Содержание

Введение 2

Глава I. Общетеоретические аспекты изучения алгебраического материала в начальной школе 7

1.1 Опыт введения элементов алгебры в начальной школе 7

1.2 Психологические основы введения алгебраических понятий

в начальной школе 12

1.3 Проблема происхождения алгебраических понятий и ее значение

для построения учебного предмета 20

Глава II. Методические рекомендации к изучению алгебраического материала в начальной школе 33

2.1 Обучение в начальной школе с точки зрения потребностей

средней школы 33

2.1 Сравнение (противопоставление) понятий на уроках математики 38

2.3 Совместное изучение сложения и вычитания, умножения и деления 48

Глава III. Практика изучения алгебраического материала на уроках математики в начальных классах средней школы № 4 г. Рыльска 55

3.1 Обоснование использования инновационных технологий (технологии

укрупнения дидактических единиц) 55

3.2 Об опыте ознакомления с алгебраическими понятиями в I классе 61

3.3 Обучение решению задач, связанных с движением тел 72

Заключение 76

Библиографический список 79

# Введение

В любой современной системе общего образования математика занимает одно из центральных мест, что несомненно говорит об уникальности этой области знаний.

Что представляет собой современная математика? Зачем она нужна? Эти и подобные им вопросы часто задают учителям дети. И каждый раз ответ будет разным в зависимости от уровня развития ребенка и его образовательных потребностей.

Часто говорят, что математика - это язык современной науки. Однако, представляется, что это высказывание имеет существенный дефект. Язык математики распространен так широко и так часто оказывается эффективным именно потому что математика к нему не сводится.

Выдающийся отечественный математик А.Н. Колмогоров писал: "Математика не просто один из языков. Математика - это язык плюс рассуждения, это как бы язык и логика вместе. Математика - орудие для размышления. В ней сконцентрированы результаты точного мышления многих людей. При помощи математики можно связать одно рассуждение с другим. … Очевидные сложности природы с ее странными законами и правилами, каждое из которых допускает отдельное очень подробное объяснение, на самом деле тесно связаны. Однако, если вы не желаете пользоваться математикой, то в этом огромном многообразии фактов вы не увидите, что логика позволяет переходить от одного к другому " ([12], с. 44).

Таким образом, математика позволяет сформировать определенные формы мышления, необходимые для изучения окружающего нас мира.

В настоящее время все более ощутимой становится диспропорция между степенью наших познаний природы и пониманием человека, его психики, процессов мышления. У. У. Сойер в книге "Прелюдия к математике" ([20], с. 7) отмечает: "Можно научить учеников решать достаточно много типов задач, но подлинное удовлетворение придет лишь тогда, когда мы сумеем передать нашим воспитанникам не просто знания, а гибкость ума", которая дала бы им возможность в дальнейшем не только самостоятельно решать, но и ставить перед собой новые задачи.

Конечно, здесь существуют определенные границы, о которых нельзя забывать: многое определяется врожденными способностями, талантом. Однако, можно отметить целый набор факторов, зависящих от образования и воспитания. Это делает чрезвычайно важной правильную оценку огромных неиспользованных еще возможностей образования в целом и математического образования в частности.

В последние годы наметилась устойчивая тенденция проникновения математических методов в такие науки как история, филология, не говоря уже о лингвистике и психологии. Поэтому круг лиц, которые в своей последующей профессиональной деятельности возможно будут применять математику, расширяется.

Наша система образования устроена так, что для многих школа дает единственную в жизни возможность приобщиться к математической культуре, овладеть ценностями, заключенными в математике.

Каково же влияние математики вообще и школьной математики в частности на воспитание творческой личности? Обучение на уроках математики искусству решать задачи доставляет нам исключительно благоприятную возможность для формирования у учащихся определенного склада ума. Необходимость исследовательской деятельности развивает интерес к закономерностям, учит видеть красоту и гармонию человеческой мысли. Все это является на наш взгляд важнейшим элементом общей культуры. Важное влияние оказывает курс математики на формирование различных форм мышления: логического, пространственно-геометрического, алгоритмического. Любой творческий процесс начинается с формулировки гипотезы. Математика при соответствующей организации обучения, будучи хорошей школой построения и проверки гипотез, учит сравнивать различные гипотезы, находить оптимальный вариант, ставить новые задачи, искать пути их решения. Помимо всего прочего, она вырабатывает еще и привычку к методичной работе, без которой не мыслим ни один творческий процесс. Максимально раскрывая возможности человеческого мышления, математика является его высшим достижением. Она помогает человеку в осознании самого себя и формировании своего характера.

Это то немногое из большого списка причин, в силу которых математические знания должны стать неотъемлемой частью общей культуры и обязательным элементом в воспитании и обучении ребенка.

Курс математики (без геометрии) в нашей 10-летней школе фактически разбит на три основные части: на арифметику (I - V классы), алгебру (VI - VIII классы) и элементы анализа (IX - Х классы). Что служит основанием для такого подразделения?

Конечно, каждая эта часть имеет свою особую "технологию". Так, в арифметике она связана, например, с вычислениями, производимыми над многозначными числами, в алгебре - с тождественными преобразованиями, логарифмированием, в анализе - с дифференцированием и т.д. Но каковы более глубокие основания, связанные с понятийным содержанием каждой части?

Следующий вопрос касается оснований для различения школьной арифметики и алгебры (т.е. первой и второй части курса). В арифметику включают изучение натуральных чисел (целых положительных) и дробей (простых и десятичных). Однако специальный анализ показывает, что соединение этих видов чисел в одном школьном учебном предмете неправомерно.

Дело в том, что эти числа имеют разные функции: первые связаны со *счетом* предметов, вторые - с *измерением величин*. Это обстоятельство весьма важно для понимания того факта, что дробные (рациональные) числа являются лишь частным случаем действительных чисел.

С точки зрения измерения величин, как отмечал А.Н. Колмогоров, "нет столь глубокого различия между рациональными и иррациональными действительными числами. Из педагогических соображений надолго задерживаются на рациональных числах, так как их легко записать в форме дробей; однако то употребление, которое им с самого начала придается, должно было бы сразу привести к действительным числам во всей их общности" ([12]), стр. 9).

А.Н. Колмогоров считал оправданным как с точки зрения истории развития математики, так и по существу предложение А. Лебега переходить в обучении после натуральных чисел сразу к происхождению и логической природе действительных чисел. При этом, как отмечал А.Н. Колмогоров, "подход к построению рациональных и действительных чисел с точки зрения измерения величин нисколько не менее научен, чем, например, введение рациональных чисел в виде "пар". Для школы же он имеет несомненное преимущество" ([12], стр. 10).

Таким образом, есть реальная возможность на базе натуральных (целых) чисел сразу формировать "самое общее понятие числа" (по терминологии А. Лебега), понятие действительного числа. Но со стороны построения программы это означает не более не менее, как ликвидацию арифметики дробей в ее школьной интерпретации. Переход от целых чисел к действительным - это переход от арифметики к "алгебре", к созданию фундамента для анализа.

Эти идеи, высказанные более 20 лет назад, актуальны и сегодня. Возможно ли изменение структуры обучения математики в начальной школе в данном направлении? Каковы достоинства и недостатки «алгебраизации» начального обучения математики? Цель данной работы - попытаться дать ответы на поставленные вопросы.

Реализация поставленной цели требует решения следующих задач:

* рассмотрение общетеоретических аспектов введения в начальной школе алгебраических понятий величины и числа. Эта задача ставится в первой главе работы;
* изучение конкретной методики обучения этим понятиям в начальной школе. Здесь, в частности, предполагается рассмотреть так называемую теорию укрупнения дидактических единиц (УДЕ), речь о которой пойдет ниже;
* показать практическую применимость рассматриваемых положений на школьных уроках математики в начальной школе (уроки проводились автором в средней школе № 4 г. Рыльска). Этому посвящена третья глава работы.

Применительно к библиографии, посвященной данному вопросу, можно отметить следующее. Несмотря на то, что в последнее время общее количество изданной методической литературы по математике крайне незначительно, дефицит информации при написании работы не наблюдался. Действительно, с 1960 (время постановки проблемы) по 1990 гг. в нашей стране вышло огромное число учебной, научной и методической литературы, в той или иной степени затрагивающий проблему введения алгебраических понятий в курсе математики для начальной школы. Кроме того, эти вопросы регулярно освещаются и в специализированной периодике. Так, при написании работы в значительной мере использовались публикации в журналах «Педагогика», «Преподавание математики в школе» и «Начальная школа».

# Глава I. Общетеоретические аспекты изучения алгебраического материала в начальной школе

## 1.1 Опыт введения элементов алгебры в начальной школе

Содержание учебного предмета, как известно, зависит от многих факторов - от требований жизни к знаниям учащихся, от уровня соответствующих наук, от психических и физических возрастных возможностей детей и т.д. Правильный учет этих факторов является существенным условием наиболее эффективного обучения школьников, расширения их познавательных возможностей. Но иногда это условие по тем или иным причинам не соблюдается. В этом случае преподавание не дает должного эффекта как в отношении усвоения детьми круга необходимых знаний, так и в отношении развития их интеллекта.

Представляется, что в настоящее время программы преподавания некоторых учебных предметов, в частности математики, не соответствуют новым требованиям жизни, уровню развития современных наук (например, математики) и новым данным возрастной психологии и логики. Это обстоятельство диктует необходимость всесторонней теоретической и экспериментальной проверки возможных проектов нового содержания учебных предметов.

Фундамент математических знаний закладывается в начальной школе. Но, к сожалению, как сами математики, так и методисты и психологи уделяют весьма малое внимание именно содержанию начальной математики. Достаточно сказать, что программа по математике в начальной школе (I - IV классы) в основных своих чертах сложилась еще 50 - 60 лет назад и отражает, естественно, систему математических, методических и психологических представлений того времени.

Рассмотрим характерные особенности государственного стандарта по математике в начальной школе. Основным ее содержанием являются целые числа и действия над ними, изучаемые в определенной последовательности. Вначале изучаются четыре действия в пределе 10 и 20, затем - устные вычисления в пределе 100, устные и письменные вычисления в пределе 1000 и, наконец, в пределе миллионов и миллиардов. В IV классе изучаются некоторые зависимости между данными и результатами арифметических действий, а также простейшие дроби. Наряду с этим программа предполагает изучение метрических мер и мер времени, овладение умением пользоваться ими для измерения, знание некоторых элементов наглядной геометрии - вычерчивание прямоугольника и квадрата, измерение отрезков, площадей прямоугольника и квадрата, вычисление объемов.

Полученные знания и навыки ученики должны применять к решению задач и к выполнению простейших расчетов. На протяжении всего курса решение задач проводится параллельно изучению чисел и действий - для этого отводится половина соответствующего времени. Решение задач помогает учащимся понять конкретный смысл действий, уяснить различные случаи их применения, установить зависимость между величинами, получить элементарные навыки анализа и синтеза. С I по IV класс дети решают следующие основные типы задач (простых и составных): на нахождение суммы и остатка, произведения и частного, на увеличение и уменьшение данных чисел, на разностное и кратное сравнение, на простое тройное правило, на пропорциональное деление, на нахождение неизвестного по двум разностям, на вычисление среднего арифметического и некоторые другие виды задач.

С разными типами зависимостей величин дети сталкиваются при решении задач. Но весьма характерно - учащиеся приступают к задачам после и по мере изучения чисел; главное, что требуется при решении - это найти числовой ответ. Дети с большим трудом выявляют свойства количественных отношений в конкретных, частных ситуациях, которые принято считать арифметическими задачами. Практика показывает, что манипулирование числами часто заменяет действительный анализ условий задачи с точки зрения зависимостей реальных величин. Задачи, вводимые в учебники, не представляют к тому же системы, в которой более "сложные" ситуации были бы связаны и с более "глубокими" пластами количественных отношений. Задачи одной и той же трудности можно встретить и в начале, и в конце учебника. Они меняются от раздела к разделу и от класса к классу по запутанности сюжета (возрастает число действий), по рангу чисел (от десяти до миллиарда), по сложности физических зависимостей (от задач на распределение до задач на движение) и по другим параметрам. Только один параметр - углубление в систему собственно математических закономерностей - в них проявляется слабо, неотчетливо. Поэтому очень сложно установить критерий математической трудности той или иной задачи. Почему задачи на нахождение неизвестного по двум разностям и на выяснение среднего арифметического (III класс) труднее задач на разностное и кратное сравнение (II класс)? Методика не дает на этот вопрос убедительного и логичного ответа.

Таким образом, учащиеся начальных классов не получают адекватных, полноценных знаний о зависимостях величин и общих свойствах количества ни при изучении элементов теории чисел, ибо они в школьном курсе связаны по преимуществу с техникой вычислений, ни при решении задач, ибо последние не обладают соответствующей формой и не имеют требуемой системы. Попытки методистов усовершенствовать приемы преподавания хотя и приводят к частным успехам, однако не меняют общего положения дела, так как они заранее ограничены рамками принятого содержания.

Представляется, что в основе критического анализа принятой программы по арифметике должны лежать следующие положения:

* понятие числа не тождественно понятию о количественной характеристике объектов;
* число не является исходной формой выражения количественных отношений.

Приведем обоснование этих положений.

Общеизвестно, что современная математика (в частности, алгебра) изучает такие моменты количественных отношений, которые не имеют числовой оболочки. Также хорошо известно, что некоторые количественные отношения вполне выразимы без чисел и до чисел, например, в отрезках, объемах и т.д. (отношение "больше", "меньше", "равно"). Изложение исходных общематематических понятий в современных руководствах осуществляется в такой символике, которая не предполагает обязательного выражения объектов числами. Так, в книге Е.Г. Гонина "Теоретическая арифметика" основные математические объекты с самого начала обозначаются буквами и особыми знаками ([4], стр. 12 – 15). Характерно, что те или иные виды чисел и числовые зависимости приводятся лишь как примеры, иллюстрации свойств множеств, а не как их единственно возможная и единственно существующая форма выражения. Далее, примечательно, что многие иллюстрации отдельных математических определений даются в графической форме, через соотношение отрезков, площадей ([4], стр. 14-19). Все основные свойства множеств и величин можно вывести и обосновать без привлечения числовых систем; более того, последние сами получают обоснование на основе общематематических понятий.

В свою очередь многочисленные наблюдения психологов и педагогов показывают, что количественные представления возникают у детей задолго до появления у них знаний о числах и приемах оперирования ими. Правда, есть тенденция относить эти представления к категории "доматематических образований" (что вполне естественно для традиционных методик, отождествляющих количественную характеристику объекта с числом), однако это не меняет существенной их функции в общей ориентировке ребенка в свойствах вещей. И порой случается, что глубина этих якобы "доматематических образований" более существенна для развития собственно математического мышления ребенка, чем знание тонкостей вычислительной техники и умение находить чисто числовые зависимости. Примечательно, что акад. А.Н. Колмогоров, характеризуя особенности математического творчества, специально отмечает следующее обстоятельство: "В основе большинства математических открытий лежит какая-либо простая идея: наглядное геометрическое построение, новое элементарное неравенство и т.п. Нужно только применить надлежащим образом эту простую идею к решению задачи, которая с первого взгляда кажется недоступной" ([12], стр. 17).

В настоящее время целесообразны самые различные идеи относительно структуры и способов построения новой программы. К работе по ее конструированию необходимо привлечь математиков, психологов, логиков, методистов. Но во всех своих конкретных вариантах она, как представляется, должна удовлетворять следующим основным требованиям:

* преодолевать существующий разрыв между содержанием математики в начальной и средней школе;
* давать систему знаний об основных закономерностях количественных отношений объективного мира; при этом свойства чисел, как особой формы выражения количества, должны стать специальным, но не основным разделом программы;
* прививать детям приемы математического мышления, а не только навыки вычислений: это предполагает построение такой системы задач, в основе которой лежит углубление в сферу зависимостей реальных величин (связь математики с физикой, химией, биологией и другими науками, изучающими конкретные величины);
* решительно упрощать всю технику вычисления, сводя до минимума ту работу, которую нельзя выполнить без соответствующих таблиц, справочников и других подсобных (в частности, электронных) средств.

