элементарном отрезке разбиения.

**Геометрический смысл интегральной суммы.**

Пусть у = f(x) неотрицательна на отрезке [а, в]. Рис.1

y = f(x)

у

S1 S2 S3

0 а=х0 в1 х1 с2  х2 с3 х3 =в х

Рис.1

Пусть п=3, тогда а = х0, х1, х2, х3=в.

С1 ,С2 ,С3 точки, выбранные произвольно на каждом элементарном отрезке.

S1 = f1(C1) ∆x1 – площадь прямоугольника, построенного на первом отрезке разбиения, ∆х1 = х1-х0,

S2 = f2(C2) ∆x2 – площадь прямоугольника, построенного на втором отрезке разбиения. ∆х2 = х2-х1,

S3 = f3(C3) ∆x3 – площадь прямоугольника, построенного на третьем отрезке разбиения. ∆х3 = х3-х2,

3

S = S1 + S2 +S3 = f1 (C1)∆x1 + f2 (C2)∆x2 + f3 (C3)∆x3 = Σ f(Ci)∆xi.

I=1

Это площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников.

**Понятие определенного интеграла.**

Обозначим длину наибольшего из отрезков разбиения через max ∆хi, где i=1,2,…п

n

**Определение**. Пусть предел интегральной суммы Σ f(Ci)∆xi при стремлении max ∆хi к нулю существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка

i=1

[a, в] на части и от выбора точек С1, С2, …, Сп. Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции у = f(х) на [а, в] и обозначается , т.е  = lim Σ f(Сi)∆xi при

i=1

n

max ∆xi →0

Число а называется нижним пределом, b – верхним пределом, f(x) – подинтегральной функцией, f(x)dx – подинтегральным выражением.

**Некоторые свойства определенного интеграла.**

10 . Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

 =  =  и т.д.

20.  есть число.

30.  = - , а<b

40. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

 = m , где m – const.

50. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов.



60. Если отрезок интегрирования разбит на части (a < c < b), то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов на каждой из частей.

 = ,

x

b

c

a

Существует еще ряд важных свойств определенного интеграла, которые подводят нас к формуле для вычисления определенного интеграла. Эта формула **называется формулой Ньютона – Лейбница** для f(x) непрерывной на[а; b].

 = F(b) – F(a), где F(x) некоторая первообразная для функции f(x).

Например,  - вычислить.

1. Находим первообразную для функции х2, т.е. неопределенный интеграл от х2, произвольную постоянную С приравняем к нулю.

1

 = x3/3 │ = 1/3 – 0/3 = 1/3

0

1. Подставим в первообразную х3/3 вначале значение верхнего предела, равного 1, затем значение нижнего предела, равного 0 вместо х.

π/2

**Пример 1.** Вычислить │= sin π/2 – sin π/6 = 1 – ½ = 1/2

2

π/6

**Пример 2.** Вычислить │ = 22 – 24/4 – [ (-1)2 – ((-1)4/4)] =

-1

**=** 4 – 4 –(1- (1/4)) = -3/4.

**Тема 14. Несобственные интегралы.**

Мы ввели понятие определенного интеграла от функции y = f(x) на отрезке [а; b], когда функция y = f(x) была интегрируема (и, следовательно, ограничена) на конечном отрезке [а; b]. Если отрезок интегрирования бесконечен, или функция не ограничена на отрезке интегрирования, то мы встречаемся с понятием несобственного интеграла.

**Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.**

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом . Такой интеграл есть некоторая функция от переменного верхнего предела, т.е.

= Ф(х), х ≥ а.

**Определение.**  – называется несобственным интегралом от функции f(x) на интервале [а;∞), вводится он как предел функции Ф(t) при t →∞, т.е.

.

t→∞

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

**Пример 1.** Вычислить 

∞

Решение  = lnx │ = lim lnx – ln2 = ∞ - ln2 = ∞. Интеграл расходится.

x→∞

2

**Пример 2.** Вычислить 

∞

Решение  =  = x –2/-2 │ = -1/(2x 2) │= -1/2 (lim 1/x2 – 1) = -1/2 (0-1) = 1/2

x→∞

∞

1

1

Интеграл сходится к ½.

По аналогии определяется несобственный интеграл на интервале (-∞, b].



b→ −∞

Определение сходимости  аналогично предыдущему.

