Министерство образования и науки Украины

Донецкий национальный технический университет

РЕФЕРАТ

по высшей математике

на тему:

**«Производная и ее применение в экономической теории»**

Донецк – 2008

**Вступление**

Современный экономист должен хорошо владеть количественными методами анализа. К такому выводу нетрудно прийти практически с самого начала изучения экономической теории. При этом важны как знания традиционных математических курсов (математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей), так и знания, необходимые непосредственно в практической экономике и экономических исследованиях (математическая и экономическая статистика, теория игр, эконометрика и др.).

Математика является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования. Она служит средством предельно четкой и ясной формулировки экономических понятий и проблем.

Ф.Энгельс в своё время заметил, что "лишь дифференциальное исчисление даёт естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение". Поэтому целью моей работы является выяснить, каков экономический смысл производной,какие новые возможности для экономических исследований открывает дифференциальное исчисление, а также исследовать применение производной при решении различных видов задач по экономической теории.

**1.** **Определение производной**

Пусть функция *y=f(х)* определена в некоторой окрестности точки *х0*. Для любой точки *х* из этой окрестности приращение Δ*x* определяется формулой Δ*x=х – х0*, откуда *х=х0+*Δ*x*.

***Приращением*** функции *y=f(x)* в точке *х0* называется разность

Δ*у=f(x) – f(x0)=f(x0+*Δ*x) – f(x0).*

***Производной*** от функции *у=f(x)* в точке *х0* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента (), когда приращение аргумента стремится к нулю (Δ*x*→*0*).

Производная функции *у=f(x)* в точке *х0* обозначается *y'(х0)* или *f'(х0)*. Определение производной можно записать в виде формулы:

'()== .

Если функция в точке *х0* имеет конечную производную, то она называется дифференцируемой в точке *х0*. Если она дифференцируема во всех точках промежутка *X*, то говорят, она дифференцируема на всём этом промежутке.

Конечно, может не существовать. В этом случае говорят, что функция *f(x)* не имеет производной в точке *х0.* Если равен или , то говорят, что функция *f(x)* имеет в точке *х0* бесконечную производную (равную или , соответственно).

**1.1 Геометрический смысл понятия производной**

Пусть на плоскости *x0y* дана непрерывная кривая *y=f(x)*(см. рис. 1).

Рассмотрим на графике кривой точки *Mo(xo;f(xo))* и *M1(**xo+Δx; f(xo+Δx))*. Проведем секущую *MoM**1*. Пусть *–* угол наклона секущей *MoM1* относительно оси *0х*. Если существует предел , то прямая, проходящая через *Mo* и образующая с осью *0х* угол , называется ***касательной*** к графику данной кривой в точке *Mo.* Таким образом, под касательной к кривой *y=f**(х)* в точке *Mo* естественно понимать предельное положение секущей *MoM1**,* к которому она стремится, когда Δ*x*→*0*.

Пусть *N(xo+Δx; f(xo)) –* точка, дополняющая отрезок *MoM1* до прямоугольного треугольника *MoM1N.* Так как сторона *MoN* параллельна оси 0*х,* то

Переходя к пределу в левой и правой частях этого равенства при Δ*x*→*0,* получим

Поэтому геометрический смысл производной состоит в том, что *f’(x0)* – это тангенс угла наклона (угловой коэффициент) касательной к графику *y=f(х)* в точке *(xo; f(xo)).*

Найдём уравнение касательной к графику в точке *Mo(xo; f(xo))* в виде *y=kx+b.* Так как *Mof(x),* то должно выполняться равенство *f(x0)=kx0+b,* откуда *b= f(x0) – kx0.* Следовательно, касательная задаётся уравнением

*y=kx+f(x0) – kx0=f(x0)+k(x – x0).*

Поскольку *k=f'(x0),* то уравнение касательной имеет вид

*y=f(x0)+f'(x0)(x – x0).*

Как вычисляют производную?