Смысл этих требований ясен: в начальной школе вполне возможно преподавать математику как науку о закономерностях количественных отношений, о зависимостях величин; техника вычислений и элементы теории чисел должны стать особым и частным разделом программы.

Опыт конструирования новой программы по математике и ее экспериментальная проверка, проводимая начиная с конца 1960-х годов, позволяют уже в настоящее время говорить о возможности введения в школу начиная с I класса систематического курса математики, дающего знания о количественных отношениях и зависимостях величин в алгебраической форме.

## 1.2 Психологические основы введения алгебраических понятий в начальной школе

В последнее время при модернизации программ особое значение придают подведению теоретико-множественного фундамента под школьный курс (эта тенденция отчетливо проявляется и у нас, и за рубежом). Реализация этой тенденции в преподавании (особенно в начальных классах, как это наблюдается, например, в американской школе [19]) неизбежно поставит ряд трудных вопросов перед детской и педагогической психологией и перед дидактикой, ибо сейчас почти нет исследований, раскрывающих особенности усвоения ребенком смысла понятия множества (в отличие от усвоения счета и числа, которое исследовалось весьма многосторонне).

Логические и психологические исследования последних лет (в особенности работы Ж. Пиаже) вскрыли связь некоторых "механизмов" детского мышления с общематематическими понятиями. Ниже специально рассматривается особенности этой связи и их значение для построения математики как учебного предмета (при этом речь пойдет о теоретической стороне дела, а не о каком-либо частном варианте программы).

Натуральное число является фундаментальным понятием математики на всем протяжении ее истории; весьма существенную роль оно играет во всех областях производства, техники, повседневной жизни. Это позволяет математикам-теоретикам отводить ему особое место среди других понятий математики. В разной форме высказываются положения о том, что понятие натурального числа - исходная ступень математической абстракции, что оно является основой для построения большинства математических дисциплин.

Выбор начальных элементов математики как учебного предмета по существу реализует эти общие положения. При этом предполагается, что, знакомясь с числом, ребенок одновременно раскрывает для себя исходные особенности количественных отношений. Счет и число - основа всего последующего усвоения математики в школе.

Однако есть основания полагать, что эти положения, справедливо выделяя особое и фундаментальное значение числа, вместе с тем неадекватно выражают его связь с другими математическими понятиями, неточно оценивают место и роль числа в процессе усвоения математики. Из-за этого обстоятельства, в частности проистекают некоторые существенные недостатки принятых программ, методик и учебников по математике. Необходимо специально рассмотреть действительную связь понятия о числе с другими понятиями.

Многие общематематические понятия, и в частности понятия соотношения эквивалентности и порядка, систематически рассматриваются в математике независимо от числовой формы. Эти понятия не теряют своего независимого характера на их основе можно описывать и изучать частный предмет - разные числовые системы, понятия о которых сами по себе не покрывают смысла и значения исходных определений. Причем в истории математической науки общие понятия развивались именно в той мере, в какой "алгебраические операции", известный пример которых доставляют четыре действия арифметики, стали применяться к элементам совершенно не "числового" характера.

В последнее время делаются попытки развернуть в преподавании этап введения ребенка в математику. Эта тенденция находит свое выражение в методических руководствах, а также в некоторых экспериментальных учебниках. Так, в одном американском учебнике, предназначенном для обучения детей 6 - 7 лет ([19]) , на первых страницах вводятся задания и упражнения, специально тренирующие детей в установлении *тождественности* предметных групп. Детям показывается прием *соединения* множеств, - при этом вводится соответствующая математическая символика. Работа с числами опирается на элементарные сведения о множествах.

Можно по-разному оценивать содержание конкретных попыток реализации этой тенденции, но сама она, на наш взгляд, вполне правомерна и перспективна.

На первый взгляд понятия "отношение", "структура", "законы композиции" и др., имеющие сложные математические определения, не могут быть связаны с формированием математических представлений у маленьких детей. Конечно, весь подлинный и отвлеченный смысл этих понятий и их место в аксиоматическом построении математики как науки есть объект усвоения уже хорошо развитой и "натренированной" в математике головы. Однако некоторые свойства вещей, фиксируемые этими понятиями, так или иначе проступают для ребенка уже сравнительно рано: на это имеются конкретные психологические данные.

Прежде всего следует иметь в виду, что от момента рождения до 7 - 10 лет у ребенка возникают и формируются сложнейшие системы общих представлений об окружающем мире и закладывается фундамент содержательно-предметного мышления. Причем на сравнительно узком эмпирическом материале дети выделяют общие схемы ориентации в пространственно-временных и причинно-следственных зависимостях вещей. Эти схемы служат своеобразным каркасом той "системы координат", внутри которой ребенок начинает все глубже овладевать разными свойствами многообразного мира. Конечно, эти общие схемы мало осознаны и в малой степени могут быть выражены самим ребенком в форме отвлеченного суждения. Они, говоря образно, являются интуитивной формой организации поведения ребенка (хотя, конечно, все более и более отображаются и в суждениях).

В последние десятилетия особенно интенсивно вопросы формирования интеллекта детей и возникновения у них общих представлений о действительности, времени и пространстве изучались известным швейцарским психологом Ж. Пиаже и его сотрудниками. Некоторые его работы имеют прямое отношение к проблемам развития математического мышления ребенка, и поэтому нам важно рассмотреть их применительно к вопросам конструирования учебной программы.

В одной из своих последних книг ([17]) Ж. Пиаже приводит экспериментальные данные о генезисе и формировании у детей (до 12 - 14 лет) таких элементарных логических структур, как *классификация и сериация*. Классификация предполагает выполнение операции включения (например, А + А' = В) и операции, ей обратной (В - А' = А). Сериация - это упорядочение предметов в систематические ряды (так, палочки разной длины можно расположить в ряд, каждый член которого больше всех предыдущих и меньше всех последующих).

Анализируя становление классификации, Ж.Пиаже показывают, как от ее исходной формы, от создания "фигурной совокупности", основанной лишь на пространственной близости объектов, дети переходят к классификации, основанной уже на отношении сходства ("нефигурные совокупности"), а затем к самой сложной форме - к включению классов, обусловленному связью между объемом и содержанием понятия. Автор специально рассматривает вопрос о формировании классификации не только по одному, но и по двум-трем признакам, о формировании у детей умения изменять основание классификации при добавлении новых элементов. Аналогичные стадии авторы находят и в процессе становления сериации.

Эти исследования преследовали вполне определенную цель - выявить закономерности формирования операторных структур ума и прежде всего такого их конституирующего свойства как *обратимость*, т.е. способности ума двигаться в прямом и обратном направлении. Обратимость имеет место тогда, когда "операции и действия могут развертываться в двух направлениях, и понимание одного из этих направлений вызывает ipso facto [в силу самого факта] понимание другого" ([17], стр. 15).

Обратимость, согласно Ж. Пиаже, представляет фундаментальный **закон композиции**, свойственный уму. Она имеет две взаимодополняющие и несводимые формы: *обращение (инверсия или отрицание) и взаимность.* Обращение имеет место, например, в том случае, когда пространственное перемещение предмета из А в В можно аннулировать, переводя обратно предмет из В в А, что в итоге эквивалентно нулевому преобразованию (произведение операции на обратную есть тождественная операция, или нулевое преобразование).

Взаимность (или компенсация) предполагает тот случай, когда, например, при перемещении предмета из А в В предмет так и остается в В, но ребенок сам перемещается из А в В и воспроизводит начальное положение, когда предмет находился против его тела. Движение предмета здесь не аннулировано, но оно компенсировалось путем cоответствующего перемешения собственного тела - и это уже другая форма преобразования, нежели обращение ([17], стр. 16).

В своих работах Ж. Пиаже показал, что эти преобразования возникают вначале в форме сенсо-моторных схем (с 10 - 12 мес.). Постепенная координация чувственно-двигательных схем, функциональная символика и языковое отображение приводят к тому, что через ряд этапов обращение и взаимность становятся свойствами интеллектуальных действий (операций) и синтезируются в единой операторной структуре (в период с 7 до 11 и с 12 до 15 лет). Теперь ребенок может координировать все перемещения в одно по двум системам отсчета сразу - одна мобильная, другая неподвижная.

Ж. Пиаже считает, что психологическое исследование развития арифметических и геометрических операций в сознании ребенка (особенно тех логических операций, которые осуществляют в них предварительные условия) позволяет точно соотнести операторные структуры мышления со структурами алгебраическими, структурами порядка и топологическими ([17], стр. 13). Так, алгебраическая структура ("группа") соответствует операторным механизмам ума, подчиняющимся одной из форм обратимости - инверсии (отрицанию). Группа имеет четыре элементарных свойства: произведение двух элементов группы также дает элемент группы; прямой операции соответствует одна и только одна обратная; существует операция тождества; последовательные композиции ассоциативны. На языке интеллектуальных действий это означает:

* координация двух систем действия составляет новую схему, присоединяемую к предыдущим;
* операция может развиваться в двух направлениях;
* при возвращении к исходной точке мы находим ее неизменной;
* к одной и той же точке можно прийти разными путями, причем сама точка остается неизменной.

Факты "самостоятельного" развития ребенка (т.е. развития, независимого от прямого влияния школьного обучения) показывают несоответствие порядка этапов геометрии и этапов формирования геометрических понятий у ребенка. Последние приближаются к порядку преемственности основных групп, где топология является первой. У ребенка, по данным Ж. Пиаже, вначале складывается интуиция топологическая, а затем он ориентируется в направлении проективных и метрических структур. Поэтому, в частности, как отмечает Ж. Пиаже, при первых попытках рисования ребенок не различает квадратов, окружностей, треугольников и других метрических фигур, но прекрасно различает фигуры открытые и закрытые, положение "вне" или "внутри" по отношению к границе, разделение и соседство (не различая до поры до времени расстояния) и т.д. ([17], стр. 23).

Рассмотрим основные положения, сформулированные Ж. Пиаже, применительно к вопросам построения учебной программы. Прежде всего, исследования Ж. Пиаже показывают, что в период дошкольного и школьного детства у ребенка формируются такие операторные структуры мышления, которые позволяют ему оценивать фундаментальные характеристики классов объектов и их отношений. Причем уже на стадии конкретных операций (с 7 - 8 лет) интеллект ребенка приобретает свойство обратимости, что исключительно важно для понимания теоретического содержания учебных предметов, в частности математики.

Эти данные говорят о том, что традиционная психология и педагогика не учитывали в достаточной мере сложного и емкого характера тех стадий умственного развития ребенка, которые связаны с периодом от 2 до 7 и от 7 до 11 лет.

Рассмотрение результатов, полученных Ж. Пиаже, позволяет сделать ряд существенных выводов применительно к конструированию учебной программы по математике. Прежде всего фактические данные о формировании интеллекта ребенка с 2 до 11 лет говорят о том, что ему в это время не только не "чужды" свойства объектов, описываемые посредством математических понятий "отношение - структура" но последние сами органически входят в мышление ребенка.

Традиционные программы не учитывают этого обстоятельства. Поэтому они не реализуют многих возможностей, таящихся в процессе интеллектуального развития ребенка.

Материалы, имеющиеся в современной детской психологии, позволяют положительно оценивать общую идею построения такого учебного предмета, в основе которого лежали бы понятия об исходных математических структурах. Конечно, на этом пути возникают большие трудности, так как еще нет опыта построения такого учебного предмета. В частности, одна из них связана с определением возрастного "порога", с которого осуществимо обучение по новой программе. Если следовать логике Ж. Пиаже, то, видимо, по этим программам можно учить лишь тогда, когда у детей уже полностью сформировались операторные структуры (с 14 - 15 лет). Но если предположить, что реальное математическое мышление ребенка формируется как раз внутри того процесса, который обозначается Ж. Пиаже как процесс складывания операторных структур, то эти программы можно вводить гораздо раньше (например, с 7 - 8 лет), когда у детей начинают формироваться конкретные операции с высшим уровнем обратимости. В "естественных" условиях, при обучении по традиционным программам формальные операции, возможно, только и складываются к 13 - 15 годам. Но нельзя ли "ускорить" их формирование путем более раннего введения такого учебного материала, усвоение которого требует прямого анализа математических структур?

Представляется, что такие возможности есть. К 7 - 8 годам у детей уже в достаточной мере развит план мыслительных действий, и путем обучения по соответствующей программе, в которой свойства математических структур даны "явно" и детям даются средства их анализа, можно быстрее подвести детей к уровню "формальных" операций, чем в те сроки, в которые это осуществляется при "самостоятельном" открытии этих свойств.

При этом важно учитывать следующее обстоятельство. Есть основания полагать, что особенности мышления на уровне конкретных операций, приуроченном Ж. Пиаже к 7 - 11 годам, сами неразрывно связаны с формами организации обучения, свойственными традиционной начальной школе. Это обучение (и у нас, и за рубежом) ведется на основе предельно *эмпирического* содержания, зачастую вообще не связанного с понятийным (теоретическим) отношением к объекту. Такое обучение поддерживает и закрепляет у детей мышление, опирающееся на внешние, прямым восприятием уловимые признаки вещей.

Таким образом, в настоящее время имеются фактические данные, показывающие тесную связь структур детского мышления и общеалгебраических структур, хотя "механизм" этой связи далеко не ясен и почти не исследован. Наличие этой связи открывает принципиальные возможности (пока лишь возможности!) для построения учебного предмета, развертывающегося по схеме "от простых структур - к их сложным сочетаниям". Одним из условий реализации этих возможностей является изучение перехода к опосредствованному мышлению и его возрастных нормативов. Указанный способ построения математики как учебного предмета сам может быть мощным рычагом формирования у детей такого мышления, которое опирается на достаточно прочный *понятийный* фундамент.

## 1.3 Проблема происхождения алгебраических понятий и ее значение для построения учебного предмета

Разделение школьного курса математики на алгебру и арифметику, конечно же, условно. Переход от одного к другому происходит постепенно. В школьной практике смысл этого перехода маскируется тем, что изучение дробей фактически происходит без развернутой опоры на измерение величин - дроби даются как отношения пар чисел (хотя формально важность измерения величин в методических руководствах признается). Развернутое введение дробных чисел на основе измерения величин неизбежно приводит к понятию действительного числа. Но последнего как раз обычно и не происходит, так как учащихся долго держат на работе с рациональными числами, а тем самым задерживают их переход к "алгебре".

Иными словами, школьная алгебра начинается именно тогда, когда создаются условия для перехода от целых к действительным числам, к выражению *результата измерения* дробью (простой и десятичной - конечной, а затем бесконечной).

Причем исходным может быть знакомство с *операцией измерения*, получение *конечных десятичных дробей* и изучение *действий* над ними. Если учащиеся уже владеют такой формой записи результата измерения, то это служит предпосылкой для "забрасывания" идеи о том, что число может выражаться и *бесконечной* дробью. И эту предпосылку целесообразно создавать уже в пределах начальной школы.

Если понятие дробного (рационального) числа изъять из компетенции школьной арифметики, то граница между нею и "алгеброй" пройдет по линии различия между целым и действительным числами. Именно оно "рубит" курс математики на две части. Здесь не простое различие, а принципиальный "дуализм" источников - *счета и измерения.*

Следуя идеям Лебега относительно "общего понятия числа", можно обеспечить полное единство преподавания математики, но лишь с момента и после ознакомления детей со счетом и целым (натуральным) числом. Конечно, сроки этого предварительного ознакомления могут быть разными (в традиционных программах для начальной школы они явно затянуты), в курс начальной арифметики можно даже вносить элементы практических измерений (что имеет место в программе), - однако все это не снимает различия оснований у арифметики и "алгебры" как учебных предметов. "Дуализм" исходных пунктов препятствует и тому, чтобы в курсе арифметики по-настоящему "приживались" разделы, связанные с измерением величин и переходом к подлинным дробям. Авторы программ и методисты стремятся сохранить устойчивость и "чистоту" арифметики как школьного учебного предмета. Указанное *различие источников* является основной причиной преподавания математики по схеме - сначала арифметика (целое число), затем "алгебра" (действительное число).