Вводится понятие несобственного интеграла на интервале (-∞; ∞).

, а – некоторое число.

Интеграл  сходится, если оба интеграла  и  сходящиеся, если же один из них расходится, то  - расходится.

Пример 3. Вычислить  .

Решение. .

0

Рассмотрим  = ex │ = e0 – lim ex = e0 – 1/e∞ = 1-0 = 1.

x→ -∞

-∞

Интеграл сходящийся к 1.

∞

Рассмотрим  = ex │ =lim ex - e 0 = e∞ – 1 = ∞.

x→ -∞

0

Этот интеграл расходится, значит  - расходящийся несобственный интеграл.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл . этот интеграл называется интегралом Эйлера-Пуассона.

Доказано, что 2π).

**Несобственные интегралы от разрывных функций.**

Если y = f(x) непрерывна на [а; b), но lim f(x) = ∞, то вводится понятие несобственного интеграла от разрывной функции.

х→в-0

**Определение.** Если существует и конечен предел lim , где ε > 0, то он называется несобственным интегралом от функции y = f(x) на интервале [а; b) и обозначается , т.е.  = lim 

ε→0

ε→0

В этом случае несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла

= lim , если lim f(x) = ∞

х→а+0

ε→0

Пример 4. Вычислить  = 2х1/2 │ = 2( -lim) =2.

δ→0

Интеграл сходится к 2.

Тесты к теме 1.

1. На сколько периодов условно можно разделить развитие математики (по Колмогорову)?

1**: 2**

2**: 4**

3**: 1**

4**: 5**

1. К какому времени относится начало периода элементарной математики?

1-**: XV в**

2**: I век н.э.**

3: **VI-V век до н.э.**

4: **XII в.**

1. Что является предметом изучения науки “Математический анализ”?

1: функция

2: число

3: совокупность чисел

4: геометрические образы (точка, прямая, плоскость).

1. Перечислите основные черты математического мышления.

1: логические рассуждения, математическая интуиция;

2: доказательство;

3: математическая интуиция;

4: умение правильно считать.

1. Какие два вида умозаключений преобладают в математике?

1: моделирование, дедукция.

2: индукция, интуиция;

3: абстрагирование, интуиция;

4: индукция, дедукция;

1. Является ли математика искусством вычислять или наукой?

1: наука,

2: искусство вычислять.

**Тесты к тема 2**

**1.**Аксиома – составная часть дедуктивной системы. Это …?

1: Определение основных понятий данной науки.

2: Утверждение, требующее доказательства.

3: Утверждение, принимаемое без доказательств.

4: Некоторое логическое рассуждение.

**2**.Внутри дедуктивной системы не могут быть решены два вопроса. Какие из представленных?

1: Нужны ли доказательства аксиом? и Являются ли теоремы составной частью дедуктивного метода?

2: О смысле основных понятий. и Об истинности аксиом.

3:Можно ли определить в данной науке основные понятия? и Являюся ли доказательства составной частью дедуктивного метода?

**3**.Что представляет собой книга «Начала» Евклида?

1: Философское учение греческого философа и ученого Евклида.

2: Аксиоматическое построение геометрии.

3: Мифы Древней Греции.

4: Учение о параллельных прямых.

**4**Кто из математиков почти одновременно с Н.И. Лобачевским подошел к созданию неевклидовой геометрии?

1: Гаусс, Бойяй

2: Лагранж, Ферма

3: Пуассон, Эйлер

4: Коши, Буняковский

**5.**В каком году был построен Императорский Казанский Университет?

1; 1804

2: 1800

3: 1850

4: 1900.