1. Записывают функцию в виде *y=f(х).*

2. Вычисляют Δy – приращение функции: Δ*у=f(x+*Δ*x) – f(x).*

3. Составляют отношение

4. Представляют, что Δx стремится к нулю, и переходят к пределу = *y'(х0)*.

5. Вычисляют производную в точке *х0: y'(х)= y'(х0).*

Операция вычисления производной называется ***дифференцированием.***

Примеры дифференцирования:

Δ*y=a(x+*Δ*x)2 – ax2=2ax*Δ*x+a*Δ*x2;*

=*2ax*+Δ*x;* =*2ax,* ⇒ *(ах2)'=2ax*.

;

=;

=*3x2,* ⇒ *(x3)'=3x2*.

;

= *–*, ⇒

**1.2 Дифференциал функции**

***Дифференциалом*** функции *f(х)* в точке *х0* называется линейная функция приращения вида

Дифференциал функции *y=f(х)* обозначается *dy* или *df(x0).* Главное назначение дифференциала состоит в том, чтобы заменить приращение на линейную функцию от , совершив при этом, по возможности, меньшую ошибку.

Наличие конечной производной даёт возможность представить приращение функции в виде

где при . Из этого следует, что ошибка в приближённом равенстве (равная ) является бесконечно малой более высокого порядка, чем , когда . Это часто используют при приближённых вычислениях.

**1.3 Применение производной к исследованию функций**

Очень часто при решении экономических задач возникает необходимость принять решение на основе исследования и анализа функций спроса, предложения, издержек, прибыли и т.д. При этом удобно пользоваться дифференциальным исчислением.

1. Возрастание/убывание функции

*Если дифференцируемая функция y=f(х), х возрастает на интервале то f'(x0) для любого х0*

*Если дифференцируемая функция y=f(х), х убывает на интервале то f'(x0) для любого х0*

2. Экстремумы функции

Точка *х0* из области определения функции *f(х)* называется ***точкой минимума*** этой функции, если найдётся такая - окрестность точки *х0*, что для всех из этой окрестности выполняется неравенство *f(х)> f(х0).*

Точка *х0* из области определения функции *f(х)* называется ***точкой максимума*** этой функции, если найдётся такая - окрестность точки *х0*, что для всех из этой окрестности выполняется неравенство *f(х)< f(х0)*.

Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках называются ***экстремумами функции***.

Необходимые условия существования экстремума даёт ***теорема Ферма***:

*Пусть функция y = f(x) определена на интервале (a, b) и в некоторой точке x0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение. Тогда возможны только два случая:*

1. *производная функции f'(x0) не существует;*
2. *f'(x0)=0*.

Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются ***критическими точками*** (первого рода). Экстремум функции, если он существует, может быть только в критических точках. Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Поэтому, чтобы выяснить, в каких точках функция имеет экстремум, необходимо знать достаточные условия существования экстремума.

**Первое достаточное условие экстремума.** Пусть функция *y=f(х)* непрерывна в точке *х0* и в некоторой её - окрестности имеет производную, кроме, быть может, самой точки *х0.* Тогда:

1) если производная *f'(x)* при переходе через точку *х0* меняет знак с плюса на минус, то *х0* является точкой максимума.

2) если производная *f'(x)* при переходе через точку *х0* меняет знак с минуса на плюс, то *х0* является точкой минимума.

3) если производная при переходе через точку *х0* не меняет знак, то в точке *х0* функция *f(x)* не имеет экстремума.

**Второе достаточное условие экстремума.** Если функция *y=f(х)* определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки *х0,* причём *f'(x0)=0,* а *f''(x0)0,* то в точке *х0* функция *f(х)* имеет максимум, если *f''(x0)<0, и* минимум, если *f''(x0)>0.*

3. Выпуклость графика функции

График функции *y=f(х), х(a,b)* называется ***выпуклым вверх (вогнутым вниз)*** на интервале *(a,b),* если график расположен ниже (точнее не выше) любой своей касательной. Сама функция *f(х)* также называется выпуклой вверх (вогнутой вниз).