Эта схема кажется вполне естественной и незыблемой, к тому же она оправдывается многолетней практикой преподавания математики. Но есть обстоятельства, которые с логико-психологической точки зрения требуют более тщательного анализа правомерности этой жесткой схемы преподавания.

Дело в том, что при всем различии этих видов чисел они относятся именно к *числам*, т.е. к *особой форме* отображения количественных отношений. Принадлежность целого и действительного чисел к "числам" служит основанием для предположения о генетической производности и самих различий счета и измерения: у них есть особый и единый источник, соответствующий самой *форме* числа. Знание особенностей этой *единой основы* счета и измерения позволит более четко представить условия их происхождения, с одной стороны, и взаимосвязь - с другой.

К чему же обратиться, чтобы нащупать общий корень ветвистого дерева чисел? Представляется, что прежде всего необходимо проанализировать содержание понятия *величина*. Правда, с этим термином сразу связывается другой - *измерение*. Однако правомерность подобного соединения не исключает определенной самостоятельности смысла "величины". Рассмотрение этого аспекта позволяет сделать выводы, сближающие, с одной стороны, измерение со счетом, с другой - оперирование числами с некоторыми *общематематическими* отношениями и закономерностями.

Итак, что такое "величина" и какой интерес она представляет для построения начальных разделов школьной математики?

В общем употреблении термин "величина" связан с понятиями "равно", "больше", "меньше", которые описывают самые различные качества (длину и плотность, температуру и белизну). В.Ф. Каган ставит вопрос о том, какими общими свойствами эти понятия обладают. Он показывает, что они относятся к совокупностям - множествам однородных предметов, сопоставление элементов которых позволяет применить термины "больше", "равно", "меньше" (например, к совокупностям всех прямолинейных отрезков, весов, скоростей и т.д.).

Множество предметов только тогда претворяется в *величину*, когда устанавливаются *критерии*, позволяющие установить относительно любых его элементов А и В, будет ли А равно В, больше В или меньше В. При этом для любых двух элементов А и В имеет место одно и только одно из соотношений: А=В, А>В, А<В.

Эти предложения составляют *полную дизъюнкцию* (по крайней мере одно имеет место, но каждое исключает все остальные).

В.Ф. Каган выделяет следующие восемь основных свойств понятий "равно", "больше", "меньше": ([10], c. 17-31).

1) Имеет место по крайней мере одно из соотношений: А=В, А>В, А<В.

2) Если имеет место соотношение А=В, то не имеет места соотношение А<В.

3) Если имеет место соотношение А=В, то не имеет места соотношение А>В.

4) Если А=В и В=С, то А=С.

5) Если А>В и В>С, то А>С.

6) Если А<В и В<С, то А<С.

7) Равенство есть отношение *обратимое*: из соотношения А=В всегда следует соотношение В=А.

8) Равенство есть соотношение *возвратное*: каков бы ни был элемент А рассматриваемого множества, А=А.

Первые три предложения характеризуют *дизъюнкцию* основных соотношений "=", ">", "<". Предложения 4 - 6 - их *транзитивность* при любых трех элементах А, В и С. Следующие предложения 7 - 8 характеризуют только равенство - его *обратимость и возвратность* (или *рефлексивность*). Эти восемь основных положений В.Ф.Каган называет *поcтулатами сравнения*, на базе которых можно вывести ряд других свойств величины.

Эти выводные свойства В.Ф. Каган описывает в форме восьми теорем:

I. Соотношение А>В исключает соотношение В>А (А<В исключает В<А).

II. Если А>В, то В<А (если А<В, то В>А).

III. Если имеет место А>В, то не имеет места A<B.

IV. Если А1=А2, А2=А3,.., Аn-1=А1, то А1=Аn.

V. Если А1>А2, А2>А3,.., Аn-1>Аn, то А1>Аn.

VI. Если А1<А2, А2<А3,.., Аn-1<Аn, то А1<Аn.

VII. Если А=С и В=С, то А=В.

VIII. Если имеет место равенство или неравенство А=В, или А>В, или А<В, то оно не нарушится, когда мы один из его элементов заменим равным ему элементом (здесь имеет место соотношение типа:

если А=В и А=С, то С=В;

если А>В и А=С, то С>В и т.д.).

Постулатами сравнения и теоремами, указывает В.Ф. Каган, "исчерпываются все те свойства понятий "равно", "больше" и "меньше", которые в математике с ними связываются и находят себе применение независимо от индивидуальных свойств того множества, к элементам коего мы их в различных частных случаях применяем" ([10], стр. 31).

Свойства, указанные в постулатах и теоремах, могут характеризовать не только те непосредственные особенности объектов, которые мы привыкли связывать с "равно", "больше", "меньше", но и со многими другими особенностями (например, они могут характеризовать отношение "предок - потомок"). Это позволяет встать при их описании на общую точку зрения и рассматривать, например, под углом зрения этих постулатов и теорем любые три вида отношений "альфа", "бета", "гамма" (при этом можно установить, удовлетворяют ли эти отношения постулатам и теоремам и при каких условиях).

Под таким углом зрения можно, например, рассматривать такое свойство вещей, как *твердость (тверже, мягче, одинаковая твердость),* последовательность событий *во времени (следование, предшествование, одновременность)* и т.д. Во всех этих случаях соотношения "альфа", "бета", "гамма" получают свою конкретную интерпретацию. Задача, связанная с подбором такого множества тел, которое бы имело эти отношения, а также выявление признаков, по которым можно было бы характеризовать "альфа", "бета", "гамма", - это есть задача на определение критериев сравнения в данном множестве тел (практически ее в ряде случаев решить нелегко). *"Устанавливая критерии сравнения, мы претворяем множество в величину",* - писал В.Ф. Каган ([10], стр. 41).

Реальные объекты могут рассматриваться под углом зрения разных критериев. Так, группа людей может рассматриваться по такому критерию, как последовательность моментов рождения каждого ее члена. Другой критерий - относительное положение, которое примут головы этих людей, если их поставить рядом на одной горизонтальной плоскости. В каждом случае группа будет претворяться в величину, имеющую соответствующее наименование - *возраст, рост*. В практике величиной обычно обозначают как бы не самое множество элементов, а новое понятие, введенное для различения критериев сравнения (наименование величины). Так возникают понятия "объем", "вес", "электрическое напряжение" и т.д. "При этом *для математика величина вполне определена, когда указаны множество элементов и критерии сравнения*", - отмечал В.Ф. Каган ([10], стр. 47).

В качестве важнейшего примера математической величины этот автор рассматривает натуральный ряд чисел. С точки зрения такого критерия сравнения, как положение, занимаемое числами в ряду (*занимают одно место, следует за..., предшествует),* этот ряд удовлетворяет постулатам и поэтому представляет собой *величину*. По соответствующим критериям сравнения совокупность дробей также претворяется в величину.

Таково, по В.Ф. Кагану, содержание теории величины, играющей важнейшую роль в деле обоснования всей математики.

Работая с величинами (отдельные их значения целесообразно фиксировать *буквами*), можно производить сложную систему преобразований, устанавливая зависимости их свойств, переходя от равенства к неравенству, выполняя сложение (и вычитание), причем при сложении можно руководствоваться коммутативным и ассоциативным свойствами. Так, если дано соотношение А=В, то при "решении" задач можно руководствоваться соотношением В=А. В другом случае при наличии соотношений А>В, В=С можно заключить, что А>С. Поскольку при а>b существует такое с, что а=b+с, то можно найти разность а и b (а-b=с), и т.д. Все эти преобразования можно выполнить на *физических* телах и других объектах, установив критерии сравнения и соответствие выделенных отношений постулатам сравнения.

Приведенные выше материалы позволяют заключить, что и натуральные, и действительные числа одинаково прочно *связаны* с величинами и некоторыми их существенными особенностями. Нельзя ли эти и другие свойства сделать предметом специального изучения ребенка *еще до того*, как вводится числовая форма описания отношения величин? Они могут послужить предпосылками для последующего развернутого введения числа и его разных видов, в частности для пропедевтики дробей, понятий координат, функции и других понятий уже в младших классах.

# Что может быть содержанием этого начального раздела? Это знакомство с физическими объектами, критериями их сравнения, выделяющими величину, как предмет математического рассмотрения, знакомство со способами сравнения и знаковыми средствами фиксации его результатов, с приемами анализа общих свойств величин. Это содержание нужно развернуть в относительно подробную программу преподавания и, главное, связать ее с теми действиями ребенка, посредством которых он может этим содержанием овладеть (конечно, в соответствующей форме). Вместе с тем нужно экспериментальным, опытным путем установить, могут ли дети 7 лет усвоить эту программу, и какова целесообразность ее введения для последующего преподавания математики в начальных классах в направлении сближения арифметики и начальной алгебры.

До сих пор наши рассуждения носили теоретический характер и были направлены на выяснение математических предпосылок построения такого начального раздела курса, который знакомил бы детей с основными алгебраическими понятиями (до специального введения числа).

Выше были описаны основные свойства, характеризующие величины. Естественно, что детям 7 лет бессмысленно читать "лекции" относительно этих свойств. Необходимо было найти такую форму работы детей с дидактическим материалом, посредством которой они смогли бы, с одной стороны, выявить в окружающих их вещах эти свойства, с другой - научились бы фиксировать их определенной символикой и проводить элементарный математический анализ выделяемых отношений.

В этом плане программа должна содержать, во-первых, указание тех свойств предмета, которые подлежат освоению, во-вторых, описание дидактических материалов, в-третьих, - и это с психологической точки зрения главное - характеристики тех действий, посредством которых ребенок выделяет определенные свойства предмета и осваивает их. Эти "составляющие" образуют программу преподавания в собственном смысле этого слова.

Конкретные особенности этой гипотетической программы и ее "составляющих" имеет смысл излагать при описании процесса самого обучения и его результатов. Здесь представляется схема данной программы и ее узловые темы.

*Тема I. Уравнивание и комплектование объектов (по длине, объему, весу, составу частей и другим параметрам).*

Практические задачи на уравнивание и комплектование. Выделение признаков (критериев), по которым одни и те же объекты могут быть уравнены или укомплектованы. Словесное обозначение этих признаков ("по длине", по весу" и т.д.).

Эти задачи решаются в процессе работы с дидактическим материалом (планками, грузами и т.д.) путем:

- *выбора* "такого же" предмета,

- *воспроизведения* (построения) "такого же" предмета по выделенному (указанному) параметру.

*Тема II. Сравнение объектов и фиксация его результатов формулой равенства-неравенства.*

1. Задачи на сравнение объектов и знаковое обозначение результатов этого действия.

2. Словесная фиксация результатов сравнения (термины "больше", "меньше", "равно"). Письменные знаки ">", "<", "=".

3. Обозначение результата сравнения рисунком ("копирующим", а затем "отвлеченным" - *линиями*).

4. Обозначение сравниваемых объектов *буквами*. Запись результата сравнения формулами: А=Б; А<Б, А>B.

Буква как *знак*, фиксирующий непосредственно данное, частное значение объекта по выделенному параметру (по весу, по объему и т.д.).

5. Невозможность фиксации результата сравнения разными формулами. Выбор определенной формулы для данного результата (полная дизъюнкция отношений *больше - меньше - равно).*

*Тема III. Свойства равенства и неравенства.*

1. *Обратимость и рефлексивность* равенства (если А=Б, то Б=А; А=А).

2. *Связь отношений* "больше" и "меньше" в неравенствах при "перестановках" сравниваемых сторон (если А>Б, то Б<А и т.п.).

3. *Транзитивность* как свойство равенства и неравенства:

если А=Б, если А>Б, если А<Б,

а Б=В, а Б>В, а Б<В,

то А=В; тo A>B; тo А<В.

4. Переход от работы с предметным дидактическим материалом к оценкам свойств равенства-неравенства при наличии только *буквенных формул.* Решение разнообразных задач, требующих знания этих свойств (например, решение задач, связанных со связью отношений типа: *дано, что* А>В, а В=С; *узнать отношение между* А и С).

*Тема IV. Операция сложения (вычитания).*

1. Наблюдения за *изменениями* объектов по тому или иному параметру (по объему, по весу, по длительности и т.д.). Изображение увеличения и уменьшения знаками "+" и "-" (*плюс и минус*).

2. Нарушение ранее установленного равенства при соответствующем изменении той или иной его стороны. Переход от равенства к неравенству. Запись формул типа:

если А=Б, если А=Б,

то А+К>Б; то А-К<Б.

3. Способы перехода к новому равенству (его "восстановление" по принципу: прибавление "равного" к "равным" дает "равное").

Работа с формулами типа:

*если* А=Б,

*то* А+К>Б,

*но* А+К=Б+К.

4. Решение разнообразных задач, требующих применения операции сложения (вычитания) при переходе от равенства к неравенству и обратно.

*Тема V. Переход от неравенства типа А<Б к равенству через операцию сложения (вычитания).*

1. Задачи, требующие такого перехода. Необходимость определения значения величины, на которую разнятся сравниваемые объекты. Возможность записи равенства при неизвестном конкретном значении этой величины. Способ использования х (икса).

Запись формул типа:

*если* A<Б, *если* А>Б,

*то* A+х=Б; *то* А-x=B.

2. Определение значения х. Подстановка этого значения в формулу (знакомство со скобками). Формулы типа

А<Б,

А+х=Б,

х=Б-А,

А+(Б-А)=Б.

3. Решение задач (в том числе и "сюжетно-текстовых"), требующих выполнения указанных операций.

*Тема Vl. Сложение-вычитание равенств-неравенств. Подстановка.*

1. Сложение-вычитание равенств-неравенств:

если А=Б если А>В если А>В

и М=D, и К>Е, и Б=Г,

тo A+M=Б+D; то А+К>В+E; то А+-Б>В+-Г.

2. Возможность представления значения величины *суммой* нескольких значений. Подстановка типа:

А=Б,

Б=Е+К+М,

А=E+К+М.

3. Решение разнообразных задач, требующих учета свойств отношений, с которыми дети познакомились в процессе работы (многие задачи требуют одновременного учета нескольких свойств, сообразительности при оценке смысла формул; описание задач и решения приведены ниже).

Такова программа, рассчитанная на 3,5 - 4 мес. первого полугодия. Как показывает опыт экспериментального обучения, при правильном планировании уроков, при усовершенствовании методики преподавания и удачном выборе дидактических пособий весь изложенный в программе материал может быть полноценно усвоен детьми за более короткий срок (за 3 месяца).

Как строится наша программа дальше? Прежде всего дети знакомятся со способом получения *числа*, выражающим отношение какого-либо объекта как целого (той же величины, представленной непрерывным или дискретным объектом) к его части. Само это отношение и его конкретное значение изображается формулой А/К=n, где n - любое целое число, чаще всего выражающее отношение с точностью до "единицы" (лишь при специальном подборе материала или при сосчитывании лишь "качественно" отдельных вещей можно получить абсолютно точное целое число). Дети с самого начала "вынуждены" иметь в виду, что при измерении или сосчитывании может получиться остаток, наличие которого нужно специально оговаривать. Это первая ступенька к последующей работе с *дробным* числом.

При такой форме получения числа нетрудно подвести детей к описанию объекта формулой типа А=5k (если отношение было равно "5"). Вместе с первой формулой она открывает возможности для специального изучения *зависимостей* между объектом, основанием (мерой) и результатом счета (измерения), что также служит пропедевтикой для перехода к дробным числам (в частности, для понимания основного свойства дроби).