**Тесты к теме 3.**

**1** Что представляет собой мнимая единица ?

1: корень кв. из -1,

2: –1

3: ( i )^2

4: (-1)^2

**2.** Найти корни квадратного уравнения х\*х-х+1=0

1: Х1=1/2; Х2=3/2

2: Корней нет

3: Х1,2=1/2+-3/2i

4: Х1=2, Х2=-1

**3.** Произвести действия: Если Z1=1-2i, Z2= -2+3i, Найти Z1+Z2.

1: Z=1-i

2: Z= -1+i

3: Z=2+3i

4: Z=1+2i

**4.** Произвести действия : Если Z1=1-2i, Z2= -2+3i, Найти Z1\*Z2.

1:Z= 4

2: Z=-8+3i

3: Z= -2+6i

4: Z=4-i

**5.** Найти Z”, если Z=2-i.

1: Z= -2-i

2: Z= -2+i

3: Z= 2+i

4: Z= 2

**6.** Представить число Z = -3 в виде комплексного числа. Указать его вещественную и мнимую части.

1: Z=3-3i, Re Z=3, Im Z= -3

2: Z=-3+iо, Re Z=-3, Im Z=0

3: Z=3i, Re Z=-0, Im Z=3

4: Z=3\*i\*i Re Z=0, Im Z=3

1. Найти корни квадратного уравнения х^2+4=0

1: Х=2

2: Корней нет

3: Х1,2=+-2i

4: Х= -2

1. Дано комплексное число Z= -3+2i. Найти координаты точки на плоскости хоу ему соответсвующие.

1; (-3;2)

2: (3,2)

3: (3, -2)

4: (-3,0)

1. Выделить вещественную и мнимую части числа Z=1-3i/5-i.

1: Z=1/5-3i

2: Z=4/13 – 7/13i

3: Z=1/26-3i

4: Z=1-i

**Тесты к теме 4.**

**1.**Даны точки М1(3,1); М2(2,3); М3(6,0); М4(-3,-1).

Определить какая из точек лежит на прямой 2х-3у-3=0

1: М1(3,1);

2: М2(2,3);

3: М3(6,0);

4: М4(-3,-1).

**2.**Дана прямая х-3у+2=0, точка М(1,у) лежит на этой прямой. Найти ордин ату этой точки.

1: у=-1,

2: у=0,

3: у=1,

4: у=5.

**3.**Дана прямая х-3у+2=0, точка Р(х,2) лежит на этой прямой. Найти абциссу этой точки.

1: х=0,

2: х=4,

3: х=1,

4: х= -4.

**4.**Даны точки А(-3,2) и В(1,6). Найти расстояние между ними АВ.

1: АВ=2.

2: АВ=4,

3: АВ=8,

4: АВ=4 \* корень кв. из 2,

**5.**Даны четыре пары, указать какие из них являются параллельными прямыми.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. 2х+3у-1=0   4х+6у+1=0 | 1. х+у+5=0   х-у-3=0 | 1. х+5=0   2х+5у=0 | 1. х-2у+3=0   2х-у-1=0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1: 2х+3у-1=0  4х+6у+1=0 |  |  |
| 2: х+у+5=0  х-у-3=0 |
| 3: х+5=0  2х+5у=0 |
| 4: х-2у+3=0  2х-у-1=0 |

**6.**Даны уравнения линий 1) у^2=х, 2)у=х^2+1, 3)х-у=0, 4)х^2 +у^2=1

Найти среди них уравнение прямой.

1: у^2=х,-

2: х - у=0,

3: у=х^2+1

4: х^2+у^2=1

**7.**Дано уравнение прямой у-2х+1=0. Записать это уравнение, как уравнение прямой с угловым коэффициентом. Найти отрезок в, отсекаемый прямой от оси ординат.

1: в= -1

2: в=1

3: в=1/2

4: в=0

**8.**Дана точка М(-1,2). Найти уравнение прямой проходящей через эту точку параллельно прямой 2х - у+3=0

1: х=2у

2: 2х - у=0;

3: х+у - 2=0;

4: 2х - у+4=0;

**9.**Среди заданных четырех прямых определить две перпендикулярные прямые.

1) х+у-5=0, 2)у=+х+2, 3)3х-3у+1=0, 4)2х=у

1: х+у-5=0, у=+х+2

2: х+у-5=0, 2х=у

3: у=х+2, у=2х

4: у=х+2, 3х-3у+1=0.

**10.**Дана прямая х+у-5=0. Найти точку А пересечения этой прямой с осью ох.

1: А(1,1);

2: А(-5,0);

3: А(5,0);

4: А(0,5)

**Тесты к теме 5.**

**1.**Написать уравнение окружности с центром в начале координат, радиусом равным 2.

1: х^2 + у^2 = 4

2: х^2 + у^2 = 2

3: (х – 2)^2 + (у – 2)^2 = 4

4: х^2 = 2

**2.**Х^2 + у^2 + 2х = 0. Дано уравнение окружности. Указать точку, лежащую на этой окружности: М1(0, 0), М2(1, 2), М3( - 1, 3); М4(0, 2).

