**Решение иррациональных уравнений.**

Реферат выполнен Верхошанской Светланой Александровной, ученицей 9”Г” класса.

МОУ “Ульканская средняя общеобразовательная школа №2”.

Улькан

2005

**Историческая справка об иррациональных уравнениях.**

“Источником алгебраических иррациональностей является двузначность или многозначность задачи; ибо было бы невозможно выразить одним и тем же вычислением многие значения, удовлетворяющие одной и той же задаче, иначе, чем при помощи корней…; они же разве только в частных случаях могут быть сведены к рациональностям”.

(Лейбниц Г.)

Одной из конкретных причин появления математических теорий явилось открытие иррациональностей. Вначале это произошло в пределах геометрических изысканий в виде установления факта несоизмеримости двух отрезков прямой. Значение этого открытия в математике трудно переоценить. В математику, едва ли не впервые, вошла сложная теоретическая абстракция, не имеющая аналога в донаучном общечеловеческом опыте. Вероятно, самой первой иррациональностью, открытой древнегреческими математиками, было число . Можно с определённой уверенностью считать, что исходным пунктом этого открытия были попытки найти общую меру с помощью алгоритма попеременного вычитания, известного сейчас как алгоритм Евклида. Возможно также, что некоторую роль сыграла задача математической теории музыки: деление октава, приводящее к пропорции 1:п=п:2. Не последнюю роль сыграл и характерный для пифагорейской школы общий интерес к теоретико-числовым проблемам.

Древние математики нашли довольно быстро логически строгое доказательство иррациональности числа  путём сведения этого доказательства к формальному противоречию. Пусть , где m и n – взаимно простые числа. Тогда m2=2n2, откуда следует, что т2 чётное и, следовательно, п2 чётное. Чётно, следовательно и п. Получающееся противоречие (п не может быть одновременно и чётным и нечётным) указывает на неверность посылки, что число  рационально.

Для исследования вновь открываемых квадратичных иррациональностей сразу же оказалось необходимым разрабатывать теорию делимости чисел. В самом деле, пусть , где p и g - взаимно просты, а п является произведением только первых степеней сомножителей отсюда р2=пg2. Если t – простой делитель п, то р2 (а значит, и р) делится на t. Следовательно, р2 делится на t2. Но в п содержится только первая степень t. Значит g2 (равно как и g) делится на t. Но этот результат формально противоречит предположению, что р и g взаимно просты.

Вслед за иррациональностью числа  были открыты многие другие иррациональности. Так, Архит (около 428-365 до н.э.) доказал иррациональность чисел вида . Теодор из Кирены (V в. до н.э.) установил иррациональность квадратного корня из чисел 3,5,6,…,17, которые не являются полным квадратом. Теэтет (410-369 до н.э.) дал одну из первых классификаций иррациональностей.

С появлением иррациональностей в древнегреческой математике возникли серьёзные трудности как в теоретико-числовом, так и в геометрическом плане.

**Решение иррациональных уравнений.**

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными. Таково, например, уравнение .

При решении иррациональных уравнений полученные решения требуют проверки, потому, например, что неверное равенство при возведении в квадрат может дать верное равенство. В самом деле, неверное равенство  при возведении в квадрат даёт верное равенство 12= (-1)2, 1=1.

Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, используя равносильные переходы.

Пример 1. Решим уравнение .

Возведём обе части этого уравнения в квадрат и получим , откуда следует, что , т.е. .

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. Действительно, при подстановке их в данное уравнение получаются верные равенства:

 и 

Следовательно, x=3 или x=-3 – решение данного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение .

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим . После преобразований приходим к квадратному уравнению , корни которого и .

Проверим, являются ли найденные числа решениями данного уравнения. При подстановке в него числа 4 получим верное равенство , т.е. 4 - решение данного уравнения. При подстановке же числа 1 получаем в правой части -1, а в левой части число 1. Следовательно, 1 не является решением уравнения; говорят, что это посторонний корень, полученный в результате принятого способа решения.

Ответ: .

Пример 3. Решим уравнение .

Возведём обе части этого уравнения в квадрат: , откуда получаем уравнение , корни которого  и . Сразу ясно, что число -1 не является корнем данного уравнения, т.к. обе части его не определены при . При подстановке в уравнение числа 2 получаем верное равенство , следовательно, решением данного уравнения является только число 2.

Пример 4. Решим уравнение .

Возведя в квадрат обе части этого уравнения, получаем , , . Подстановкой убеждаемся, что число 5 не является корнем данного уравнения. Поэтому уравнение не имеет решений.

Пример 5. Решим уравнение .

По определению  - это такое неотрицательное число, квадрат которого равен подкоренному выражению. Другими словами, уравнение равносильно системе:



Решая первое уравнение системы, равносильное уравнению , получим корни 11 и 6, но условие выполняется только для . Поэтому данное уравнение имеет один корень .

Пример 6. Решим уравнение .