Другая линия развертывания программы, реализуемая уже в I классе, - это перенесение на числа (целые) основных свойств величины (дизъюнкции равенства-неравенства, транзитивности, обратимости) и операции сложения (коммутативности, ассоциативности, монотонности, возможности вычитания). В частности, работая на *числовом луче*, дети могут быстро претворить последовательность чисел в *величину* (например, отчетливо оценивать их транзитивность, выполняя записи типа 3<5<8, одновременно связывая отношения "меньше-больше": 5<8, но 5<3, и т.д.).

Знакомство с некоторыми так сказать "структурными" особенностями равенства позволяет детям иначе подойти к связи сложения и вычитания. Так, при переходе от неравенства к равенству выполняются следующие преобразования: 7<11; 7+х=11; x=11-7; х=4. В другом случае дети складывают и вычитают элементы равенств и неравенств, выполняя при этом работу, связанную с устными вычислениями. Например, *дано* 8+1=6+3 и 4>2; *найти* отношение между левой и правой частями формулы при 8+1-4...6+3-2; в случае неравенства привести это выражение к *равенству* (вначале нужно поставить знак "меньше", а затем приплюсовать к левой части "двойку").

Таким образом, обращение с числовым рядом как с величиной позволяет по новому формировать сами навыки сложения-вычитания (а затем умножения-деления).

## Глава II. Методические рекомендации к изучению алгебраического материала в начальной школе

## 2.1 Обучение в начальной школе с точки зрения потребностей средней школы

Как известно, при изучении математики в 5-м классе существенная часть времени отводится на повторение того, что дети должны были усвоить в начальной школе. Это повторение практически во всех существующих учебниках занимает 1,5 учебной четверти. Такая ситуация сложилась неслучайно. Ее причина – недовольство учителей математики средней школы подготовкой выпускников начальной школы. В чем же причина такого положения? Для этого была проанализированы пять наиболее известных сегодня учебников математики начальной школы. Это учебники М.И. Моро, И.И. Аргинской, Н.Б. Истоминой, Л.Г. Петерсон и В.В. Давыдова ([2], [5], [9], [14], [16]).

Анализ этих учебников выявил несколько негативных моментов, в большей или меньшей степени присутствующих в каждом из них и отрицательно влияющих на дальнейшее обучение. Прежде всего это то, что усвоение материала в них в большей мере основано на заучивании. Ярким примером этого служит заучивание таблицы умножения. В начальной школе ее запоминанию уделяется много сил и времени. Но за время летних каникул дети ее забывают. Причина такого быстрого забывания в механическом заучивании. Исследования Л.С. Выготского показали, что осмысленное запоминание гораздо более эффективно, чем механическое, а проведенные впоследствии эксперименты убедительно доказывают, что материал попадает в долговременную память, только если он запомнен в результате работы, соответствующей этому материалу.

Способ эффективного усвоения таблицы умножения был найден еще в 50-х годах. Он состоит в организации определенной системы упражнений, выполняя которые, дети сами конструируют таблицу умножения. Однако не в одном из рассмотренных учебников этот способ не реализован.

Другим негативным моментом, влияющим на дальнейшее обучение, является то, что во многих случаях изложение материала в учебниках математики начальной школы построено таким образом, что в дальнейшем детей придется переучивать, а это, как известно, гораздо труднее, чем учить. Применительно к изучению алгебраического материала примером может служить решение уравнений в начальной школе. Во всех учебниках решение уравнений основано на правилах нахождения неизвестных компонентов действий.

Несколько иначе это сделано лишь в учебнике Л.Г. Петерсон, где, например, решение уравнений на умножение и деление строится на соотнесении компонентов уравнения со сторонами и площадью прямоугольника и в итоге также сводится к правилам, но это правила нахождения стороны или площади прямоугольника. Между тем, начиная с 6-го класса детей учат совершенно другому принципу решения уравнений, основанному на применении тождественных преобразований. Такая необходимость переучивания приводит к тому, что решение уравнений является достаточно сложным моментом для большинства детей.

Анализируя учебники, мы столкнулись еще и с тем, что при изложении материала в них зачастую имеет место искажение понятий. Например, формулировка многих определений дается в виде импликаций, тогда как из математической логики известно, что любое определение – это эквиваленция. В качестве иллюстрации можно привести определение умножения из учебника И.И. Аргинской: "Если все слагаемые в сумме равны между собой, то сложение можно заменить другим действием – умножением". (Все слагаемые в сумме равны между собой. Следовательно, сложение можно заменить умножением.) Как видно, это импликация в чистом виде. Такая формулировка не только неграмотна с точки зрения математики, не только неправильно формирует у детей представление о том, что такое определение, но она еще и очень вредна тем, что в дальнейшем, например, при построении таблицы умножения авторы учебников используют замену произведения суммой одинаковых слагаемых, чего представленная формулировка не допускает. Такая неправильная работа с высказываниями, записанными в виде импликации, формирует у детей неверный стереотип, который будет с большим трудом преодолеваться на уроках геометрии, когда дети не будут чувствовать разницы между прямым и обратным утверждением, между признаком фигуры и ее свойством. Ошибка, когда при решении задач используется обратная теорема, в то время как доказана только прямая, является очень распространенной.

Другим примером неправильного формирования понятий является работа с отношением буквенного равенства. Например, правила умножения числа на единицу и числа на нуль во всех учебниках даются в буквенном виде: *а* х 1 = *а*, *а* х 0 = 0. Отношение равенства, как известно, является симметричным, а следовательно, подобная запись предусматривает не только то, что при умножении на 1 получается то же число, но и то, что любое число можно представить как произведение этого числа и единицы. Однако словесная формулировка, предложенная в учебниках после буквенной записи, говорит только о первой возможности. Упражнения по этой теме также направлены только на отработку замены произведения числа и единицы этим числом. Все это приводит не только к тому, что предметом сознания детей не становится очень важный момент: любое число можно записать в виде произведения, – что в алгебре при работе с многочленами вызовет соответствующие трудности, но и к тому, что дети в принципе не умеют правильно работать с отношением равенства. К примеру, при работе с формулой разность квадратов дети, как правило, справляются с заданием разложить разность квадратов на множители. Однако те задания, где требуется обратное действие, во многих случаях вызывают затруднения. Другой яркой иллюстрацией этой мысли служит работа с распределительным законом умножения относительно сложения. Здесь также, несмотря на буквенную запись закона, и его словесная формулировка, и система упражнений отрабатывают только умение открывать скобки. В результате этого вынесение общего множителя за скобки в дальнейшем будет вызывать значительные трудности.

Весьма часто в начальной школе, даже когда определение или правило сформулировано верно, обучение стимулирует опору не на них, а на нечто совершенно другое. Например, при изучении таблицы умножения на 2 во всех рассмотренных учебниках показан способ ее построения. В учебнике М.И. Моро это сделано так:

|  |  |
| --- | --- |
| **2 х 2**  **2 х 3**  **2 х 4**  **2 х 9** | **2 + 2**  **2 + 2 + 2**  **2 + 2 + 2 + 2**  **2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2** |

При таком способе работы дети очень быстро подметят закономерность получающегося числового ряда.

Уже после 3–4 равенств они перестанут складывать двойки и начнут записывать результат, основываясь на подмеченной закономерности. Таким образом, способ конструирования таблицы умножения не станет предметом их сознания, результатом чего будет являться непрочное ее усвоение.

При изучении материала в начальной школе опора делается на предметные действия и иллюстративную наглядность, что ведет к формированию эмпирического мышления. Конечно, без подобной наглядности вряд ли можно совсем обойтись в начальной школе. Но она должна служить лишь иллюстрацией того или иного факта, а не основой для формирования понятия. Применение иллюстративной наглядности и предметных действий в учебниках нередко приводит к тому, что "размывается" само понятие. Например, в методике математики для 1–3-х классов М.И. Моро говорится, что детям приходится выполнять деление, раскладывая предметы на кучки или делая рисунок на протяжении 30 уроков. За подобными действиями теряется сущность операции деления как действия, обратного умножению. В результате деление усваивается с наибольшим трудом и значительно хуже, чем другие арифметические действия.

При обучении математике в начальной школе нигде не идет речь о доказательстве каких-либо утверждений. Между тем, помня о том, какую трудность будет вызывать обучение доказательству в средней школе, начинать готовить к этому нужно уже в начальных классах. Причем сделать это можно на вполне доступном для младших школьников материале. Таким материалом, например, могут служить правила деления числа на 1, нуля на число и числа на само себя. Дети вполне в состоянии доказать их, используя определение деления и соответствующие правила умножения.

Материал начальной школы также допускает и пропедевтику алгебры – работу с буквами и буквенными выражениями. Большинство учебников избегает использование букв. В результате четыре года дети работают практически только с числами, после чего, конечно, очень трудно приучать их к работе с буквами. Однако обеспечить пропедевтику такой работы, научить детей подстановке числа вместо буквы в буквенное выражение можно уже в начальной школе. Это сделано, например, в учебнике Л.Г. Петерсон.

Говоря о недостатках обучения математике в начальной школе, мешающих дальнейшему обучению, необходимо особо подчеркнуть тот факт, что зачастую материал в учебниках изложен без взгляда на то, как он будет работать в дальнейшем. Очень ярким примером этого является организация усвоения умножения на 10, 100, 1000 и т.д. Во всех рассмотренных учебниках изложение этого материала построено так, что оно неизбежно приводит к формированию в сознании детей правила: "Чтобы умножить число на 10, 100, 1000 и т.д., нужно справа к нему приписать столько нулей, сколько их в 10, 100, 1000 и т.д." Это правило является одним из тех, которые очень хорошо усваиваются в начальной школе. И это приводит к большому числу ошибок при умножении десятичных дробей на целые разрядные единицы. Даже запомнив новое правило, дети часто автоматически при умножении на 10 приписывают к десятичной дроби справа нуль. Кроме того, следует отметить, что и при умножении натурального числа, и при умножении десятичной дроби на целые разрядные единицы, по сути дела, происходит одно и то же: каждая цифра числа сдвигается вправо на соответствующее количество разрядов. Поэтому нет смысла учить детей двум отдельным и совершенно формальным правилам. Гораздо полезнее научить их общему способу действий при решении подобных заданий.

## 2.1 Сравнение (противопоставление) понятий на уроках математики

Действующая программа предусматривает изучение в I классе лишь двух действии первой ступени — сложения и вычитания. Ограничение первого года обучения лишь двумя действиями есть, по существу, отход от того, что было уже достигнуто в учебниках, предшествовавших ныне действующим: ни один учитель никогда не жаловался тогда на то, что умножение и деление, скажем, в пределах 20 непосильно для первоклассников. Достойно внимания еще и то, что в школах других стран, где обучение начинается с 6 лет, к первому учебному году относят начальное знакомство со всеми четырьмя действиями арифметики. Математика опирается прежде всего на четыре действия, и чем раньше они будут включены в практику мышления школьника, тем устойчивее и надежнее будет последующее развертывание курса математики.

Справедливости ради надо отметить, что в первых вариантах учебников М. И. Моро для I класса предусматривалось умножение и деление. Однако делу помешала случайность: авторы новых программ настойчиво держались за одну «новинку» — охват в I классе всех случаев сложения и вычитания в пределах 100 (37+58 и 95—58 и т. п.). Но, поскольку времени на изучение такого расширенного объема сведений не хватило, было решено сдвинуть умножение и деление полностью на следующий год обучения.

Итак, увлечение линейностью программы, т. е. чисто количественным расширением знаний (те же самые действия, но с большими числами), заняло то время, которое ранее отводилось на качественное углубление знаний (изучение всех четырех действий в пределах двух десятков). Изучение умножения и деления уже в I классе означает качественный скачок мышления, поскольку это позволяет освоить свернутые мыслительные процессы.

По традиции, раньше выделялось в особую тему изучение действий сложения и вычитания в пределах 20. Необходимость этого подхода в систематизации знаний видна даже из логического анализа вопроса: дело в том, что полная таблица сложения однозначных чисел развертывается в пределах двух десятков (0+1=1, ...,9+9=18). Таким образом, числа в пределах 20 образуют в своих внутренних связях завершенную систему отношений; отсюда понятна целесообразность сохранения «Двадцати» в виде второй целостной темы (первая такая тема — действия в пределах первого десятка).

Обсуждаемый случай — именно тот, когда *концентричность* (сохранение второго десятка в качестве особой темы) оказывается более выгодной, чем *линейность* («растворение» второго десятка в теме «Сотня»).

В учебнике М. И. Моро изучение первого десятка разделено на два изолированных раздела: сначала изучается состав чисел первого десятка, а в следующей теме рассматриваются действия в пределах 10. В экспериментальном учебнике П.М. Эрдниева в противовес этому осуществлено совместное изучение нумерации, состава чисел и действий (сложение и вычитание) в пределах 10 сразу в одном разделе. При таком подходе применяется монографическое изучение чисел, а именно: в пределах рассматриваемого числа (например, 3) сразу же постигается вся «наличная математика»: 1 + 2 = 3; 2 + 1 = 3; 3 – 1 = 2; 3 – 2 = 1.

Если по действующим программам на изучение первого десятка отводилось 70 ч, то в случае экспериментального обучения весь этот материал был изучен за 50 ч (причем сверх программы были рассмотрены некоторые дополнительнные понятия, отсутствующие в стабильном учебнике, но структурно связанные с основным материалом).

Особого внимания в методике начального обучения требует вопрос о классификации задач, о названиях их типов. Поколения методистов трудились над упорядочением системы школьных задач, над созданием их эффективных типов и разновидностей, вплоть до подбора удачных терминов для названий задач, предусмотренных для изучения в школе. Известно, что не менее половины учебного времени на уроках математики отводится их решению. Школьные задачи, безусловно, нуждаются в систематизации и классификации. Какого вида (типа) задачи изучать, когда изучать, какой их тип изучать в связи с прохождением того или иного раздела — это законный объект исследования методики и центральное содержание программ. Значимость этого обстоятельства видна из истории методики математики.

В экспериментальных учебных пособиях автора уделено специальное внимание классификации задач и распределению необходимых их видов и разновидностей для обучения в том или ином классе. В настоящее время классические названия видов задач (на нахождение суммы, неизвестного слагаемого и т. п.) исчезли даже из оглавления стабильного учебника I класса. В пробном учебнике П.М. Эрдниева эти названия «работают»: они полезны как дидактические вехи не только для школьника, но и для учителя. Приведем содержание первой темы пробного учебника математики, для которой характерна логическая полнота понятий.

*Первый десяток*

Сравнение понятии выше — ниже, левее — правее, между, короче — длиннее, шире — уже, толще — тоньше, старше — моложе, дальше — ближе, медленнее — быстрее, легче — тяжелее, мало — много.

Монографическое изучение чисел первого десятка: название, обозначение, сравнение, откладывание чисел на счетах и обозначение чисел на числовом луче; знаки: равно (=), не равно (≠), больше (>), меньше (<).

Прямая и кривая линии; окружность и овал.

Точка, прямая, отрезок, обозначение их буквами; измерение длины отрезка и откладывание отрезков заданной длины; обозначение, называние, построение, вырезывание равных треугольников, равных многоугольников. Элементы многоугольника: вершины, стороны, диагонали (обозначение их буквами).

Монографическое изучение чисел в пределах рассматриваемого числа:

состав чисел, сложение и вычитание.

Название компонентов сложения и вычитания.

Четверки примеров на сложение и вычитание:

3 + 2 = 5, 5 — 2 = 3, 2 + 3 = 5, 5 — 3 = 2.

Деформированные примеры (с пропущенными числами и знаками):

Х + 5 = 7; 6 – Х = 4; 6 = 3A2.

Решение задач на нахождение суммы и слагаемого, разности, уменьшаемого и вычитаемого. Составление и решение взаимно-обратных задач.

