**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ВОРОНЕЖСКИЙ ИНСТИТУТ ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ**

#### **Факультет заочно-послевузовского обучения**

##### КУРСОВАЯ РАБОТА

По дисциплине: ***"Методы оптимизации"***

## На тему: ***"*** ***Решение задач транспортного типа методом потенциалов "***

Воронеж 2003 г.

СОДЕРЖАНИЕ

**1. Линейная транспортная задача.** 3

**2. Математическая модель транспортной задачи.** 4

**3. Составление опорного плана.** 5

**4. Распределительный метод достижения оптимального плана.** 8

**5. Решение транспортной задачи методом потенциалов.** 11

**Список использованной литературы** 16

# **1. Линейная транспортная задача.**

Линейные транспортные задачи составляют особый класс задач линейного программирования. Задача заключается в отыскании такого плана перевозок продукции с *m* складов в пункт назначения *n* который, потребовал бы минимальных затрат. Если потребитель *j* получает единицу продукции (по прямой дороге) со склада *i,* то возникают издержки *Сij*. Предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству продукции, т.е. перевозка *k* единиц продукции вызывает расходы *k С i j*.

## Далее, предполагается, что



где *ai* есть количество продукции, находящееся на складе *i*, и *bj* – потребность потребителя *j*.

***Замечание.***

1. Если сумма запасов в пунктах отправления превышает сумму поданных заявок то количество продукции, равное остается на складах. В этом случае мы введем "фиктивного" потребителя *n* +1 с потребностью и положим транспортные расходы *pi,n*+1 равными 0 для всех *i*.



2. Если сумма поданных заявок превышает наличные запасы то потребность не может быть покрыта. Эту задачу можно свести к обычной транспортной задаче с правильным балансом, если ввести фиктивный пункт отправления m + 1 с запасом и стоимость перевозок из фиктивного пункта отправления во все пункты назначения принять равным нулю.



# **2. Математическая модель транспортной задачи.**



где *xij* количество продукции, поставляемое со склада *i* потребителю *j*, а *С i j* издержки (стоимость перевозок со склада *i* потребителю *j*).

# **3. Составление опорного плана.**

Решение транспортной задачи начинается с нахождения опорного плана. Для этого существуют различные способы. Например, способ северо-западного угла, способ минимальной стоимости по строке, способ минимальной стоимости по столбцу и способ минимальной стоимости таблицы.

Рассмотрим простейший, так называемый способ северо-западного угла. Пояснить его проще всего будет на конкретном примере:

Условия транспортной задачи заданы транспортной таблицей.

### Таблица № 1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ПН**  **ПО** | ***В1*** | ***В2*** | ***В3*** | ***В4*** | ***В5*** | Запасы ***аi*** |
| ***А1*** | **10** | **8** | **5** | **6** | **9** | **48** |
| ***А2*** | **6** | **7** | **8** | **6** | **5** | **30** |
| ***А3*** | **8** | **7** | **10** | **8** | **7** | **27** |
| ***А4*** | **7** | **5** | **4** | **6** | **8** | **20** |
| **Заявки**  ***bj*** | **18** | **27** | **42** | **12** | **26** | **125** |

Будем заполнять таблицу перевозками постепенно начиная с левой верхней ячейки ("северо-западного угла" таблицы). Будем рассуждать при этом следующим образом. Пункт *В1*  подал заявку на 18 единиц груза. Удовлетворим эту заявку за счёт запаса 48, имеющегося в пункте *А1* , и запишем перевозку 18 в клетке (1,1). После этого заявка пункта *В1*  удовлетворена, а в пункте *А1* осталось ещё 30 единиц груза. Удовлетворим за счёт них заявку пункта *В2* (27 единиц), запишем 27 в клетке (1,2); оставшиеся 3 единицы пункта *А1* назначим пункту *В3*. В составе заявки пункта *В3* остались неудовлетворёнными 39 единиц. Из них 30 покроем за счёт пункта  *А2*, чем его запас будет исчерпан, и ещё 9 возьмём из пункта *А3.* Из оставшихся 18 единиц пункта *А3*  12 выделим пункту  *В4*; оставшиеся 6 единиц назначим пункту *В5*, что вместе со всеми 20 единицами пункта *А4* покроет его заявку. На этом распределение запасов закончено; каждый пункт назначения получил груз, согласно своей заявки. Это выражается в том, что сумма перевозок в каждой строке равна соответствующему запасу, а в столбце - заявке. Таким образом, нами сразу же составлен план перевозок, удовлетворяющий балансовым условиям. Полученное решение является опорным решением транспортной задачи:

Таблица № 2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ПН**  **ПО** | **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** | **Запасы**  **аi** |
| **А1** | **10**  18 | **8**  27 | **5**  3 | **6** | **9** | **48** |
| **А2** | **6** | **7** | **8**  30 | **6** | **5** | **30** |
| **А3** | **8** | **7** | **10**  9 | **8**  12 | **7**  6 | **27** |
| **А4** | **7** | **5** | **4** | **6** | **8**  20 | **20** |
| **Заявки**  **bj** | **18** | **27** | **42** | **12** | **26** | **125** |

Составленный нами план перевозок, не является оптимальным по стоимости, так как при его построении мы совсем не учитывали стоимость перевозок *Сij .*

Другой способ - способ минимальной стоимости по строке - основан на том, что мы распределяем продукцию от пункта *Ai* не в любой из пунктов *Bj,* а в тот, к которому стоимость перевозки минимальна. Если в этом пункте заявка полностью удовлетворена, то мы убираем его из расчетов и находим минимальную стоимость перевозки из оставшихся пунктов *Bj.* Во всем остальном этот метод схож с методом северо-западного угла. В результате, опорный план, составленный способом минимальной стоимости по строке выглядит, так как показано в таблице № 3.

При этом методе может получиться, что стоимости перевозок *Cij*  и *Cik* от пункта *Ai* к пунктам *Bj* и *Bk* равны. В этом случае, с экономической точки зрения, выгоднее распределить продукцию в тот пункт, в котором заявка больше. Так, например, в строке 2: *C21* = *C24*, но заявка *b1* больше заявки *b4*, поэтому 4 единицы продукции мы распределим в клетку (2,1).

#### Таблица № 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ПН**  **ПО** | ***В1*** | ***В2*** | ***В3*** | ***В4*** | ***В5*** | **Запасы**  ***аi*** |
| ***А1*** | **10** | **8** | **5**  **42** | **6**  **6** | **9** | **48** |
| ***А2*** | **6**  **4** | **7** | **8** | **6** | **5**  **26** | **30** |
| ***А3*** | **8** | **7**  **27** | **10** | **8** | **7**  **0** | **27** |
| ***А4*** | **7**  **14** | **5** | **4** | **6**  **6** | **8** | **20** |
| **Заявки**  ***bj*** | **18** | **27** | **42** | **12** | **26** | **125** |

Способ минимальной стоимости по столбцу аналогичен предыдущему способу. Их отличие состоит в том, что во втором способе мы распределяем продукцию от пунктов *Bi* к пунктам *Aj*  по минимальной стоимости *Cji.*

Опорный план, составленный способами минимальных стоимостей, обычно более близок к оптимальному решению. Так в нашем примере общие затраты на транспортировку по плану, составленному первым способом *F0* = 1039, а по второму *F0* = 723.

Клетки таблицы, в которых стоят ненулевые перевозки, являются *базисными*. Их число должно равняться *m + n - 1.* Необходимо отметить также, что встречаются такие ситуации, когда количество базисных клеток меньше чем *m + n - 1.* В этом случае распределительная задача называется вырожденной. И следует в одной из свободных клеток поставить количество перевозок равное нулю. Так, например, в таблице № 3:

*m + n - 1* *= 4 + 5 - 1 = 8,*

а базисных клеток 7, поэтому нужно в одну из клеток строки 3 или столбца 2 поставить значение “0”. Например в клетку (3,5).

Составляя план по способам минимальных стоимостей в отличии от плана по способу северо-западного угла мы учитываем стоимости перевозок *Cij*, но все же не можем утверждать, что составленный нами план является оптимальным.

# **4. Распределительный метод достижения оптимального плана.**

Теперь попробуем улучшить план, составленный способом северо-западного угла. Перенесем, например, 18 единиц из клетки (1,1) в клетку (2,1) и чтобы не нарушить баланса перенесём те же 18 единиц из клетки (2,3) в клетку (1,3). Получим новый план. Подсчитав стоимость опорного плана (она ровняется 1039) и стоимость нового плана (она ровняется 913) нетрудно убедиться, что стоимость нового плана на 126 единиц меньше. Таким образом, за счёт циклической перестановки 18 единиц груза из одних клеток в другие нам удалось понизить стоимость плана:

Таблица №4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ПН**  **ПО** | ***В1*** | ***В2*** | ***В3*** | ***В4*** | ***В5*** | **Запасы**  ***аi*** |
| ***А1*** | **10** | **8**  **27** | **5**  **21** | **6** | **9** | **48** |
| ***А2*** | **6**  **18** | **7** | **8**  **12** | **6** | **5** | **30** |
| ***А3*** | **8** | **7** | **10**  **9** | **8**  **12** | **7**  **6** | **27** |
| ***А4*** | **7** | **5** | **4** | **6** | **8**  **20** | **20** |
| **Заявки**  ***bj*** | **18** | **27** | **42** | **12** | **26** | **125** |

На этом способе уменьшения стоимости в дальнейшем и будет основан алгоритм оптимизации плана перевозок. **Циклом** в транспортной задаче мы будем называть несколько занятых клеток, соединённых замкнутой, ломанной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90°.

Существует несколько вариантов цикла:

1.) 2.) 3.)

Нетрудно убедиться, что каждый цикл имеет чётное число вершин и значит, чётное число звеньев (стрелок). Условимся отмечать знаком **+** те вершины цикла, в которых перевозки необходимо увеличить, а знаком **-** , те вершины , в которых перевозки необходимо уменьшить. Цикл с отмеченными вершинами будем называть означенным. Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу, это значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на это количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах уменьшить на то же количество. Очевидно, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется: по прежнему сумма перевозок в каждой строке равна запасам этой строки, а сумма перевозок в каждом столбце - заявке этого столбца. Таким образом, при любом циклическом переносе, оставляющем перевозки неотрицательными допустимый план остаётся допустимым. Стоимость же плана при этом может меняться: увеличиваться или уменьшатся. Назовём ценой цикла увеличение стоимости перевозок при перемещении одной единицы груза по означенному циклу. Очевидно, цена цикла ровна алгебраической сумме стоимостей, стоящих в вершинах цикла, причём стоящие в положительных вершинах берутся со знаком **+**, а в отрицательных со знаком **-**. Обозначим цену цикла через *γ.* При перемещении одной единицы груза по циклу стоимость перевозок увеличивается на величину *γ.* При перемещении по нему  *k* единиц груза стоимость перевозок увеличиться на *kγ.* Очевидно, для улучшения плана имеет смысл перемещать перевозки только по тем циклам, цена которых отрицательна. Каждый раз, когда нам удаётся совершить такое перемещение, стоимость плана уменьшается на соответствующую величину *kγ.* Так как перевозки не могут быть отрицательными, мы будем пользоваться только такими циклами, отрицательные вершины которых лежат в базисных клетках таблицы, где стоят положительные перевозки. Если циклов с отрицательной ценой в таблице больше не осталось, это означает, что дальнейшее улучшение плана невозможно, то есть оптимальный план достигнут.

Метод последовательного улучшения плана перевозок и состоит в том, что в таблице отыскиваются циклы с отрицательной ценой, по ним перемещаются перевозки, и план улучшается до тех пор, пока циклов с отрицательной ценой уже не останется. При улучшении плана циклическими переносами, как правило, пользуются приёмом, заимствованным из симплекс-метода: при каждом шаге (цикле) заменяют одну свободную переменную на базисную, то есть заполняют одну свободную клетку и взамен того освобождают одну из базисных клеток. При этом общее число базисных клеток остаётся неизменным и равным *m + n - 1* . Этот метод удобен тем, что для него легче находить подходящие циклы.

Можно доказать, что для любой свободной клетке транспортной таблице всегда существует цикл и притом единственный, одна из вершин которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные в базисных клетках. Если цена такого цикла, с плюсом в свободной клетке, отрицательна, то план можно улучшить перемещением перевозок по данному циклу. Количество единиц груза *k*, которое можно переместить, определяется минимальным значением перевозок, стоящих в отрицательных вершинах цикла (если переместить большее число единиц груза, возникнут отрицательные перевозки).

Применённый выше метод отыскания оптимального решения транспортной задачи называется распределённым; он состоит в непосредственном отыскании свободных клеток с отрицательной ценой цикла и в перемещении перевозок по этому циклу.

Распределительный метод решения транспортной задачи, с которым мы познакомились, обладает одним недостатком: нужно отыскивать циклы для всех свободных клеток и находить их цены. От этой трудоёмкой работы нас избавляет специальный метод решения транспортной задачи, который называется методом потенциалов.

# **5. Решение транспортной задачи методом потенциалов.**

Этот метод позволяет автоматически выделять циклы с отрицательной ценой и определять их цены.