В отличие от рассмотренных ранее примеров данное иррациональное уравнение содержит не квадратный корень, а корень третьей степени. Поэтому для того, чтобы “избавиться от радикала”, надо возвести обе части уравнения не в квадрат, а в куб: . После преобразований получаем:

Итак, , .

Пример 7. Решим систему уравнений:

Положив и , приходим к системе

Разложим левую часть второго уравнения на множители: - и подставим в него из первого уравнения . Тогда получим систему, равносильную второй:

Подставляя во второе уравнение значение v, найденное из первого , приходим к уравнению , т.е. .

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: и .

Соответствующие значения v таковы: и . Переходя к переменным х и у, получаем: , т.е. , , , .

**Преобразование иррациональных выражений.**

Если знаменатель дроби содержит иррациональное выражение, то часто целесообразно избавиться от последнего.

Рассмотрим некоторые типичные случаи:

Пример:

При непосредственном возведении в квадрат обеих частей уравнения уравнение должно быть сначала преобразовано так, чтобы в одной части стояли только радикалы, а в другой – остальные члены исходного уравнения. Так поступают, если радикалов в уравнении два. Если же их три, то два из них оставляют в одной части уравнения, а третий переносят в другую. Затем обе части уравнения возводят в квадрат и проводятся необходимые преобразования (приведение подобных и т.п.). Далее все члены уравнения, не содержащие радикалов, снова переносятся в одну сторону уравнения, а оставшийся радикал (теперь он будет только один!) – в другую. Полученное уравнение вновь возводят в квадрат, и в итоге получается уравнение, не содержащее радикалов.

Пример. Введение новой переменной:

.

Решение: Обозначим , тогда

Уравнение примет вид:

Возведём его в квадрат:

Это уравнение так же возводим в квадрат:

Проверка: полученные значения t мы должны проверить в уравнении (1), так как именно оно возводилось в квадрат. Проверка показывает, что - посторонний корень, а - действительно корень уравнения (1). Отсюда получим:



Ответ: 0;-1.

**Уравнения с радикалом третьей степени.**

При решении уравнений, содержащих радикалы 3-й степени, бывает полезно пользоваться сложением тождествами:

Пример 1.

.

Возведём обе части этого уравнения в 3-ю степень и воспользуемся выше приведённым тождеством:

Заметим, что выражение стоящее в скобках равно 1, что следует из первоначального уравнения. Учитывая это и приводя подобные члены, получим:

Раскроем скобки, приведём подобные члены и решим квадратное уравнение. Его корни и . Если считать (по определению), что корень нечётной степени можно извлекать и из отрицательных чисел, то оба полученных числа являются решениями исходного уравнения.

Ответ: .

Решение 2

Возведём две новые переменные и , тогда ,

.

Заметим, что .

В итоге получим систему уравнений:

Используя первоначальные уравнения системы, преобразуем вторые, заменив первую скобку единицей, а вторую подставим вместо неизвестного у выражение , также полученное из первого .

Приведём подобные члены, раскрыв предварительно скобки и решив полученное квадратное уравнение. Его корни и . Вернёмся теперь к начальной подстановке и получим искомые решения:

**Введение нового неизвестного.**

Решив эти уравнения, найдём радикалы более высоких степеней, но наиболее часто использовавшийся способ их решения – введение нового(новых) неизвестного.

Пример 2.

Обозначим , тогда

а)

Уравнение примет вид:

Корень не удовлетворяет условию

Ответ: 76.

Методы решения иррациональных уравнений.

Методы решения иррациональных уравнений, как правило основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо равносильно исходному, либо является его следствием. Поэтому существуют два пути при решении иррациональных уравнений:

1) переход к выводным уравнениям (следствиям) с последующей проверкой корней;

2) переход к равносильным системам.

Второй подход избавляет от подстановки полученных корней в исходное уравнение (иногда такую проверку осуществить нелегко) и, вообще говоря, является более предпочтительным. Однако если в ходе решения оказалось, что проверка полученных корней не представляет труда, то можно не выяснять источники появления посторонних корней и не переходить к равносильным системам.

Пример 1.

Возведём в 6 степень:

Проверка:

, т.е. - верное равенство.

Ответ: 67.

Пример 2.

Преобразуем уравнение к виду:

 и возведём обе части в квадрат:

, т.е.

Ещё раз возведём обе части в квадрат:

, т.е. , .

Проверка:

1) При



2)

Ответ: .

Пример 3.

Положим . Тогда и мы получаем уравнение , откуда , .

Теперь задача свелась к решению двух уравнений:

; . Возводя обе части уравнения в 5-ю степень, получим , откуда .

Уравнение - не имеет корней, поскольку под знаком возведения в дробную степень может содержаться неотрицательное число, а любая степень неотрицательного числа неотрицательна.

Ответ: 34.

**Список литературы**

1) Справочник по математике. В.А. Гусев, А.Г. Мордкович.: 1986г.

2) Углублённое изучение курса алгебры и математического анализа. М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцабурд.: 1992г.

3) Возникновение и развитие математической науки. К.А. Рыбников.: 1987г.

4) Ученикам о математике. М.К. Гриненко.: 1993г.