Тройка задач: на увеличение и уменьшение числа на несколько единиц и на разностное сравнение. Сравнение отрезков по длине.

Переместительный закон сложения. Изменение суммы в зависимости от изменения одного слагаемого. Условие, когда сумма не изменяется. Простейшие буквенные выражения: a + b = b + a, a + 0 = a, a – a = 0.

Составление и решение задач по выражению.

В последующем изложении рассмотрим основные вопросы методики изложения этого начального раздела школьной математики, имея в виду, что методика изложения последующих разделов во многом должна быть аналогична процессу освоения материала первой темы.

На первых же занятиях учитель должен поставить перед собой цель научить школьника применять пары понятий, содержание которых раскрывается в процессе составления соответствующих предложений с этими словами. (Вначале осваиваем сравнение на качественном уровне, без употребления чисел.)

Приведем примеры наиболее распространенных пар понятий, которыми надо пользоваться на уроках не только математики, но и развития речи:

Больше — меньше, длиннее — короче, выше — ниже, тяжелее — легче, шире — уже, толще — тоньше, правее — левее, дальше — ближе, старше — моложе, быстрее — медленнее и т. п.

При работе над такими парами понятии важно использовать не только иллюстрации в учебнике, но и наблюдения детей; так, например, из окна класса они видят, что за рекой стоит дом, и составляют фразы: «Река ближе к школе, чем дом, а дом дальше от школы, чем река».

Пусть ученик подержит в руке попеременно книгу и тетрадь. Учитель спрашивает: что тяжелее — книга или тетрадь? Что легче? «Книга *тяжелее* тетради, а тетрадь *легче* книги».

Выстроив перед классом рядом самого высокого и самого низкого ученика класса, составляем тут же две фразы: «Миша выше Коли, а Коля ниже Миши».

В этих упражнениях важно добиваться грамматически правильной замены одного суждения ему двойственным: «Каменный дом выше деревянного, значит, деревянный дом ниже каменного».

При ознакомлении с понятием «длиннее — короче» можно показать сравнение предметов по длине наложением одного на другой (что длиннее: ручка или пенал?).

На уроках арифметики и развития речи полезно решать логические задачи, преследующие цель научить пользоваться противоположными понятиями: «Кто старше: отец или сын? Кто моложе: отец или сын? Кто из них родился раньше? Кто позже?»;

«Сравните книгу и портфель по ширине. Что шире: книга или портфель? Что уже — книга или портфель? Что тяжелее: книга или портфель?»

Обучение процессу сравнения можно сделать более интересным, вводя так называемые матричные (табличные) упражнения. На доске строится таблица из четырех клеток и разъясняется смысл понятий «столбец» и «строка». Вводим понятия «левый столбец» и «правый столбец», «верхняя строка» и «нижняя строка».

Вместе с учащимися показываем (имитируем) смысловое толкование этих понятий.

— Покажите столбец (дети двигают рукой сверху вниз).

— Покажите левый столбец, правый столбец (дети проводят два маха рукой сверху вниз).

— Покажите строку (мах рукой слева направо).

— Покажите верхнюю строку, нижнюю строку (два маха рукой показывающие верхнюю строку, нижнюю строку).

Надо добиваться того, чтобы учащиеся точно указывали положение клетки: «верхняя левая клетка», «нижняя правая клетка» и т. п. Тут же решается обратная задача, а именно: учитель указывает на какую-нибудь клетку таблицы (матрицы), ученик дает соответствующее название этой клетки. Так, если указано на клетку, лежащую в пересечении верхней строки и левого столбца то ученик должен назвать: «Верхняя левая клетка». Подобные упражнения постепенно приучают детей к пространственной ориентировке и имеют важное значение при изучении впоследствии координатного метода математики.

Большое значение для первых уроков начальной математики имеет работа над числовым рядом.

Рост числового ряда прибавлением по единице удобно иллюстрировать перемещением вправо по числовому лучу.

Если знак (+) связывается с перемещением по числовому ряду вправо на единицу, то знак (—) связывается с обратным перемещением влево на единицу и т. п. (Поэтому оба знака показываем одновременно на одном и том же уроке.)

Работая с числовым рядом, вводим понятия: начало числового ряда (число нуль) представляет левый конец луча; числу 1 соответствует единичный отрезок, который надо изобразить отдельно от числового ряда.

Пусть учащиеся работают с числовым рядом в пределах трех.

Выделяем два каких-либо соседних числа, например 2 и 3. Переходя от числа 2 к числу 3, дети рассуждают так: «За числом 2 следует число З». Переходя от числа 3 к числу 2, они говорят:

«Перед числом 3 идет число 2» или: «Число 2 предшествует числу З».

Такой метод позволяет определить место данного числа по отношению как к предыдущему, так и к последующему числу; уместно тут же обратить внимание на относительность положения числа, например: число 3 одновременно является как последующим (за числом 2), так и предыдущим (перед числом 4).

Указанные переходы по числовому ряду надо связать с соответствующими арифметическими действиями.

Например, фраза «За числом 2 следует число З» изображается символически так: 2 + 1 = 3; однако психологически выгодно создать сразу вслед за ней противоположную связь мыслей, а именно: выражение «Перед числом 3 идет число 2» подкрепляется записью: 3 – 1 = 2.

Чтобы добиться понимания места какого-либо числа в числовом ряду, следует предлагать парные вопросы:

1. За каким числом следует число 3? (Число 3 следует за числом 2.) *Перед* каким числом расположено число 2? (Число 2 расположено перед числом 3.)

2. Какое число следует *за* числом 2? (За числом 2 следует число 3.) Какое число идет *перед* числом 3? (Перед числом 3 идет число 2.)

3. *Между* какими числами находится число 2? (Число 2 находится между числом 1 и числом 3.) Какое число находится между числами 1 и 3? (Между числами 1 и 3 находится число 2.)

В этих упражнениях математическая информация заключена в служебных словах: *перед, за, между.*

Работу с числовым рядом удобно сочетать со сравнением чисел по величине, а также со сравнением положения чисел на числовой прямой. Постепенно вырабатываются связи суждений геометрического характера: число 4 находится на числовой прямой правее числа 3; значит, 4 больше 3. И наоборот: число 3 находится на числовой прямой левее числа 4; значит, число 3 меньше числа 4. Так устанавливается связь между парами понятий: правее — больше, левее — меньше.

Из изложенного выше мы видим характерную черту укрупненного усвоения знаний: весь набор понятий, связанных со сложением и вычитанием, предлагается совместно, в своих непрерывных переходах (перекодировках) друг в друга.

Главным средством овладения числовыми соотношениями в нашем учебнике являются цветные бруски; их удобно сравнить по длине, устанавливая, на сколько клеток больше или меньше их в верхнем или в нижнем бруске. Иначе говоря, понятие «разностное сравнение отрезков» мы не вводим как особую тему, но учащиеся знакомятся с ним в самом начале изучения чисел первого десятка. На уроках, посвященных изучению первого десятка, удобно использовать цветные бруски, которые позволяют выполнять пропедевтику основных видов задач на действия первой ступени.

Рассмотрим пример.

Пусть друг на друга наложены два цветных бруска, разделенных на клетки:

в нижнем — 3 клетки, в верхнем — 2 клетки (см. рис.).

Сравнивая количество клеток в верхнем и нижнем брусках, учитель составляет два примера на взаимно-обратные действия (2 + 1 = 3, 3 – 1 = 2), причем решения этих примеров прочитываются попарно всеми возможными способами:

2 + 1 = 3 *3 – 1 = 2*

а) к 2 прибавить 1 — получится 3; а) из 3 вычесть 1 - получится 2;

б) 2 увеличить на 1 — получится 3; б) 3 уменьшить на 1 - получится 2;

в) 3 больше 2 на 1; в) 2 меньше 3 на 1;

г) 2 да 1 будет 3; г) 3 без 1 будет 2;

д) число 2 сложить с числом 1 — д) из числа 3 вычесть число 1 —

получится 3. получится 2.

*Учитель.* Если 2 увеличить на 1, то сколько получится?

*Ученик.* Если 2 увеличить на 1, то получится 3.

*Учитель.* А теперь скажите, что надо сделать с числом 3, чтобы получить 2?

*Ученик.* 3 уменьшить на 1, получится 2.

Обратим здесь внимание на необходимость в этом диалоге методически грамотного осуществления операции противопоставления. ,

Уверенное овладение детьми смыслом парных понятий (прибавить — отнять, увеличить — уменьшить, больше — меньше, да — без, сложить — вычесть) достигается благодаря использованию их на одном уроке, на базе одной и той же тройки чисел (например, 2+1==3, 3—1=2), на основе одной демонстрации — сравнения длин двух брусков.

В этом принципиальное отличие методической системы укрупнения единиц усвоения от системы раздельного изучения этих базисных понятий, при которой контрастные понятия математики вводятся, как правило, порознь в речевую практику учащихся.

Опыт обучения показывает преимущества одновременного введения пар взаимно противоположных понятий начиная с самых первых уроков арифметики.

Так, например, одновременное употребление трех глаголов: «прибавить» (к 2 прибавить 1), «сложить» (число 2 сложить с числом 1), «увеличить» (2 увеличить на 1), которые изображаются символически одинаково (2+1=3), помогает детям усвоить сходство, близость этих слов по смыслу (подобные рассуждения можно провести относительно слов «отнять», «вычесть», «уменьшить»).

Точно так же сущность разностного сравнения усваивается в ходе многократного использования сравнения пар чисел с самого начала обучения, причем в каждой части диалога на уроке используются все возможные словесные формы истолкования решенного примера: «Что больше: 2 или 3? На сколько 3 больше 2? Сколько надо прибавить к 2, чтобы получить 3?» и т. п. Большое значение для овладения смыслом этих понятий имеет изменение грамматических форм, частое использование вопросительных форм.

Многолетние испытания показали преимущества *монографического изучения* чисел первого десятка. Каждое очередное число при этом подвергается многостороннему анализу, с перебором всех возможных вариантов его образования; в пределах этого числа выполняются все возможные действия, повторяется «вся наличная математика», используются все допустимые грамматические формы выражения зависимости между числами. Разумеется, при этой системе изучения в связи с охватом последующих чисел повторяются ранее изученные примеры, т. е, расширение числового ряда осуществляется с постоянным повторением ранее рассмотренных сочетаний чисел и разновидностей простых задач.

## 2.3 Совместное изучение сложения и вычитания, умножения и деления

В методике начальной математики упражнения на эти две операции обычно рассматриваются раздельно. Между тем представляется, что одновременное изучение двуединой операции «сложение — разложение на слагаемые» является более предпочтительным.

Пусть учащиеся решили задачу на сложение: «К трем палочкам прибавить 1 палочку — получится 4 палочки». Вслед за этой задачей сразу же следует поставить вопрос: «Из каких чисел *состоит* число 4?» 4 палочки состоят из 3 палочек (ребенок отсчитывает 3 палочки) и 1 палочки (отделяет еще 1 палочку).

Исходным упражнением может быть и разложение числа. Учитель спрашивает: «Из каких чисел состоит число 5?» (Число 5 состоит из 3 и 2.) И тотчас же предлагается вопрос про те же числа: «Сколько получится, если к 3 прибавить 2?» (К 3 прибавить 2 — получится 5.)

Для этой же цели полезно практиковать чтение примеров в двух направлениях: 5+2=7. К 5 прибавить 2, получится 7 (читаем слева направо). 7 состоит из слагаемых 2 и 5 (читаем справа налево).

Словесное противопоставление полезно сопровождать такими упражнениями на классных счетах, которые позволяют видеть конкретное содержание соответствующих операций. Вычисления на счетах незаменимы как средство визуализации действий над числами, причем величина чисел в пределах 10 здесь ассоциируется с длиной совокупности косточек, расположенных на одной проволоке (эта длина воспринимается учеником зрительно). Нельзя согласиться с таким «новаторством», когда в действующих учебниках и программах полностью отказались от использования на уроках русских счетов.

Так, при решении примера на сложение (5+2=7) ученик сначала отсчитывал на счетах 5 косточек, затем к ним присоединял 2 и после этого объявлял сумму: «К 5 прибавить 2 — получится 7» (название полученного числа 7 при этом ученик устанавливает пересчетом новой совокупности: «Один — два — три — четыре — пять — шесть — семь»).

*Ученик.* К 5 прибавить 2 — получилось 7.

*Учитель.* А теперь покажи, из каких слагаемых состоит число 7.

*Ученик* (сначала отделяет две косточки вправо, потом говорит). Число 7 состоит из 2 и 5.

Выполняя данные упражнения, целесообразно употреблять с самого начала понятия «первое слагаемое» (5), «второе слагаемое» (2), «сумма».

Предлагаются задания следующих видов: а) сумма двух слагаемых равна 7; найти слагаемые; б) из каких слагаемых состоит число 7?; в) разложите сумму 7 на 2 слагаемых (на 3 слагаемых). И т.д.

Усвоение такого важного алгебраического понятия, как переместительный закон сложения, требует разнообразных упражнений, основанных вначале на практических манипуляциях с предметами.

*Учитель.* Возьмите в левую руку 3 палочки, а в правую — 2. сколько всего стало палочек?

*Ученик.* Всего стало 5 палочек.

*Учитель.* Как подробнее сказать об этом?

*Ученик.* К 3 палочкам прибавить 2 палочки — будет 5 палочек.

*Учитель.* Составьте этот пример из разрезных цифр. (Ученик составляет пример: 3+2=5.)

*Учитель.* А теперь поменяйте местами палочки: палочки, лежащие в левой руке, переложите в правую, а палочки из правой руки переложите в левую. Сколько теперь палочек в двух руках вместе?

*Ученик.* Всего в двух руках было 5 палочек, и сейчас получилось снова 5 палочек.

*Учитель.* Почему так получилось?

*Ученик.* Потому, что мы никуда не откладывали и не добавляли палочки Сколько было, столько и осталось.

*Учитель.* Составьте из разрезных цифр решенные примеры.

*Ученик* (откладывает: 3+2=5, 2+3=5). Здесь было число 3, а теперь число 2. А здесь было число 2, а теперь число 3.

*Учитель.* Мы поменяли местами числа 2 и 3, а результат остался прежним:

5. (Из разрезных цифр складывается пример: 3+2=2+3.)

Переместительный закон усваивается также в упражнениях по разложению числа на слагаемые.

Когда вводить переместительный закон сложения?

Главная цель обучения сложению — уже в пределах первого десятка — постоянно подчеркивать роль переместительного закона в упражнениях.

Пусть вначале дети отсчитали 6 палочек; затем к ним прибавляем три палочки и пересчетом («семь — восемь — девять») устанавливаем сумму: 6 да 3 — будет 9. Необходимо немедленно тут же предложить новый пример: 3+6; новую сумму вначале можно установить опять же пересчетом (т. е. самым примитивным путем), но постепенно и целенаправленно следует формировать способ решения на высшем коде, т. е. логически, без пересчета.

Если 6 да 3—будет 9 (ответ установлен пересчетом), то 3 да 6 (без пересчета!) —тоже будет 9!

Короче говоря, переместительное свойство сложения надо ввести с самого начала упражнений на сложение разных слагаемых, чтобы стало привычкой составление (проговаривание) решения четверки примеров:

6 + 3 = 9, 9 — 3 = 6, 3 + 6 = 9, 9 – 6 = 3.

Составление четверки примеров — это доступное детям средство укрупнения знаний.

Мы видим, что такая важная характеристика операции сложения, как его переместительность, не должна пройти эпизодически, а должна стать основным логическим средством упрочения верных числовых ассоциаций. Главное свойство сложения — переместительность слагаемых — должно рассматриваться постоянно в связи с накоплением в памяти все новых табличных результатов.