1: М2(1, 2),

2: М1(0, 0),

3: М3( - 1, 3),

4: М4(0, 2),

**3.**Из четырех уравнений найти уравнение эллипса.

1) х/25 + у/16 = 1, 2) х^2/9 + у^2/4 = 1, 3) у^2 = 1 – х, 4) х^2 + у^2 = 9

1: нет уравнения эллипса

2: х/25 + у/16 = 1

3: х^2/9 + у^2/4 = 1

4: х^2 + у^2 = 9

**4.**Выделить уравнение гиперболы из четырех уравнений:

1) х/16 - у/9 = 1, 2) х^2 – у^2 = 1, 3) х^2 + у^2 = 1, 4) х^2 + 2у^2 = 1

1: х^2 + 2у^2 = 1

2: х/16 - у/9 = 1,

3: х^2 + у^2 = 1,

4: х^2 – у^2 = 1,

**5.**Написать уравнение эллипса, зная, что малая полуось в=3, расстояние между фокусами F1 F2= 8.

1: x^2/64+y^2/9=1

2: x^2/16+y^2/9=1

3: x^2/8+y^2/9=1

4: x^2/25+y^2/9=1

**6.**Написать уравнение эллипса, если большая полуось а=в, эксцентриситет Е=0,5.

1: x^2/6+y^2/2=1

2: x^2/6+y^2/9=1

3: x^2/36+y^2/27=1

4: x^2+y^2=1

**7.**х^2/18 – y^2/4,5=1 Дано уравнение гиперболы. Написать уравнение асимптот.

1: y=+-х

2: у=+-1/2х;

3: y=+-1/18 х

4: y=1/3х

**8.**На параболе у^2=6х найти точку с абциссой равной 6

1: М(0,6)

2: М(6,6)

3: М(6,0)

4: М1(6,6) и М2(6,-6)

**9.** Дана парабола у^2=6х. Найти координаты фокуса F.

1: F(3/2;0)

2: F(3,0)

3: F(0,6)

4: F (0,3)

**10.**Написать уравнение гиперболы, если а=9, в=4.

1: x/81 - y/4=1

2: x^2/9+y^2/4=1

3: x^2/81 - y^2/16=1

4: x^2 - y^2=9

**Тесты к теме 6.**

**1**. Вычислить определитель !2 3!

!4 5!

1: -2,

2: 22,

3: 2,

4: 7,

**2**. Вычислить определитель !2 3!

!4 5!

1:-5,

2: 10,

3: 1,

4: 0,

**3**. Справедливо ли равенство !2 8 10! !1 4 5!

!1 3 -1! =2 !1 3 –1! ?

!2 0 !1 !2 0 1!

1: Нет,

2: Да,

**4**. Дан определитель !1 5 3! Найти минор М21 к элементу а21 = 6.

!6 1 0!

!3 0 –1!.

1: М21= 0,

2: М21= -2,

3: М21= 1,

4: М21= 4,

**5.**Дан определитель !1 5 3! Найти алгеброическое дополнение А21 к

!6 1 0! элементу а21 = 6.

!3 0 –1!.

1: А21= 2,

2: А21= -2,

3: А21= 1,

4: А21= 4,

**6**. Если элементы второй строки определителя умножить на соответствующие алгебраические дополнения и произведения сложить, то получим:

1: отрицательное число,

2: ноль,

3: любое число,

4: величину определителя,

**7**. Дана система уравнений х+у=3

2х-3у=1.

Имеет ли эта система единственное решение?

1: Да,

2: Нет.

**8**. Дана система уравнений х - у=1

4х-4у=4

1: система не имеет решения,

2: система имеет единственное решение,

3: система неопределенная,

**9**. Дана система 2х-3у+5z=1

х+у-z =2

3х-у-2z=3

Указать свободные члены:

1:(5, -1, -2);

2: (2, 1, 3);

3: (-3, 1, -1);

4: (1, 2, 3);

**10**. Может ли определитель иметь три строки и два столбца?

1: Да.

2: Нет,

**Тесты к теме 7.**

**1**. Выберите правильное утверждение:

1) Матрица может иметь любое число строк и столбцов.

2) Матрица всегда имеет одинаковое число строк и столбцов.

3) Матрица не может состоять из одной строки.

4) Матрица не может состоять из одного столбца.