График функции *y=f(х), х(a,b)* называется ***выпуклым вниз (вогнутым вверх)*** на интервале *(a,b),* если график расположен выше (точнее не ниже) любой своей касательной. Сама функция *f(х)* также называется выпуклой вниз (вогнутой вверх).

На интервале выпуклости вверх (вогнутости вниз) производная функции убывает. На интервале выпуклости вниз (вогнутости вверх) производная *f'(x)* возрастает.

**Достаточное условие выпуклости графика функции.** Если на интервале *(a,b)* дважды дифференцируемая функция *y=f(х), х(a,b)* имеет отрицательную (положительную) производную второго порядка, то график функции является выпуклым вверх (вниз).

Исследовать на выпуклость график функции *y=f(х)* означает найти те интервалы из области её определения, в которых вторая производная *f''(x)* сохраняет свой знак. Необходимо заметить, что *f''(x)* может менять свой знак лишь в точках, где *f''(x)=0* или не существует. Такие точки принято называть критическими точками второго рода.

**2. Экономический смысл понятия производной**

**2.1 Предельные величины**

Если спросить экономиста “Что такое производная?”, то он ответит: «маржинализм». Слово «маржинализм» охватывает целый комплекс понятий в современной экономической науке.

В ХIХ в. в области экономической теории произошло событие, которое впоследствии привело к подлинному перевороту в методах экономического поведения людей или фирм, изменило характер научно-экономического мышления. Классическая наука обычно имела дело со средними величинами: средняя цена, средняя производительность труда и т.д. Но постепенно сложился иной подход к анализу экономических процессов и явлений. Во второй половине ХIХ в. была сформулирована теория ***маржинализма***. Классиками этой теории стали экономисты австрийской школы К. Менгер (1840-1921), Ф. фон Визер (1851-1926), Е. фон Бём-Баверк (1851-1914), а также английский экономист У.С. Джевонс (1835-1882).

"Marginal" в переводе с английского языка означает "находящийся на самом краю", "предельный", "граничный". К предельным величинам в экономике относятся: предельные издержки, предельный доход, предельная полезность, предельная производительность, предельная склонность к потреблению и т.д. Понятие предельных величин позволило создать совершенно новый инструмент исследования и описания экономических явлений, посредством которого стало возможно решать научные проблемы, прежде не решённые или решённые неудовлетворительно. Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной. Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение экономического объекта. Следовательно, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) с течением времени или относительно другого исследуемого фактора.

Конечно, экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу неделимости многих экономических расчетов, а также прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). В то же время во многих случаях можно эффективно использовать предельные величины.

Рассмотрим ситуацию: пусть *q* – количество произведённой продукции, *ТC(q)* – соответствующие данному выпуску совокупные издержки (total costs), тогда Δ*q –* прирост продукции, а Δ*ТС* – прирост издержек производства.

***Предельные издержки МС*** (marginal costs) выражают дополнительные затраты на производство каждой дополнительной единицы продукции. Другими словами,

где Используя равенство получим

Итак, предельные издержки есть не что иное, как первая производная от совокупных издержек, если последние представлены как функция от выпускаемого количества продукции.

Аналогичным образом определяются и многие другие экономические величины, имеющие предельный характер.

***Предельная выручка MR (marginal revenue)*** – это дополнительный доход, полученный при переходе от производства n-ной к (n+1)-ой единице продукта. Она представляет собой первую производную от выручки:

.

Для хозяйствующего субъекта, который действует в условиях совершенной конкуренции: TR = P\*Q, где TR – выручка (total revenue); P – цена (price). Таким образом , ⇒ MR= P. Это равенство верно для рынка совершенной конкуренции.