Мы видим: взаимосвязь более сложных вычислительных или логических операций основана на аналогичном попарном родстве (близости) элементарных операций, посредством которых выполняется пара «сложных» операций. Иными словами, явное противопоставление сложных понятий основано на неявном (подсознательном) противопоставлении более простых понятий.

Первоначальное изучение умножения и деления целесообразно осуществлять в следующей последовательности трех циклов задач (по три задачи в каждом цикле):

I цикл: а,б) умножение при постоянном множимом и деление по содержанию (совместно); в) деление на равные части.

II цикл: а,б) уменьшение и увеличение числа в несколько раз (совместно); в) кратное сравнение.

III цикл: а,б) нахождение одной части числа и числа по величине одной его части (совместно); в) решение задачи: «Какую часть составляет одно число от другого?»

Методическая система изучения этих задач аналогична той, которая описана выше для простых задач первой ступени (на сложение и вычитание).

*Одновременное изучение умножения и деления по содержанию.* На двух-трех уроках (не больше!), посвященных умножению, выясняется смысл понятия умножения как свернутого сложения равных слагаемых (о действии деления на этих уроках пока не говорится). Этого времени достаточно для изучения таблицы умножения числа 2 на однозначные числа.

Обычно учащимся показывается запись по замене сложения умножением: 2+2+2+2=8; 2\*4=8. Здесь связь между сложением и умножением идет в направлении «сложение-умножение». Уместно тут же предложить учащимся упражнение, рассчитанное на появление обратной связи вида «умножение-сложение» (равных слагаемых): рассматривая эту запись, учащийся должен понять, что требуется число 2 повторять слагаемым столько раз, сколько показывает множитель в примере (2\*4=8).

Сочетание обоих видов упражнении есть одно из важных условий, обеспечивающих сознательное усвоение понятия «умножение», означающего свернутое сложение.

На третьем уроке (или четвертом, а зависимости от класса) к каждому из известных случаев умножения приводится соответствующий случай деления. В дальнейшем умножение и деление по содержанию выгодно рассматривать только совместно на одних и тех же уроках.

При введении понятия деления необходимо вспомнить соответствующие случаи умножения, чтобы, оттолкнувшись от них, создать понятие о новом действии, обратном умножению.

Стало быть, понятие «умножение» приобретает богатое содержание: оно не только результат сложения равных слагаемых («обобщение сложения»), но и основа, исходный момент деления, которое, в свою очередь, представляет «свернутое вычитание», заменяющее последовательное «вычитание по 2»:

Смысл умножения постигается не столько при самом умножении, сколько при постоянных переходах между умножением и делением, так как деление есть завуалированное, «измененное» умножение. Это и объясняет, почему выгодно впоследствии изучать всегда одновременно умножение и деление (как табличное, так и внетабличное; как устное, так и письменное).

Первые уроки по одновременному изучению умножения и деления должны быть посвящены педантичной обработке самих логических операций, всячески подкрепляемых развернутой практической деятельностью по собиранию и раздаче различных предметов (кубиков, грибов, палочек и т. п.), но последовательность развернутых действий должна оставаться одной и той же.

Результатом такой работы и будут таблицы умножения и деления, записываемые рядом:

по 2\*2=4, 4:по 2=2,

по 2\*3=6, 6:по 2=3,

по 2\*4=8, 8: по 2=4,

по 2\*5= 10, 10: по 2=5 и т. д.

Таким образом, таблица умножения строится по постоянному множимому, а таблица деления — по постоянному делителю.

Полезно также предложить учащимся в паре с данной задачей структурно противоположное упражнение по переходу от деления к вычитанию равных вычитаемых.

В повторительных упражнениях полезно предлагать задания такого вида: 14:2==.

*Изучение деления на равные части.* После того как изучены или повторены совместно умножение числа 2 и деление по 2, на одном из уроков вводится понятие «деление на равные части» (третий вид задачи первого цикла).

Рассмотрим задачу: «Четыре ученика принесли по 2 тетради. Сколько всего тетрадей принесли?»

Учитель объясняет: по 2 взять 4 раза — получится 8. (Появляется запись: по 2\*4=8.) Кто составит обратную задачу?

Выполняя умножение, мы собирали тетради. Что будем делать при делении по два?

8 тетрадей раздали по 2 тетради каждому ученику — получится 4 (тетрадей хватило 4 ученикам).

Появляется запись:

по 2т. \*4 = 8 т.; 8т. : по 2 т. = 4 (ученика).

На первых порах надо пользоваться подробной записью чисел с наименованиями (в делимом, делителе и частном).

Теперь составим третью задачу: «8 тетрадей надо раздать поровну четырем ученикам. По сколько тетрадей достанется каждому?»

Вначале деление на равные части также следует демонстрировать на основе реальных манипуляций с предметами.

Стало быть, понятие «умножение» приобретает богатое содержание: оно не только результат сложения равных слагаемых («обобщение сложения»), но и основа, исходный момент деления, которое, в свою очередь, представляет свернутое вычитание, заменяющее последовательное «вычитание по 2».

# Глава III. Практика изучения алгебраического материала на уроках математики в начальных классах средней школы № 4 г. Рыльска

## 3.1 Обоснование использования инновационных технологий (технологии укрупнения дидактических единиц)

В своей работе учителя начальных классов я руководствуюсь так называемой технологией укрупнения дидактических единиц (УДЕ). Актуальность использования методики УДЕ в том, что традиционное обучение математике не редко "разводит" во времени прямые и обратные операции, соответствующие понятия (сложение – вычитание, умножение – деление и т.п.).

В своей работе в начальных классах школы № 4 г. Рыльска я столкнулась со следующими противоречиями:

* при раздельном изучении взаимообратных операций учащиеся не овладевают умениями находить различия и сходства задач различного вида, надежными приемами выбора действия, т.к. длительное время решают сходные задачи на основе одного правила;
* систематическое обучение по технологии укрупнения дидактических единиц в начальной школе вооружает школьника алгоритмом творческого освоения учебной информации, и технология становится основным средством освоения знаний во всех последующих классах.

Методическая система укрупнения дидактических единиц, реализованная П.М. Эрдниевым в нескольких изданиях его альтернативных учебников математики для 9-летней школы, представляет парадигму современного математического образования. Научное понятие "дидактическая единица" было выдвинуто автором 20 лет назад (Вестник высшей школы.-1978 - №10); в последних документах Министерства общего и профессионального образования РФ понятие "дидактические единицы" используется как рабочее понятие с 1996 года.

Мое убеждение в том, что технология укрупнения дидактических единиц актуальна и перспективна, потому что обладает силой дальнодействия, закладывая в ученике черты деятельного интеллекта, способствует становлению активной личности.

Все это происходит через сознательное и планомерное укрупнение изучаемого материала, через развитие соответствующих умений и навыков учащихся.

Формирование системного качества знаний зависит от множества факторов:

* от порядка расположения изучаемых разделов и их оформления в учебнике;
* от структуры упражнений на уроке и наличия информационных связей между соседними заданиями;
* от логики объяснения учителя и т.п.

Знания, получаемые школьником, по ряду причин могут не обрести системного качества и оставаться неорганизованным набором сведений, вследствие чего память детей переполняется осколками разрозненных знаний.

П.М. Эрдниев выделяет четыре основных способа укрупнения дидактических единиц:

1. совместное и одновременное изучение взаимосвязанных действий, операций;
2. применение деформированных упражнений;
3. широкое использование метода обратной задачи;
4. усиление удельного веса творческих заданий.

Поясню, как каждый из приведенных способов укрупнения дидактических единиц способствует актуализации резервов мышления.

**Первый способ** укрупнения дидактических единиц – совместное и одновременное изучение взаимосвязанных действий, операций. Например, сложение изучается вместе с вычитанием, умножение с делением.

В первом классе, изучая первый десяток, дети знакомятся с примерами вида: 3 + 4 = 7.

По технологии укрупнения дидактических единиц сразу же знакомлю с переместительным свойством сложения: 4 + 3 = 7.

Обращается внимание, что в обоих примерах получается число 7 (сумма), и запись приобретает такой вид:

3 + 4 =

4 + 3 =

Далее предлагаются примеры на вычитание: 7 – 3 = 4, 7 – 4 = 3.

Запись имеет такой вид:

- 4 = 3

- 3 = 4

Теперь эти знания обобщаются, объединяются, и вся запись имеет такой вид (вывод):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 + 4 =  4 + 3 = | - 4 = 3  - 3 = 4 | 3 + 4 =  4 + 3 = |

Аналогично рассматриваются примеры на умножение и деление. Например, при изучении таблицы умножения на 8 ведется следующая запись: 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 72, 8 х 9 = 72, 9 х 8 = 72, 72 : 8 = 9, 72 : 9 = 8.

|  |  |
| --- | --- |
| 8 х 9 =  9 х 8 = | : 8 = 9  : 9 = 8 |

Дети приучаются различать противоположные понятия и операции при одновременном изучении сопряженных действий. "Нервные привычки", по К. Ушинскому, закрепляются у человека не отдельно, а парами, рядами, вереницами, группами. Такая подача учебного материала создает лучшие условия для развития самостоятельности и инициативы детей, нежели классический метод.

**Второй способ** укрупнения дидактических единиц – метод деформированных упражнений, в которых искомым является не один, а несколько элементов.

Например, в математике 1 кл. предлагаются задания, в которых надо определить знак действия и неизвестный компонент:

|  |  |
| --- | --- |
| 8 Δ □ = 2 | 6 Δ □ = 9 |

В этих примерах ученик сначала подбирает знак действия на основе сравнения, а затем находит отсутствующий компонент. Решая пример,

8 Δ □ = 2 , ученик рассуждает так: " 8 > 2, значит, знак "-"; 8 состоит их 2 (данное число) и 6 (неизвестное число), значит, пример такой:

8 - 6 = 2.

Так, в процессе выполнения деформированных упражнений, активизируется внимание учащихся, развивается их мышление, т.к. они совершают новые виды логических операций (сравнение, проба)

**Третий способ** укрупнения дидактических единиц - решение прямой задачи и преобразование ее в обратные и аналогичные.

Решение задач в начальной школе имеет центральное значение для развития мышления учащихся: при решении задач дети знакомятся с зависимостью входящих в нее величин; с различными сторонами жизни, учатся думать, рассуждать, сравнивать и т.п.

Обучая детей решению задач, учу их составлять обратные задачи. В основе каждого способа укрупнения дидактических единиц лежит великий информационный закон живой природы – закон обратной связи, открытый П.К. Анохиным.

При работе над задачами выгодно пользоваться, когда в серии задач последующая отличается от предыдущей лишь каким-то одним элементом. В этом случае переход от одной задачи к другой облегчается, и информация, полученная при решении предыдущей задачи, помогает в поиске решения последующих задач.

Особенно полезен этот прием слабым или медлительным детям. Например, рассмотрим задачу на нахождение суммы; составим обратные задачи.

"Отец дал Маше 11 яблок, а мама добавила еще 5 яблок. Сколько всего яблок дали Маше родители?".

Проведу анализ задачи по вопросам:

1. Прямая задача:

* Что известно в задаче? (12 яблок, 5 яблок)
* Что нужно узнать? (сколько всего яблок дали Маше родители?)
* Запишем краткую запись задачи: 12 яблок, 5 яблок, □ яблок.
* Как узнать, сколько яблок дали Маше родители? (12 + 5 = 17 яблок)

Ответ: 17 яблок дали Маше родители.

1. – Составим обратную задачу, для чего неизвестным сделаем одно из двух чисел, например, 12 яблок (дал отец).

□ яблок, 5 яблок, 17 яблок.

* Составим по записи обратную задачу:

"Отец дал несколько яблок, а мама добавила еще 5 яблок. Всего у Маши стало 17 яблок. Сколько яблок Маше дал отец?".

17 – 5 = 12 (яблок)

Ответ: 12 яблок дал Маше отец.

1. - Можно составить еще одну обратную задачу, где неизвестным будет количество яблок, данных Маше мамой.

Краткая запись: 12 яблок, □ яблок, 17 яблок.

* Сформулируем обратную задачу:

"Отец дал Маше 12 яблок, а мама добавила еще несколько яблок. Всего у Маши стало 17 яблок. Сколько яблок дала Маше мама?".

17 – 12 = 5 (яблок)

Ответ: 5 яблок дала Маше мама.

В тетрадях ведутся краткие записи по всем 3 задачам.

Взаимосвязанные задачи сливаются в группу родственных задач как крупную единицу усвоения и образуют триаду задач.

Итак, главная технологическая новизна системы укрупнения дидактических единиц заключается в наличии заданий (задач), по которым школьник упражняется в самостоятельном упражнении обратной задачи на основе анализа условия прямой задачи, выявления логического скелета.

**Четвертый способ** укрупнения дидактических единиц - усиление удельного веса творческих заданий.

Например, учащимся предлагается решить пример с "окошком":

□ + 7 – 50 = 20 . Дети ищут ответ методом подбора, но можно решить это задание, рассуждая по стрелке (заменить знаки на противоположные: 20 + 50 – 7 = 63). Искомое число 63.

С помощью этих упражнений ребенок приучается к самостоятельному продолжению мысли, к перестройке суждения (предложения), что имеет решающее значение в последующем для составления активного, творческого ума человека, столь ценного в своем проявлении в любой сфере трудовой деятельности.

Технологию укрупнения дидактических единиц (ее элементов) начала внедрять в процесс обучения математике с 2000 года. Глубоко убеждена в том, что сам процесс обучения должен иметь развивающий характер, содержать в себе проблемные ситуации, строиться на основе методики сотрудничества, сотворчества, совместного поиска.

В такой сфере воспитания и обучения должна постоянно присутствовать "мысленная деятельность – без переутомления, без рывков, спешки и надрыва духовных сил" (В. Сухомлинский).

На мой взгляд, наиболее полно всем этим требованиям отвечает система П.М. Эрдниева - технология укрупнения дидактических единиц.

## 3.2 Об опыте ознакомления с алгебраическими понятиями в I классе

Ниже рассмотрим некоторые практические особенности ознакомления учащихся начальной школы с алгебраическими понятиями. Здесь использовался опыт работы автора в 1999-2000 учебном году в средней школе № 4 г. Рыльска.

Вначале дети самостоятельно устанавливали признаки, по которым можно сравнивать те или иные предметы. Учитель показывает детям две гири (они разного цвета - черная и белая) и спрашивает, по каким признакам их можно сравнивать.

*Ученики.* Их можно сравнить по весу (показывают на весы), по высоте, по донышку (они имеют в виду размер - площадь основания).

*Учитель.* Что же можно сказать?

*Ученики.* Они не равны (по весу, высоте).

*Учитель.* Точнее как можно это выразить?

*Ученики.* Черная гиря тяжелее, выше, больше, толще белой.

*Учитель.* Что это значит - тяжелее? Черная гиря меньше белой по весу?

*Ученики.* (Смеются.) Нет, не меньше, а тяжелее... больше по весу.

*Учитель.* Белая гиря легче - как еще про это можно сказать?

*Ученики.* (Поднимает руки около половины класса.) Белая гиря меньше, легче по весу, чем черная.

Аналогичная работа при наводящих вопросах проводится и по отношению к другим признакам. Вместе с учителем дети устанавливают, что "тяжелее" - это *больше* по весу, "длиннее" - это *больше* по длине ("высоте", "росту"), "тверже" - это *больше* по твердости и т.д. (соответственно для "меньше"). При этом учитель ставит перед детьми различные задания, требующие учета таких "перешифровок".

Учащимся далее специально указывается на то, что слова "длиннее", "тяжелее" сами по себе говорят о признаках, которые сравниваются (получив соответствующие задания с этими словами, дети находят нужные предметы). Если же говорить "больше - меньше", то надо еще дополнительно отмечать, по какому признаку выполнилось сравнение (по весу, по площади и т.д.).