Ответ: 1)

Ответ: 2)

Ответ: 3)

Ответ: 4)

**2**. Может ли матрица состоять из одного элемента?

1: Да,

2: Нет,

3: Да, если это элемент не равен нулю.

**3**. Умножить матрицу А=(1, -1, 3, ½) на число (-2):

1: -7

2: (1, -1, 3, -1)

3: (-2, -1, 3, ½)

4: (-2, 2, -6, -1)

**4**. Можно ли сложить матрицы 2\*2 и 3\*3?

1: Нет

2: Да.

**5**. Можно ли перемножить матрицы соразмерности 2\*3 и 3\*4?

1: Нет.

2: Да.

**6**. Транспонирование матриц – это:

1) Перестановка местами двух столбцов.

2) изменение знака у всех элементов,

3) Перестановка местами двух строк,

4) перестановка местами строк и столбцов,

Ответ: 1)

Ответ: 2)

Ответ: 3)

Ответ: 4)

**7**. Если размерность исходной матрицы равна 6\*7, то транспонированная матрица будет иметь размерность:

1: 6\*6

2: 6\*7

3: 7\*6

4: 7\*7

**8**. Единичная матрица – это:

1: Матрица, у которой все элементы равны 1.

2: Матрица, у которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные нули

3: Матрица, определитель которой равен 1.

4: Матрица, содержащая только один элемент.

**9**. Если А=(1,3, -2), В= (-1)

(0 )

(2 ) , то А\*В равно

1: -5

2: (-1 0 –4)

3: (-1)( 0 )(-4)

4: Перемножить нельзя

**Тесты к теме 8.**

**1**. N – множество натуральных чисел. Какое из множеств является его подмножеством: А= {2, 4, 6, 8…}, В= (N2, N3, N4,…}; С= {1, 1/2, 1/3, 1/4, …};

Д= {1, 0, 1}?

1: В,

2: А,

3: С,

4: Д,

**2**. Найти пересечение множеств А= {1, 3, 5, 7, 9} и В= {2, 4, 6, 8}.

Ответ: пустое множество,

1: {1}

2: {1,2,3,4,5,6,7,8}

3: {0}

**3**. Найти объединение множеств А и В, если А = {1,3,5,7,9}; B = {2,4,6,8}.

1: AUB = {0}

2: AUB = 0

3: АUB = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

4: AUB = {2,4,6,8}

**4**. Найти разность множеств А \ В, если А = {1,2,3,4}; B = {0,1,2}.

1: А\B = {3, 4}

2: A\B = {0,3,4}

3: A\B = {0,1,2}

4: A\B = {1,2,3}

**5**. Если /х/<2, то в виде двух неравенств его можно записать так:

1: -2<x<2

2: -2<=x<=2

3: 0<x<2

4: -2<x<0.

**6**. Если /х-1/<E, то E – окрестность точки 1 можно записать так:

1: -Е<x<Е

2: 1-Е<x<1+Е

3: 0<x<1+Е

4: -Е<x<0.

**7**. Если х принадлежит [-1, 3]. Какое из значений может принять х?

1: x<-1

2: -x= -3

3: x=0

4: x=4.

**8**. Если х не принадлежит (-2, 2). Какое из значений может принять х?

1: x= -1.

2: -x= 0

3: x=2

4: x= -4

**9**. Если –2<х<=0, то решением является:

1: (-2, 0)

2: (-2, 0]

3: (-2, 2)

4: [-2, 0].

**10**. Найти пересечение множеств (-2, 2) и (-3, 1):

1: (-3, 2)

2: [0, 1]

3: (-2, 1)

4: [-2, 0].

**Тесты к теме 9.** «Функция. Классификация функций».

**1**. Найти область определения функции у = (х-2) / (х^2 – 9)

1: (0, 2)

2: (-00, -9) U (9, 00).-

3: (2, 3).

4: (-00, -3) U (-3,3) U (3,00).

**2** Найти область определения функции у = (х-1)^1/2

1: (-00, 00).

2: (0, 00).

3: [1, 00).

4: x = 0

**3**. Найти область определения функции у = lg(2+х)

1: (-2, 00).

2: [2, 00).

3: (-00, 00).

4: x = 0

**4**. Найти значения функции у = х^2/ (х-1) в точке х = 0.

1: у = -1.

2: у = 0.

3: у = 00.

4: у = 2

**5**. Найти значения функции у = х^2/(х-1) в точке х = 1.

1: у = -1.