Любой индивид использует свой доход ***Y*** после уплаты налогов на потребление ***C*** и сбережение ***S***. Ясно, что лица с низким доходом целиком используют его на потребление, а на сбережение средств не остается. С ростом дохода субъект не только больше потребляет, но и больше сберегает. Как установлено экономической наукой, потребление и сбережение зависят от размера дохода:

*Y= C(Y) + S(Y).*

Использование производной позволяет определить такую категорию, как ***предельную склонность к потреблению MPC (marginal property to consume)***, показывающую долю прироста личного потребления в приросте дохода:

.

По мере увеличения доходов *MPC* уменьшается. Долю прироста сбережений в приросте дохода показывает ***предельная склонность к сбережению MPS (marginal propensity to save)***:

С увеличением доходов MPS увеличивается.

Поскольку ограниченность ресурсов принципиально не устранима, то решающее значение приобретает отдача от факторов производства. Здесь также применима производная, как инструмент исследования. Пусть применяемый капитал постоянен, а затраты труда увеличиваются. Можно ввести в экономический анализ следующую категорию – ***предельный продукт труда MPL (marginal product of labor)*** – это дополнительный продукт, полученный в результате дополнительных вложений труда при неизменной величине капитала:

.

Если вложения осуществляются достаточно малыми порциями, то

,

так как *dY* - результат, *dL* - затраты, то *MPL* – предельная производительность труда.

Аналогично, ***MPK (marginal product of capital)*** – ***предельный продукт капитала*** – дополнительный продукт, полученный в результате дополнительных вложений капитала *K* при неизменной величине труда:

.

Если вложения осуществляются малыми порциями, то

.

*MPk* характеризует предельную производительность капитала.

Категория ***предельной полезности*** ***MU*** ***(marginal utility)*** выражает дополнительную полезность от каждой дополнительной потреблённой единицы блага:

При бесконечно малых изменениях предельная полезность есть производная от совокупной полезности, которая представлена как функция от потребляемого количества продукта:

**2.2 Эластичность спроса и предложения**

Для исследования экономических процессов часто используется понятие ***эластичности функции*.**

Понятие эластичности было введено Аланом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. По существу, это понятие является чисто математическим.

***Эластичностью функции Еxy(x0)*** называется предел отношения относительного приращения функции *y* к относительному приращению переменной *x* при Δ*x→0*:

.

Коэффициент эластичности *y* по *х* показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция *y = f(x)*, при изменении независимой переменной *x* на 1%.

Очень широко применяется понятие эластичности в экономическом анализе.

В экономике существует несколько видов эластичности.

*- Эластичность спроса по цене (прямая)*

показывающая относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.

Если *=0,* то спрос на данный товар называется абсолютно неэластичным. Поведение покупателя: цена снижается – количество покупаемого товара не изменяется; цена растёт – количество покупаемого товара также не изменяется. К подобным товарам относятся инсулин, товары Гиффена (товары первой необходимости) и т.д.

Если *0,* то спрос на данный товар называется неэластичным или относительно неэластичным. Поведение покупателя: цена снижается – темп роста спроса ниже темпа снижения цены; цена растёт – темп снижения спроса ниже темпа роста цены.

Если *=1,* то говорят, что товар имеет единичную эластичность. Поведение покупателя: цена снижается – темп роста спроса равен темпу снижения цены; цена растёт – темп снижения спроса равен темпу роста цены.

Если *>1,* то спрос на данный товар называется эластичным или относительно эластичным. Поведение покупателя: цена снижается – темп роста спроса выше темпа снижения цены; цена растёт – темп снижения спроса выше темпа роста цены.

Если *,* то спрос на данный товар называется абсолютно эластичным. Поведение покупателя: цена снижается – объём покупок неограниченно возрастает; цена растёт – объём покупок падает почти до нуля.

*- Эластичность спроса по доходу*

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителя этого блага на один процент. Положительная эластичность спроса по доходу характеризует качественные (супериорные) товары, отрицательная – некачественные (инфериорные) товары.