Заключительным этапом этой работы было выяснение того, что если можно найти признак, по которому предметы сравниваются, то они будут либо равными, либо неравными. Это можно *записать* особыми знаками "=" и "не равно". Но последний знак сам может быть уточнен - при неравенстве один предмет меньше или больше другого (по найденному признаку). Для этого есть свои знаки "<" и ">". Дети учились записывать результат сравнения всеми этими знаками. Выполняли они и "обратные" задания - по написанным знакам (">" или "<") подбирали самые различные предметы, сравнение которых удовлетворяет указанным отношениям, - кубики и кружечки (по объему), квадраты и треугольники (по площади), бруски (по вecy). (Мы упоминаем работу с дидактическим материалом; фактически же как здесь, так и в дальнейшем постоянно ставились задания, требующие выявления указанных отношений среди реальных объектов, среди бытовых вещей и т.д.).

При этом возникла своеобразная задача - отношение необходимо было определять по особому правилу "слева направо" ("Этот меньше этого" - слева направо). Для 3 - 4 детей требовались специальные указания учителя и выполнение ряда особых упражнений, чтобы они усвоили "направление" сравнения. Остальные учащиеся твердо усваивали этот момент после одного-двух разъяснений.

*Учитель.* Слева гиря тяжелее... (показывает на весы). Как это же самое можно сказать по-другому?

*Толя С.* Она (гиря) по весу... весит больше другой.

*Лена К.* Справа гиря меньше весит.

*Учитель.* Правильно. По виду гири как бы одинаковые, а вес разный. Как бы нам это записать - и гири отметить и то, что мы узнали... Запишем наш результат линиями - вот я буду их проводить - слева для левой гири, справа для правой. Сделаю их по длине равными: ведь гири по весу одна меньше другой...

*Ученики.* (Многие сразу поднимают руки; раздается гул удивления.) Нельзя так: ведь гири по весу не равны, а на доске линии одинаковой длины. Нельзя равными их рисовать.

*Учитель.* Так как же быть? Линиями я могу показать, какие гири, или не могу?

*Ученики.* Можете! Только не так!

*Учитель.* А как же? Кто сможет?

*Ученики.* (Поднимается несколько рук)

*Учитель.* (Вызывает трех учеников к доске.) Каждый сделает так, как считает нужным. Остальные рисуют самостоятельно в тетрадях.

Ученики выполняют задание (рисунки правильно выражают отношение), затем вместе с классом обсуждают результат.

На этом уроке затем изображались линиями отношения "больше", "равно" по весу, все три отношения при сравнении по объему, по длительности произнесения звука, по составу комплектуемых групп. Учитель предлагал детям и "обратные" задания: по линиям, нарисованным на доске, подобрать любые предметы, сравнение которых дает этот результат.

Через несколько уроков учащиеся получали неожиданное задание - записать результат сравнения каких-либо детей по росту не линиями, а кругами. Можно ли это сделать? Многие дети ответили утвердительно и самостоятельно выполнили эту запись в тетради или на доске; как правило, соотношение кругов по площади соответствовало результату. Учитель показывал детям, что тот же предмет можно записать еще квадратиками, треугольниками, - важно только, чтобы их соотношение по "размеру" (площади) было таким же, что и при сравнении. Эта работа вызывала у детей большой интерес. Особенно живо они воспринимали задания, когда, например, результат сравнения звуков по громкости можно было записать любыми средствами, кроме "привычных" линий. Ученики использовали круги, треугольники и квадраты, соотношение площадей которых правильно изображало отношение звуков по громкости или длительности. Большинство детей правильно объясняло смысл своих записей, связь между сравниваемыми предметами и их изображениями, а также их различие во всем, кроме "больше - меньше".

Таким образом, в этот период вводились средства записи, физические характеристики которых не имели ничего общего с характеристиками сравниваемых объектов (квадратами записывалась громкость звука и т.п.). Возможность такой записи определяется только *изоморфизмом* самих отношений равенства-неравенства, которые при подобных "перевоплощениях", собственно, и выделяются в чистом виде, превращаются в особый предмет дальнейших действий.

Для детей эта стадия работы имела большое значение. Во-первых, для них была понятной и оправданной сама возможность такого изображения "всего во всем". Во-вторых, теперь многие из них при интерпретации отношения, заданного знаком, стремились не только к подбору каких-либо реальных предметов (палочек, кубиков), но и к "быстрому" изображению отношения условным рисунком в тетради (проводятся линии, набрасываются квадратики - при соответствии указанному знаку). Для детей главным становится само отношение, его тип, а не предметы, в которых оно может проявляться.

На этой основе вводилась новая форма записи - *буквенная* (15-16-й уроки). Прямому введению буквенных формул на этих уроках предшествовала подготовительная работа, смысл которой состоял в том, чтобы детям были ясны два момента:

1. результаты сравнения по одному и тому же признаку можно записывать разными "значками" (линиями, квадратиками, кружками и знаками),
2. эти значки говорят о том, каковы *вес, объем, твердость* и другие признаки данного предмета по сравнению (именно по сравнению) с весом, объемом, твердостью другого или других предметов. Эти моменты обычно отрабатывались на примерах записи результатов сравнения металлической гирьки и деревянного бруска (гирька была тяжелее, но меньше по объему).

Учитель давал детям "свободу" в выборе значков, а затем, демонстрируя тетради, показывал, что у разных детей разные значки (у одних - линии, у других - круги и т.п.). Конечно, "так можно", но лучше выбрать значок, одинаковый и постоянный для всех, - таким значком, говорит учитель, люди выбрали букву. Если сравниваются: например, гирька и брусок по весу, то вес этой гирьки можно обозначить буквой А, вес же бруска - буквой Б (учитель записывает на доске А, Б). Но эти буквы одинакового "размера", этим они отличаются от других значков, например квадратиков. Как же быть? Как прочитать эту запись, если известно, что вес гирьки больше веса бруска? Вес гирьки - А, вес бруска - Б, - учитель таким способом подводил учащихся к цели, и значительная часть детей могла найти выход; дети вначале устно формулировали ответ: "Вес гирьки - это А, он больше веса бруска - Б".

Вместе с детьми учитель устанавливал, что в записи не достает знака "больше", который тут же и ставился - получалась формула А>Б. Эта запись снова расшифровывалась - дети поочередно объясняют ее смысл: "Вес гирьки, он А, он больше Б, веса брусочка". Учитель заменяет эту пару сравниваемых предметов другой - новые гирька и брусок, сохраняя прежнее отношение между собой, отличаются от старых размерами и цветами.

*Учитель.* Какой результат сравнения этих предметов по весу мы получили?

*Ученики.* Опять гирька по весу тяжелее брусочка.

*Учитель.* Вы теперь знаете новый значок для записи результата сравнения. Ну-ка, попытайтесь работать с помощью этого значка. Как записать вес этой гирьки? Вес брусочка? Запишем.

*Ученики.* Буквой А и буквой Б (вместе с учителем записывают в тетрадях А...Б).

*Учитель.* Эта запись уже про все нам говорит?

*Ученики.* Нет! Здесь про вес... а нужно еще про результат...

*Учитель.* Что же нам известно про этот результат? Как его записать здесь, когда у нас есть буквы? Попытайтесь сделать это самостоятельно.

Многие ученики, опираясь на предыдущую запись, ставят знак правильно - между буквами: А>Б; но некоторые дети ставят его строчкой ниже, хотя смысл записи объясняют правильно.

Учитель проверяет работу, еще раз показывает правила записи, место для знаков, спрашивает относительно смысла формулы, ее отдельных значков.

*Учитель.* Читается, ребята, это так: А больше Б. Но что такое А, что такое Б? Про что говорит нам эта запись?

*Ученики.* Запись говорит - мы сравнивали гирьку и брусок по весу: вес гирьки - это А; вес бруска - это Б. По весу гирька больше бруска. Вес гирьки больше веса брусочка. Записано: А больше Б.

Учитель мог заменить эту пару предметов новой и опять сравнивать по весу, но теперь гирька может быть легче бруска - записывалась и расшифровывалась формула А<Б.

Затем эти же предметы могли быть сравниваемы по другому параметру - по объему. При этом учитель специально подчеркивал, что предметы те же, а признак, по которому они сравниваются, меняется. Вначале вместе с учителем дети в устной форме находят, что по объему гирька меньше брусочка.

*Учитель.* Раньше этот результат вы записывали так - левая линеечка короче правой (показывает). Но теперь мы знаем другой значок - букву. Если мы объем этой гирьки обозначим буквой А, то как можно обозначить объем брусочка?

*Ученики.* Буквой Б (впрочем, некоторые дети начинают проявлять инициативу и предлагают другую букву - Г, Д, Ж).

*Учитель.* Хорошо. Запишите так: А...Б. Что такое А; что такое Б?

Ученики отвечают правильно.

*Учитель.* Но можно вес брусочка обозначить и другой буквой - здесь уже предлагали букву Д. Запишем пониже: А...Д. Сделали?

*Ученики.* Нет знака (ставят знак в обеих формулах: А<Б; А<Д).

Далее учитель опрашивает учеников - выясняет с ними смысл формул, устанавливает, что эти формулы говорят про одно и то же: объем гирьки меньше объема брусочка (А *меньше* Б; А *меньше* Д). При этом учитель постоянно обращает внимание детей на то, что буквы "говорят" о признаке, по которому происходит сравнение: в одном случае - о *весе* этой гирьки, в другом - о ее *объеме (твердости, высоте* и т.д.). Но сами по себе буквы результата сравнения не записывают - нужен связывающий их знак. И лишь вся *формула* (этот термин давался детям сразу) говорит об этом результате, о том, каков вес, объем, длина - этого предмета по сравнению с весом, объемом, длиной другого.

В течение нескольких уроков, вводя все новые и новые параметры (громкость и длительность звуков, площадь фигур и реальных предметов, сила удара, состав предметных групп для комплектования), учитель при небольшом наборе букв - А, Б, В, Д - приучал детей к новой форме записи. Во многих заданиях дети, получив формулу, например А=В, должны были подобрать любые предметы.

*Учитель.* Покажите свои предметы. Миша, ты показываешь два новеньких карандашика. Почему же ты выбрал такие карандашики, а не такие (берет с парты ученика карандаши разной длины).

*Миша В.* Такие нельзя - на доске в формуле сказано, что у нас равенство: А равно ведь В. Я взял и сравнил карандаши - и тот по длине равен этому (показывает).

*Учитель.* Хорошо. О чем говорят тебе буквы А и В?

*Миша В.* Они говорят о том, что карандаши равны.

*Учитель.* Об этом говорят буквы? Они сами - вот А и вот В говорят о равенстве?

Ученики поднимают руки. В классе оживление.

*Учитель.* Пока мы не будем ему помогать! Думай.

*Миша В.* (после небольшой паузы). Буквы говорят мне о длине карандашей - этого и этого.

*Учитель.* И все? Если буквы говорят о длине, то я беру карандаш такой длины - это А, и карандаш такой длины - это В: получила А меньше В.

*Ученики.* Так нельзя брать, тогда другая формула.

*Миша В.* У нас равенство - знак равенства стоит. Нужно брать карандаши равной длины, тогда правильно.

*Учитель.* Так что же говорит о самом равенстве?

*Ученики.* Знак, который стоит между буквами - вся формула.

*Учитель.* Я меняю знак в моей формуле - теперь записано А меньше В. Покажите на предметах, что это значит.

Дети находят соответствующие предметы; учитель выясняет основания для выбора - смысл букв, знаков, всей формулы; отметим, что дети показывают предметы, сравниваемые по разным параметрам, в частности, некоторые дети демонстрируют неравенство предметных групп по выбранному критерию.

Особая серия заданий, выполняемых в игровой форме, вводилась для того, чтобы подвести детей к идее того "набора" формул, посредством которого можно выразить все возможные отношения. Учитель, комментируя работу самих учащихся, показывал, что при всех различиях предметов, сравниваемых, например, по длине (здесь и полоски бумаги, и карандаши, и сами дети - при сравнении по росту и т.д.), и при всей разнице длин предметов одного "названия" (например, бумажных полосок) получается либо равенство, либо неравенство, а последнее дает либо "больше", либо "меньше". Поэтому, какие бы предметы ни сравнивались, получаются формулы: либо А=Б, либо А не равно Б. Неравенство уточняется либо как А>Б, либо как А<Б. К этой сетке формул, записанной в тетрадях, дети относили результаты любых частных сопоставлений; на специальном уроке учащиеся под руководством учителя "изощрялись" в выборе предметов, которые можно как-либо сравнивать, и результат сравнения всегда укладывается в одну из этих формул.

В процессе такой работы (кстати, вызывающей у детей большой интерес) учитель вместе с тем требовал отчета о том, какой признак обозначается буквой при соотнесении с нею результата сравнения. Этот момент имеет особое значение, так как дети фактически сталкивались с тем, что к одним и тем же формулам относятся результаты сравнения по длине, по объему, по весу, по силе, но буквы каждый раз говорят о *длине, о силе, о весе* этих предметов, а не о самих предметах.

Требование "конкретизации общего" было очень важным как для работы со "смыслом" формулы, так и для правильного увязывания буквы (знака) с ее объектом - *конкретным, частным значением* той или иной величины. Как уже отмечалось выше, обучение по этой теме мы стремились строить так, чтобы для самих; детей буква (во всяком случае на первом этапе) выступала как обозначение веса, объема, длины и всякого иного параметра данного предмета при сравнении с весом, объемом и длиной другого предмета. Буква выступала здесь в своеобразной функции *общего знака* для любого конкретного значения выделяемого параметра. Поскольку дети фактически выводили формулы при сопоставлении предметов по любым частным значениям этих параметров, а заданные формулы подобным же образом дети могли самостоятельно иллюстрировать, у нас есть основания полагать, что они использовали букву именно в этой функции.

На заключительных уроках темы особое внимание учитель уделял закреплению у детей представления о том, что результат каждого данного сравнения может быть выражен одной и только одной формулой из трех возможных и входящих в установленный "набор". Эта работа обычно проходила в виде "столкновения" разных формул, относимых к результатам одного сравнения. При этом проводилось обсуждение, устанавливающее неправомерность "двойной" или "тройной" записи и выбирающее "правильную" формулу.

Второй вопрос, рассматриваемый на этих уроках, касался довольно тонкого пункта: возможности применения разных букв и пределов такого разнообразия. Прежде всего учитель в ряде случаев не указывал, какие буквы следовало бы употреблять при записи результата сравнения. Ученики по собственной инициативе выбирали буквы. Учитель записывал на доске разные варианты: А>Д; Б>В, Ж>К и т.д., обсуждал вместе с детьми вопрос о том, одинаковые эти формулы или различные. Дети, как правило, самостоятельно устанавливали факт тождественности этих формул, ссылаясь на два момента: во всех случаях стоит знак "больше" и все формулы говорят об одном и том же результате.

Вместе с тем на ряде примеров учитель показывал, что при сравнении по разным признакам лучше употреблять разные буквы, чтобы на этом уроке знать, к чему какая формула относится (хотя на следующем уроке все это теряло смысл, так как те же буквы употреблялись в других ситуациях и т.д.).

Укажем еще один своеобразный момент. На первых порах некоторые дети (их, как правило, было в каждом классе немного) записывали результат сравнения буквами разных размеров, т.е. переносили сюда принцип моделирования предметными значками. Учитель показывал, что в формуле это делать излишне, так как все равно отношение указывается знаком неравенства. На некоторых уроках детям показывались формулы, буквы которых различались по "размерам", но со смыслом, противоположным знаку (например, А<в). Предлагалось подобрать соответствующие предметные иллюстрации; выполняя задание, дети опирались здесь на знак. Учитель же еще раз показывал, что "размер" самих букв может быть любым, - важен смысл формулы, записанной знаком и обозначающий сравнение "каких-либо" предметов (это выражение стало "обиходным" и для самих учащихся).