2: у = 1.

3: не существует.

4: у = 2

**6**. Найти значения функции у = х^2/(х-1) в точке х = (а^2) +1.

1: у = не существует.

2: у = ([а^2]+1)/а^2.

3: у = -1.

4: у = [(а^2 + 1)^2]/а^2.

**7**. Дана функция у = (sinх)^2 +5. К какому классу функций она принадлежит?

1: Трансцендентная.

2: алгебраическая.

**8**. Написать целую алгебраическую функцию второй степени, в общем виде.

1: у = х^2.

2: у = [(А0)\*х^2] + (А1)\*х + А2.

3: у = [(А0)х^2]+1.

4: у = (х^2)/(х+1)

**9**. Указать дробно-рациональную функцию из заданных функций:

1) у=2\*х/(1+х+х^2); 2) у=х/(sinх); 3) у=(2)^х/2; 4) у= lg(х+2)/(х-2)

Ответ: 1).

Ответ: 2).

Ответ: 3).

Ответ: 4).

**10**. Дана сложная функция у = [sin (1-х)]^2. Представить ее в виде цепочки простых функций.

1: U = sin x, V = U-1, y = (U-1)^2.

2: U = sin(1-x), y = U^2.

3: U = 1-х, V = sinU, y = V^2.

4 y = [sin(1-x)]^2 – простая функция

**Тесты к теме 10.**

**1**. Найти: lim [2/(x-1)];

х→ 00

1: 2

2: 0

3: не существует.

4: 1

**2**. Найти: lim [2/(x+2)];

х→ 1

1: не существует.

2: 0

3: 2/3

4: 1/2

**3**. Найти: lim [(х2+5х+6)/(x2-9)];

х→ -3

1: 0

2: 5/6

3: 1/2

4: 1/6

**4**. Найти: lim [(1+х2) / (x3+2х2+х-1)];

х→ 00

1: 1

2: 0

3: -1

4: 00

**5**. Найти: lim [х / sin x];

х→ 0

1: 1

2: 0

3: не существует.

4: 00

**6**. Найти: lim [sin5x / x];

х→ 0

1: не существует.

2: 0

3: 00

4: 5

**7**. Найти: lim [1+(1/(x+2))]х;

х→ 00

1: 00

2: 1

3: е

4: не существует

**8**. Найти: lim [1+(1/x)]2х;

х→ 00

1: е2

2: е

3: 1

4: 00

**9**. Является ли функция у=х2 непрерывной в точке х=2

1: Нет

2: Да

**10**. Является ли функция у=1/(2х+1) непрерывной в точке х=1

1: Да

2: Нет

**Тесты к теме 11.**

**1**. Найти приращение функции у=1/х, если х=1, ∆х=0,1.

1: - 1/11,

2: 0,1,

3: 0,01,

4: - 1,

**2**. Пользуясь определением производной, найти производную от функции у=х^3.

1: 3х^2∆х,

2: х^2,

3: 3х^2 - 1,

4: 3х^2,

**3**. Найти производную от функции у=хe^x , в точке х=0.

1: e+e^-1,

2: e^1,

3: 1,

4: 0,

**4**. Найти производную от функции у=х^5 – ¼x^4 + 3, в точке х.

1: 5x^4 – x^3 + 3,

2: 5х^4 – x^3,

3: 5x^4 – x^4 + 1,

4: 3,

**5**. Найти производную от функции у=sinx/cosx

1: sinx - cosx,

2:-cosx/sinx,

3: 1/cosx^2,

4: 1,

**6**. Найти дифференциал функции у=х^3 – 1.

1: 3(dx)^2,

2: 3x^2,

3: 3dx,

4: 3х^2dx,

**7**. Дана функция у=3х^2 – х + 1. Найти у``

1: 6x,

2: 6,

3: 1,

4: 6x^2,

**8**. Найти у```, если у=х^6 – 1/4х^4+1/2x^2+2.

1: 120х^3 – 2x,

2: 120x^3,

3: 120x^3 – 2x +2,

4: 120,

**9**. Найти у```, если у=(х^2)\*e^x.

1: 2e^х + 4xe^x +(x^2)\*e^x,

2: 2xe^x+(x^2)\*e^x,

3: 2xe^x + e^x,

4: 2e^x,

**Тесты к теме 12.**

**1**. Найти первообразную для функции у = х.

1: х – 2

2: 2х,

3: 2х^2,

4: (х^2)/2.