Так, высокий положительный коэффициент эластичности спроса по доходу в отрасли указывает, что её вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение и процветание в будущем. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то её может ожидать застой и перспектива сокращения производства.

*- Ценовая эластичность ресурсов*

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-либо ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (соответственно, заработной платы) на один процент.

**3**. **Приложение производной в экономической теории**

Проанализировав экономический смысл производной, нетрудно заметить, что многие законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем. Для примера рассмотрим экономическую интерпретацию ***теоремы Ферма***.

Пусть *q –* выпуск продукции (в натуральных единицах); *TR(q) –* выручка от продаж; *TC(q) –* издержки производства, связанные с выпуском *q* единиц продукции. Тогда прибыль

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) Функции *TR(q), TC(q)* определены на полуинтервале и дифференцируемы при *q>0.*

2) Максимум прибыли достигается в некоторой точке *q\*0*.

В случае, когда максимум прибыли положителен , условие *q\*0* естественным образом выполняется, поскольку (нет выпуска – нет выручки, нет выручки – нет прибыли).

Итак, условия 1), 2) выполнены. Тогда функция дифференцируема и имеет на интервале максимум в точке *q\*0*. По теореме Ферма, . Так как , то в точке *q=q\** получаем равенство

*TR'(q\*)=TC'(q\*) или MR=MC.*

В экономической теории данное равенство иллюстрирует один из базовых законов теории производства, согласно которому фирма, максимизирующая свою прибыль, устанавливает объём производства таким образом, чтобы предельная выручка была равна предельным издержкам.

В случае, когда объём производства *q* не влияет на цену продукции *p,* имеем *TR(q)=p\*q, TR'(q)=p.* Равенство *TR'(q\*)=C'(q\*)* принимает вид *p=TC'(q\*).*

**4. Использование производной при решении задач по экономической теории**

***Задача №1:*** Функция спроса имеет вид *QD=100 – 20p*, постоянные издержки *TFC (total fixed costs)* составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки *TVC (total variable costs)* на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.

***Решение:*** Прибыль есть выручка минус издержки:

*П=TR – TC,*

где *TR=p\*Q; TC=TFC+TVC.*

Найдём цену единицы продукции:

*20p=100 – Q p=5 – Q/20.*

Тогда

*П=(5 – Q/20)Q – (50 + 2Q)= – Q2 + 60Q - 1000 → max*

Найдём производную: *П'(Q)= –2Q+60.*

Приравняем производную к нулю: *–2Q+60=0 Q=30.*

При переходе через точку *Q=30* функция *П(Q)* меняет свой знак с плюcа на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объём выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.

***Задача №2:*** Объём спроса на продукцию предприятия выражается формулой: *QD=200 – 4p*, а объём предложения – *QS=6p – 100*. Величина переменных издержек на единицу продукции *TVC=25*. Чему должна быть равна цена на единицу продукции *p*, чтобы прибыль *П* была максимальной?

***Решение:*** В точке потребительского равновесия *QS=QD*, то есть

*6p0 – 100=200 – 4p0*,

откуда *p0= 30 (ден.ед.)* – равновесная цена, ⇒ *Q0=80 (ед.) –* равновесный объём продукции.

Изобразим графически кривые спроса и предложения, а также точку потребительского равновесия, находящуюся на их пересечении (см. рис. 2).

Рассмотрим три возможных варианта:

1) *p>p0,* ⇒ *Q=QD*, то есть *П=QDp – QD TVC=QD(p – TVC)*,

подставим значения и получим:

*П=(200 – 4p)\*(p – 25)= –4p2 + 300p – 5000.*

2) *p=p0,* ⇒ *Q=QD=QS, ⇒ Qпродажи=Q0=80 (ед.),* ⇒

*П2=80\*(30 – 25)=400 (ден. ед.).*

3) *p<p0:* ⇒ *Q= QS*, то есть *П=QSp – QS TVC=QS(p – TVC)*,

подставим значения:

*П=(6p – 100)(p – 25)=6p2 – 250p + 2500.*

Далее случаи (1) и (3) можно решать аналитически, подставляя различные значения цены из интервала её значений или как-либо иначе, но гораздо проще выявить экстремумы прибыли через производную:

1) *П= – 4p2 + 300p – 5000*

*П'= – 8p + 300;*

*– 8p + 300=0* ⇒ *p=75/2=37,5 (ден. ед.).*

Значит, *Q=QD=200 – 4\*37,5=200 – 150=50 (ед.),* а

*П1= – 4p2 + 300p – 5000= – 4\*(37,5)2+300\*37,5 – 5000=****625 (ден. ед.)****.*

2) Во втором случае прибыль была уже найдена: *П2=****400 (ден. ед.).***

3) *П=6p2 – 250p + 2500*

*П'=12p – 250;*

*12p – 250=0* ⇒ *p=125/6=205/6 (ден. ед.).*

Значит, *Q=QS=6\*205/6 – 100=125 – 100=25 (ед.),* a

*П3=6p2 – 250p + 2500=6\*(205/6)2 – 250\*205/6+2500=* ***– 1041/6******(ден. ед.).***

Можно заключить, что прибыль максимальна в первом случае, следовательно, цена единицы продукции должна равняться *37,5* денежным единицам.

***Задача №3:*** Какова максимальная выручка монополиста, если спрос вплоть до пересечения с осями описывается линейной функцией *Q=b – ap*, где *p* - цена товара, выпускаемого монополистом; *a* и *b* – коэффициенты функции спроса?

***Решение:*** Выручка *TR=Qp=p(b – ap)* достигнет максимума при равенстве нулю производной по цене:

*TR'=(p(b – ap))'=0.*

*TR'=p'\*(b – ap)+ (b – ap)'\*p=b – ap – ap=b – 2ap=0* ⇒ *p=* ⇒

⇒ *Q=b – ap=b - a=.*

При этом максимум выручки составит

***Задача №4:*** Найти оптимальный объёмпроизводства фирмы, функция прибыли которой задана таким образом: *П(q)=TR(q) – TC(q)=q2 – 8q + 10.*

***Решение:*** Найдём производную данной функции:

*П*

Приравняем производную к нулю и найдём точку экстремума:

*П*

Является ли объём выпуска, равный четырём единицам продукции, оптимальным для фирмы? Чтобы ответить на этот вопрос, надо проанализировать характер изменения знака производной при переходе через точку экстремума.

При *П* и прибыль убывает.

При *П* и прибыль возрастает.

Как видим, при переходе через точку экстремума производная меняет свой знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке экстремума прибыль принимает минимальное значение, и таким образом, этот объём производства не является оптимальным для фирмы.

Каким же всё-таки будет оптимальный объём выпуска для данной фирмы? Ответ на этот вопрос зависит от дополнительного исследования производственных возможностей фирмы. Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции (*П(q=8)=П(q=0)=10*), то оптимальным решением для фирмы будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и/или оборудования. Если же фирма способна производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции, то оптимальным решением для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных возможностей.

 ***Задача №5:*** Найти объём производства, при котором фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, будет получать максимальную прибыль, если *p=15, TC(q)=q3 + 3q*.

***Решение:*** Прибыль фирмы, действующей на рынке совершенной конкуренции, максимизируется при равенстве предельной выручки и предельных издержек: *MR=MC.* Поскольку при совершенной конкуренции наблюдается равенство цены и предельной выручки: *P=MR*, то можно утверждать, что фирма максимизирует прибыль при *P=MC.*

Найдём предельные издержки: *MC=TC'=3q2 + 3.*

*3q2 + 3=15;*

*3q2=12* ⇒ *q=2.*

Итак, мы выяснили, что при цене *p=15* фирма предложит на продажу 2 единицы продукции.