Пусть имеется транспортная задача с балансовыми условиями



Стоимость перевозки единицы груза из  *Ai* в *Bj*  равна *C ij*; таблица стоимостей задана. Требуется найти план перевозок *xij*, который удовлетворял бы балансовым условиям и при этом стоимость всех перевозок бала минимальна.

Идея метода потенциалов для решения транспортной задачи сводиться к следующему. Представим себе что каждый из пунктов отправления *Ai* вносит за перевозку единицы груза (всё равно куда) какую-то сумму *αi*; в свою очередь каждый из пунктов назначения *Bj* также вносит за перевозку груза (куда угодно) сумму *βj*. Эти платежи передаются некоторому третьему лицу (“перевозчику“). Обозначим *αi + βj = ij* *( i=1..m ;j=1..n)* и будем называть величину *ij*“псевдостоимостью” перевозки единицы груза из *Ai* в *Bj*. Заметим, что платежи *αi* и *βj* не обязательно должны быть положительными; не исключено, что “перевозчик” сам платит тому или другому пункту какую-то премию за перевозку. Также надо отметить, что суммарная псевдостоимость любого допустимого плана перевозок при заданных платежах (*αi* и *βj*) одна и та же и от плана к плану не меняется.

До сих пор мы никак не связывали платежи (*αi* и *βj*) и псевдостоимости *ij*с истинными стоимостями перевозок *C ij*. Теперь мы установим между ними связь. Предположим, что план *xij* невырожденный (число базисных клеток в таблице перевозок ровно m + n -1). Для всех этих клеток *xij >0*. Определим платежи (*αi*и *βj*) так, чтобы во всех базисных клетках псевдостоимости были ровны стоимостям:

*ij =αi + βj =* ***с****ij ,* при *xij >0.*

Что касается свободных клеток (где *xij* = 0), то в них соотношение между псевдостоимостями и стоимостями может быть, какое угодно.

Оказывается соотношение между псевдостоимостями и стоимостями в свободных клетках показывает, является ли план оптимальным или же он может быть улучшен. Существует специальная теорема: Если для всех базисных клеток плана *xij > 0,*

*αi + βj = ij=* ***с****ij ,*

а для всех свободных клеток  *xij =0*,

*αi + βj = ij* ***с****ij ,*

то план является *оптимальным* и никакими способами улучшен быть не может. Нетрудно показать, что это теорема справедлива также для вырожденного плана, и некоторые из базисных переменных равны нулю. План обладающий свойством :

*ij=* ***с****ij* (для всех базисных клеток ) (1)

*ij* ***с****ij* ( для всех свободных клеток ) (2)

называется *потенциальным* планом, а соответствующие ему платежи (*αi* и *βj*) — потенциалами пунктов *Ai*  и *Bj* ( *i=1,...,m ; j=1,...,n* ). Пользуясь этой терминологией вышеупомянутую теорему можно сформулировать так:

***Всякий потенциальный план является оптимальным.***

Итак, для решения транспортной задачи нам нужно одно - построить потенциальный план. Оказывается его можно построить методом последовательных приближений, задаваясь сначала какой-то произвольной системой платежей, удовлетворяющей условию (1). При этом в каждой базисной клетке получиться сумма платежей, равная стоимости перевозок в данной клетке; затем, улучшая план следует одновременно менять систему платежей. Так, что они приближаются к потенциалам. При улучшении плана нам помогает следующее свойство платежей и псевдостоимостей: какова бы ни была система платежей (*αi* и *βj*) удовлетворяющая условию (1), для каждой свободной клетки цена цикла пересчёта равна разности между стоимостью и псевдостоимостью в данной клетке : *γi,j= сi,j - i,j.*

Таким образом, при пользовании методом потенциалов для решения транспортной задачи отпадает наиболее трудоёмкий элемент распределительного метода: поиски циклов с отрицательной ценой.

Процедура построения потенциального (оптимального) плана состоит в следующем.

В качестве первого приближения к оптимальному плану берётся любой допустимый план (например, построенный способом минимальной стоимости по строке). В этом плане *m + n - 1* базисных клеток, где *m* - число строк, *n* - число столбцов транспортной таблицы. Для этого плана можно определить платежи (*αi*и *βj*), так, чтобы в каждой базисной клетке выполнялось условие :

*αi + βj =* ***с****ij* (3)

Уравнений (3) всего *m + n - 1*, а число неизвестных равно *m + n.* Следовательно, одну из этих неизвестных можно задать произвольно (например, равной нулю). После этого из *m + n - 1* уравнений (3) можно найти остальные платежи *αi*, *βj*, а по ним вычислить псевдостоимости, *i,j=αi + βj* для каждой свободной клетки.