Работа по данной теме имеет первостепенное значение для развертывания всего начального раздела математики, так как по существу связана с построением в деятельности ребенка особого предмета - системы *отношений*, выделяющих величины как основу дальнейших математических преобразований. Буквенные формулы, заменяющие ряд предварительных способов записи, впервые превращают эти отношения в *абстракцию*, ибо сами буквы обозначают любые конкретные значения любых конкретных величин, а вся формула - любые, возможные отношения равенства или неравенства этих значений. Теперь, опираясь на формулы, можно изучать собственные свойства выделенных отношений, превращая их в особый предмет анализа.

Приведенные выше данные указывают на необходимость особой работы по ознакомлению детей со смыслом некоторых формальных особенностей оперированию математической символикой.

## 3.3 Обучение решению задач, связанных с движением тел

Задачи на движение, рассматриваемые в начальных классах, включают в себя описание процесса движения одного или двух тел. Эти задачи по существу математических зависимостей между величинами, входящими в задачу. структуре и их моделей нельзя отнести к особому виду задач. В качестве примера рассмотрим пары задач и их решения:

1. а) За 6 часов рабочий изготовил 120 одинаковых деталей. Сколько деталей он изготовит за 3 часа?

б) Пароход прошел 120 км за 6 ч. Сколько километров он пройдет за 3 ч, если будет идти с той **же** скоростью?

Эту пару задач можно решить тремя способами:

1-й способ 2-й способ 3-й способ

1)120:6=20 1)6:3=2 6 ч =360 мин

2)20-3=60 2)120:2=60 3ч =180 мин

1)360:120=3

2) 180:3=60

2. а) Из двух городов, находящихся на расстоянии 280 км, выехали одновременно две машины. Через сколько часов машины встретятся, если скорость первой машины 60 км/ч, второй - 80 км/ч?

б) Двум мастерам нужно изготовить 280 одинаковых деталей. За сколько часов они могут это сделать вместе, если первый за 1 ч изготавливает 60 деталей, а второй 80 деталей?

Приведем арифметический и алгебраический способы решения:

280 : (80 + 60) = 2 (80 + 60) • *х =* 240

Как видим, структура, модели и способы решения как арифметические, так и алгебраические полностью совпадают. Однако в методической литературе задачи, связанные с движением тел. традиционно принято выделять в особый тип, так как эти задачи имеют свою особенность. Особенность состоит в том, что они построены на основе функциональной зависимости между величинами: *скорость, время. расстояние.* Методика обучения решению таких задач зачастую связана с использованием чертежа и построена на основе четких представлений о скорости равномерного движения тел и на основе понятий *двигаться навстречу друг другу, двигаться вдогонку, выехали одновременно и встретились, скорость сближения.* Чтобы подготовить детей к восприятию этих понятий, необходимо проводить определенную предварительную работу, которая должна сводиться к формированию умения работать с чертежом, к осознанию понятия «скорость движения» и взаимосвязи между величинами, включенными в задачу.

Однако, как показывает практика обучения, умение решать задачи на движение у учащихся сформировано недостаточно. Например, учащимся были предложены две задачи, одинаковые по структуре, но различные по фабуле. В первой задаче речь шла о покупке тетрадей, во второй о движении тел. С первой задачей справилось значительное большинство учащихся, в то время как с задачей на движение - лишь незначительная часть. Некоторые дети вообще отказались от решения, обосновывая это тем, что задачи на движение они решать не умеют. Думается, что причина этого заключается в том, что дети недостаточно подготовлены к восприятию этих задач.

Альтернативные программы и учебники предусматривают решение более трудных и сложных задач. Рассмотрим задачу № 338 из учебника математики для III класса И. И. Аргинской ([2]):

«Из двух городов навстречу друг другу вы шли одновременно два поезда и встретились через 18 часов. Определить скорость каждой поезда, если расстояние между городами 1620 км, а скорость одного поезда на 10 км/ч больше скорости другого». Реши задачу алгебраическим способом, реши задачу, выполни необходимые действия.

Я в процессе беседы стараюсь подвести учащихся к составлению уравнения.

Пусть скорость одного поезда *у* км/ч, тогда скорость другого у + 10 (км/ч). Скорость сближения поездов *(у + у +* 10 (км/ч). Путь, пройденный ими до встречи *(у + у* + 10) • 18 = 1620.

При решении уравнения учащиеся могут использовать: правило умножения суммы на число (распределительный закон умножения относительно сложения); взаимосвязь между компонентам и результатом действия и только что изученное свойство равенства *(а - в* = с - в. *а = с).*

Рассуждения при этом могут быть такими

*(у + у* + 10) • 18 = 1620

Неизвестен первый множитель. Чтобы найти его, нужно произведение разделить на известный множитель:

*у + у +* 10 = 1620 : 18

*у + у* + 10 = 90

Вычтем из обеих частей равенства по 10, получим:

*у* + *у* = 80

Применяем распределительный закон умножения относительно сложения (а + b) *с* = *а с + b с),* получим (1 + 1) *у* = 80: 2 *у =* 80 Применяем правило нахождения второго множителя (чтобы найти неизвестный множитель, нужно произведение разделить на известный множитель): *у =* 80 : 2. y = 40.

При решении задач алгебраическим способом много времени тратится на оформление записи при составлении уравнения, и детям трудно удержать в уме всю цепочку рассуждений. Зная это, многие учителя используют табличную краткую запись, обозначив скорость одного из поездов буквой:

Скорость Время Расстояние

1. y 18 ч ?

2. у + 10 одинаковое 1620 км

18 ч ?

Такая краткая запись (модель задачи) является результатом аналитико-синтетической деятельности, которая представляет все связи и зависимости в легко обозримой форме и направляет на путь составления уравнения:

*18 у +(у +* 10) 18 = 1620. Решение этого уравнения основано на использовании указанных свойств действий и свойств числовых равенств (равносильности уравнений).

*у* 18 *+у* 18 + 180= 1 620

(18+18)у = 1620-180

*36у =* 1440

*у* = 1440 : 36

*y = 40*

О т в е т: 40 км/ч - скорость первого поезда, 40 + 10 = 50 (км/ч) - скорость второго поезда.

Как видим, составление такой таблицы дает возможность легко подвести детей к составлению уравнения.

Следует, впрочем, ответить, что при решении уравнения учащиеся испытывают трудности, связанные с недостаточным знанием дистрибутивного **за**кона умножения (*ас* + bc = *(а* + в)с ), а также с преобразованиями уравнения, что в свою очередь порождает формальное усвоение изучаемого материала. Учитывая это, многие учителя предлагают решать задачи арифметическим способом. Впрочем, зачастую и здесь решение задачи сопряжено с определенными трудностями, связанными с необходимостью делать те или иные предположения.

Однако представляется, что все-таки приоритет при решении подобного рода задач следует отдавать алгебраическим методам. Аналитико-синтетическая деятельность позволяет учащимся представить все связи и зависимости в доступной форме и в итоге приводит к верному решению.

# Заключение

В настоящее время возникли достаточно благоприятные условия для коренного улучшения постановки математического образования в начальной школе:

1) начальная школа из трехлетней преобразована в четырехлетнюю;

2) на изучение математики в первые четыре года выделяется 700 ч., т. е. почти 40 % всего времени, отводимого этому предмету за всю среднюю школу;

3) учителями начальной школы работает с каждым годом все большее число лиц, имеющих высшее образование;

4) возросли возможности лучшего обеспечения учителей и школьников учебно-наглядными пособиями, причем многие из них выпускаются в цветном исполнении.

Нет необходимости доказывать решающую роль начального обучения математике для развития интеллекта ученика вообще. Богатство базисных ассоциаций, обретаемых школьником за первые четыре года обучения, при правильной постановке дела становится главным условием самонаращивания знаний в последующие годы. Если этот запас исходных представлений и понятий, ходов мыслей, основных логических приемов будет неполон, негибок, обеднен, то при переходе в старшие классы школьники будут постоянно испытывать трудности, независимо от того, кто их будет учить дальше или по каким учебникам они будут учиться.

Как известно, начальная школа функционирует в нашей и других странах много веков, в то время как всеобщее среднее образование осуществляется лишь несколько десятилетий. Понятно отсюда, что теория и практика начального обучения гораздо богаче своими добротными традициями, чем обучение в старших классах.

Драгоценные методические находки и обобщения по начальному обучению математике были сделаны еще Л. Н. Толстым, К. Д. Ушинским, С. И. Шохор-Троцким, В. Латышевым и другими методистами уже в прошлом веке. Значительные результаты были получены в последние десятилетия по методике начальной математики в лабораториях Л. В. Занкова, А. С. Пчелко, а также в исследованиях по укрупнению дидактических единиц.

Между тем современное состояние дела обучения в начальной школе таково, что эффективные пути его совершенствования, освоенные учителями в недавние годы, оказались неожиданно обойденными последними редакциями программ и учебников. Серьезный недостаток действующих сейчас программ — это нарушение преемственности с программами для средних классов.

Так, например, в программах начальных классов не решена проблема пропедевтики ряда важных понятий, которая успешно достигалась ранее в начальной школе. Такой пропедевтики не получилось из-за вымученного растягивания программами традиционного материала, который раньше осваивали гораздо быстрее и продуктивнее. Программа нынешней четырехлетней школы стала менее информативной, чем предшествовавшая ей программа для трехлетней школы.

При разумном учете наличных научных результатов, полученных в последние 20 лет по методике начального обучения различными творческими коллективами, сейчас имеется полная возможность добиться в начальной школе «учения с увлечением».

В частности, знакомство учащихся с базовыми алгебраическими понятиями, несомненно, положительно скажется на освоении учащимися соответствующих знаний в старших классах.

Представляется, что лишение младшего школьника доступного и необходимого знания обернется для него уроном, невосполнимым никогда позже.

Для практики начального обучения математике имеет важнейшее значение прием совмещения на одном уроке (в пространстве одной страницы учебника) взаимно-обратных задач. Поэтому представляется совершенно необходимым пользоваться традиционными названиями основных видов сопоставляемых друг другу задач: если повторение равных слагаемых выступает как умножение, то и обратные им задачи (деление на равные части и деление по содержанию) должны использоваться в учебниках, при планировании и проведении уроков. В действующих программах мы не находим привычных понятий: задач на нахождение суммы, нахождение чисел по двум суммам, на приведение к единице, на пропорциональное деление и т.д. Такое положение отнюдь не является достоинством программ.

Психологом Ж. Пиаже была установлена фундаментальная закономерность обратимости операций, с которой связано методическое понятие «обратная задача». В частности, всякая информация, воспринятая человеком, продолжает циркулировать в подсознании (в неосознаваемой форме) в течение 20-30 мин. И вот, если при умножении 172 на 43 нами получено промежуточное произведение 688, то это же число легче всего проявляется (актуализируется) при решении обратной задачи на деление «уголком» (7396:172). Связь мыслей «умножение – деление» как бы прокручивается здесь дважды.

Таково психофизиологическое объяснение полученных на практике преимуществ более раннего введения алгебраических элементов в начальной школе. Этот вывод подтверждается также личным педагогическим опытом работы автора на уроках математики в начальных классах Рыльской средней школы № 4.

# Библиографический список

1. Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах. / Под ред. М.И. Моро, А.М. Пышкало. – М.: Педагогика, 1977. – 262 с.
2. Аргинская И.И., Ивановская Е.А. Математика: Учебник для 3 класса четырехлетней начальной школы. – Самара: изд. дом «Федоров», 2000. – 192 с.
3. Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М.: Педагогика, 1984. – 301 с.
4. Гонин Е.Г. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1961. – 171 с.
5. Давыдов В.В. Математика, 3 класс: Учебник для 4-летней начальной школы. – М.: Издательский центр «Академия», 1998. – 212 с.
6. Давыдов В.В. Психическое развитие в младшем школьном возрасте. / Под ред. А.В. Петровского. – М.: Педагогика, 1973. – 167 с.
7. Зак А.З. Развитие умственных способностей младших школьников. – М.: Вагриус, 1994.
8. Истомина Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах. – М.: Издательский центр «Академия», 1998. – 288 с.
9. Истомина Н.Б., Нефедова И.Б. Математика, 3 класс: Учебник для 4-летней начальной школы. – Смоленск: изд-во «Ассоциация XXI век», 2001. – 196 с.
10. Каган В.Ф. О свойствах математических понятий. – М.: Наука, 1984. – 144 с.
11. Когаловский С. Р., Шмелева Е. А., Герасимова О. В. Путь к понятию. Иваново, 1998. - 208 с.
12. Колмогоров А.Н. О профессии математика. М.: Изд-во МГУ, 1959. – 134 с.
13. Мойсенко А. В. Концепция школьного математического образования. В кн. Школа самоопределения. Шаг второй. М.: АО "Политекст". 1994. С.392-422.
14. Моро М.И. и др. Математика: Учебник для 3 класса трехлетней начальной школы и 4 класса четырехлетней начальной школы. / Под ред. Калягина Ю.М. – М.: Просвещение, 1997. – 240 с.
15. Моро М.И., Пышкало А.М. Методика обучения математике в 1-3 классах. – М.: Педагогика, 1978. – 312 с.
16. Петерсон Л.Г. Математика, 3 класс. Ч. 1, 2. Учебник для 4-летней начальной школы. – М.: «Баласс», 2001.
17. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. – СП-б: Изд-во «Питер», 1999.
18. Пойя Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1976. - 448 с.
19. Сергеенко А.В. Преподавание математики за рубежом. – М.: изд. центр «Академия», 1995. – 197 с.
20. Сойер У. У. Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972. - 192 с.
21. Тестов В. А. Стратегия обучения математике. М.: ГШБ, 1999. - 304 с.
22. Чуприкова Н.И. Умственное развитие и обучение. Психологические основы развивающего обучения. – М.: Альматея, 1995. – 244 с.
23. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Математика: Пробный учебник для 3 класса четырехлетней начальной школы. – М.: Педагогика, 1999. – 232 с.
24. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Теория и методика обучения математике в начальной школе. – М.: Педагогика, 1988. – 208 с.
25. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике.– М.: Педагогика, 1986. – 197 с.
26. Архангельский А. В. О сущности математики и фундаментальных математических структурах // История и методология естественных наук (Москва) – 1986. - №32. - С.14-29.
27. Брейтнгам Э.К. Обучение математике в личностно-ориентированной модели образования. // Педагогика. – 2000. - № 10. – С. 45-48.
28. Волошкина М.И. Активизация познавательной деятельности младших школьников на уроке математики. // Начальная школа. – 1992. - № 9/10. – С. 15-18.
29. Гальперин П.Я., Георгиев Л.С. К вопросу о формировании начальных математических понятий. Сообщения I - V. // Доклады АПН РСФСР, 1960, № 1, 3, 4-6.
30. Доронина И.М. Использование методики УДЕ на уроках математики в III классе. // Начальная школа. – 1999. - № 11. – С. 29-30.
31. Концепция математического образования (в 12-летней школе) // Математика в школе. - 2000- № 2. - С.13-18.
32. Мартынова О.А. Из опыта обучения математике по системе УДЕ. // Начальная школа. – 1993. - ; 4. – С. 29-31.
33. Пентегова Г.А. Развитие логического мышления на уроках математики. // Начальная школа. – 2000. - № 11. – С. 74-77.
34. Укурчиева Т.А. Актуализация резервов мыслительных операций при обучении математике. // Начальная школа. – 1999. – № 11. – С. 17-18.
35. Шатуновский Я. Математика как изящное искусство и ее роль в общем образовании. // Математика в школе. – 2001. - № 3. – С. 6-11.
36. Шикова Р.Н. Решение задач на движение в одном направлении. // Начальная школа. – 2000. - № 12. – С. 48-52.
37. Эльконин Д.Б. Психологические исследования в начальной школе. // Советская педагогика. – 1961. - № 9. – С. 22-31.
38. Эрдниев П.М. Укрупненные знания как условие радостного обучения. // Начальная школа. – 1999. - № 11. – С. 4-11.