**2**. Даны функции F1 (x) = sinx – 8, F2 = sinx +3. Первообразными для какой функции они являются ?

1: х,

2: cosx,

3: -cosx,

4: -х.

**3**. Найти производную от функции $ln(x^2 +1)dx.

1: 2х/ [(x^2) +1],

2: ln[(х^2)+1].

3: ln((х^2)+1)dx,

4: 1/((x^2)+1)

**4**. Найти дифференциал от функции $x arcsin2x dx.

1: x arcsin2x dx.

2: arcsin2х,

3: arcsin2x dx,

4: [arcsin2x +2x/ (1-4(x^2))^1/2]dx.

**5**. Вычислить $d(2^x^2)

1: (2^х^2) (ln2)2x,

2: (2^х^2)+C.

3: (2^х^2)dx,

**6**. Вычислить интеграл $(x^2 -3)dx.

1: [(x^3)/3x] – 3x,

2: [(х^3)/3] – 3х +С.

3: (3х^3)+C,

4: [(x^2)-3]+C

**7**. Справедлива ли формула $U(x) V(x)dx = $U(x)dx\*$V(x)dx?

1: Нет

2: Да.

**8**. Можно ли вынести постоянный множитель за знак интеграла ?

1: Да.

2: Нет

**9**. Указать какие из интегралов является «неберущимися» $sin(x^2) dx, $lnx/x dx, $[1+ (x^1/3)] dx.

1: sin(x^2) dx.

2: $ lnx/x dх,

3: $[1+x^1/3]dx.

**10**. Указать какие из интегралов является «неберущимися» $(e)^-x^2 dx,

$xe^x^2, $x^2 e^-x^2 dx, $xe^-x^2 dx.

1 .$xe^-x^2 dx,

2: $ xe^x^2 dх,

3: $e^-x^2 dx

4: $[(x^2) (e^-x^2)] dx.

**Тесты к теме 13.**

**1**. Вычислить интеграл в пределах (1, 00) от функции dx/(x^2).

1: 1,

2: расходится,

3: 0,

4: -1,

**2**. Вычислить интеграл в пределах (0, 00) от функции e^-x dx.

1: расходится,

2: 1,

3: 0,

4: -1,

**3**. Вычислить интеграл в пределах (-00, 00) от функции e^-2x dx.

1: -1,

2: 0,

3: 1,

4: расходится,

**4**. Вычислить интеграл в пределах (0, 1) от функции dx/x.

1: 2,

2: сходится

3: расходится,

4: 0,

**Тесты к теме 14.**

**1**. Зависит ли интегральная сумма для функции у=f(x) на отрезке [а, в] от способа разбиения отрезка на 10 частей ?

1: Да,

2: Нет,

**2**.Зависит ли интегральная сумма для функции у=f(х) на отрезке [а, в]от выбора точек Сi на i элементарном отрезке, i = 1,2,…,п?.

1: Нет,

2: Да,

**3**. Можно ли записать интеграл в пределах (0, 2) от функции (sinx^2 – 3x^1/2)dx = $ в пределах от (0, 2) от функции sinx^2 dx + 3$ в пределах (0, 2) от функции х^1/2 dx ?

1: Да,

2: Нет,

**4**. Можно ли записать интеграл в пределах (0, 2) от функции f(x)dx = интегралу в пределах (0, 1) от функции f(x)dx + интеграл в пределах (1, 2) от функции f(x)dx.

1: Нет,

2: Да,

**5**. Вычислить интеграл в пределах (4, 3) от функции (x^1/2)dx.

1: 2/3,

2: 19,

3: 38/3,

4: 1,

**6**. Вычислить интеграл в пределах (0,П/2) от функции (sinx)dx.

1: 1/2,

2: -1,

3: 0,

4: 1,

**7**. Вычислить интеграл в пределах (1, 3) от функции dx/х^2.

1: -1/3,

2: 2/3,

3: 1,

4: 0,

**8**. Найти значение интегральной суммы для f(x) = 1 на отрезке [a, в].

1: в-а,

2: ав,

3: 1/в-а,

4: 2,

**9**. Верно ли равенство интеграл в пределах (0, 2) от f(x)dx.= - интеграл в пределах (2, 0) от f(x)dx ?

1: Нет.

2: Да,

.