***Задача №6:*** Пусть – издержки фирмы-монополиста, *QD(p)=40 – 2p* – функция спроса. Найти оптимальный для данной монополии объём производства и соответствующую цену единицы продукции.

***Решение:*** Выразим зависимость цены от количества произведённой продукции:

Тогда прибыль будет равна:

В точке *q0* максимума прибыли выполняется равенство Отсюда оптимальный для монополиста объём производства равен *q0=10.* Соответствующая цена будет:

*p0=p(q0)=*

При этом предельные издержки Таким образом, цена, наиболее выгодная для данной монополии, в полтора раза выше её предельных издержек.

***Задача №7:*** Объём продукции *u* цеха в течение рабочего дня представляет функцию где *t* – время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

***Решение:*** За период времени от *t0=2* до (*t0 + Δt*) количество произведенной продукции изменится от *u0=u(t0)* до значения *u0+Δu = u(t0+Δt)*. Средняя производительность труда за этот период времени составит *Δu/Δt*. Следовательно, производительность труда в момент *t0* можно определить, как предельное значение средней производительности труда за период времени от *t0* до (*t0+Δt*) при *Δt→0*, то есть

u'(t)=

Итак, производительность труда в момент времени через 2 часа после начала работы составит 43 единицы продукции в час.

**Заключение**

В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Производная является важнейшим инструментом экономического анализа, позволяющим углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с помощью математических формул.
2. При помощи производной можно значительно расширить круг рассматриваемых при решении задач функций.
3. Экономический смыслпроизводной состоит в следующем: производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или относительно другого исследуемого фактора.
4. Наиболее актуально использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т. д.).
5. Производная находит широкое приложение в экономической теории. Многие, в том числе базовые, законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем (например, представляет интерес экономическая интерпретация теоремы Ферма, выпуклости функции и т. д.).
6. Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории.

**Словарь экономических терминов**

***Производственные возможности фирмы –*** совокупность факторов производства, которыми располагает фирма и имеющийся уровень технологии их использования.

***Факторы производства –*** то, что участвует в процессе производства и способствует созданию конечного продукта (товара или услуги): труд, земля, капитал, предпринимательская способность.

***Спрос –*** количество товаров и услуг, которое желает и имеет возможность приобрести потребитель по каждой конкретной цене.

***Предложение –*** количество товаров и услуг, которое желает и имеет возможность предложить производитель по каждой конкретной цене.

***Монополия –*** специфический вид конкуренции, при котором на рынке присутствует единственный продавец, производящий специфический, не имеющий близких заменителей продукт и может оказывать значительное влияние на рыночную цену. Единственной границей установления цены является платежеспособный спрос и цена на мировом рынке.

***Совершенная конкуренция –*** вид конкуренции, при котором на рынке действует множество продавцов и покупателей, доля каждого из которых на рынке незначительна. Производится однородная продукция и отсутствует возможность влияния на рыночную цену (она устанавливается путём взаимодействия спроса и предложения).

***Постоянные издержки –*** ***TFC(total fixed costs) –*** затраты, которые не изменяются при изменении объёма производства: амортизация, арендная плата, зарплата управленческого персонала, коммунальные услуги (не связанные с объёмом производства) и т.д.

***Переменные издержки –*** ***TVC(total variable costs) –*** затраты, которые изменяются при изменении объёма производства: затраты на сырьё, материалы и топливо, зарплата рабочих, коммунальные услуги (связанные с объёмом производства) и т.д.

***Благо –*** это предмет, явление, продукт труда, удовлетворяющий определённую человеческую потребность и отвечающий интересам, целям, устремлениям людей.

***Товар –*** специфическое экономическое благо, произведённое для обмена.

***Услуги –*** целесообразная деятельность человека, результат которой имеет полезный эффект, удовлетворяющий какие-либо потребности человека. Специфика услуг как товара состоит в том, что потребительная стоимость услуги не имеет вещественной формы, также услугу нельзя накопить, она может быть потреблена в момент производства.