Таблица №5

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ПН**  **ПО** | ***В1*** | ***В2*** | ***В3*** | ***В4*** | ***В5*** | ***αi*** |
| ***А1*** | **10**  ***= 7*** | **8**  ***= 6*** | **5**  **42** | **6**  **6** | **9**  ***= 6*** | ***α1*= 0** |
| ***А2*** | **6**  **4** | **7**  ***= 5*** | **8**  ***= 4*** | **6**  ***= 5*** | **5**  **26** | ***α2=* -1** |
| ***А3*** | **8**  ***= 8*** | **7**  **27** | **10**  ***= 6*** | **8**  ***= 7*** | **7**  **0** | ***α3=* 1** |
| ***А4*** | **7**  **14** | **5**  ***= 6*** | **4**  ***= 5*** | **6**  **6** | **8**  ***= 6*** | ***α4=* 0** |
| ***βj*** | ***β1=* 7** | ***β2=* 6** | ***β3=* 5** | ***β4=* 6** | ***β5=* 6** |  |

***α4* = 0, →**

***β4* = 6, так как *α4* + *β4*= *С44*= 6, →**

***α1*= 0, так как *α1* + *β4*= *С14*= 6, →**

***β3* = 5, так как *α1* + *β3*= *С13*= 5, →**

***β1* = 7, так как *α4* + *β1*= *С41*= 7, →**

***α2*= -1, так как *α2* + *β1*= *С21*= 6, →**

***β5* = 6, так как *α2* + *β5*= *С25*= 5, →**

***α3*= 1, так как *α3* + *β5*= *С35*= 7, →**

***β2* = 6, так как *α3* + *β2*= *С25*= 7.**

Если оказалось, что все эти псевдостоимости не превосходят стоимостей

*ij * ***с****ij , *

то план потенциален и, значит, оптимален. Если же хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость больше стоимости (как в нашем примере), то план не является оптимальным и может быть улучшен переносом перевозок по циклу, соответствующему данной свободной клетке. Цена этого цикла ровна разности между стоимостью и псевдостоимостью в этой свободной клетке.

В таблице № 5 мы получили в двух клетках *ij * ***с****ij* , теперь можно построить цикл в любой из этих двух клеток. Выгоднее всего строить цикл в той клетке, в которой разность *ij * ***с****ij* максимальна. В нашем случае в обоих клетках разность одинакова (равна 1), поэтому, для построения цикла выберем, например, клетку (4,2):

Таблица №6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ПН**  **ПО** | ***В1*** | ***В2*** | ***В3*** | ***В4*** | ***В5*** | ***αi*** |
| ***А1*** | **10** | **8** | **5**  **42** | **6**  **6** | **9** | **0** |
| ***А2*** | **6 +**  **4** | **7** | **8** | **6** | **5 -**  **26** | **-1** |
| ***А3*** | **8** | **7 -**  **27** | **10** | **8** | **7 +**  **0** | **1** |
| ***А4*** | **7 -**  **14** | **5 +**  **** | **4** | **6**  **6** | **8** | **0** |
| ***βj*** | **7** | **6** | **5** | **6** | **6** |  |

Теперь будем перемещать по циклу число 14, так как оно является минимальным из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком - . При перемещении мы будем вычитать 14 из клеток со знаком - и прибавлять к клеткам со знаком + .

После этого необходимо подсчитать потенциалы *αi*и *βj* и цикл расчетов повторяется.

Итак, мы приходим к следующему алгоритму решения транспортной задачи методом потенциалов.

**1.** Взять любой опорный план перевозок, в котором отме*чены m + n - 1* базисных клеток (остальные клетки свободные).

**2.** Определить для этого плана платежи (*αi*и *βj*) исходя из условия, чтобы в любой базисной клетке псевдостоимости были равны стоимостям. Один из платежей можно назначить произвольно, например, положить равным нулю.

**3.** Подсчитать псевдостоимости *i,j =αi + βj*для всех свободных клеток. Если окажется, что все они не превышают стоимостей, то план оптимален.

**4.** Если хотя бы в одной свободной клетке псевдостоимость превышает стоимость, следует приступить к улучшению плана путём переброски перевозок по циклу, соответствующему любой свободной клетке с отрицательной ценой (для которой псевдостоимость больше стоимости).

**5.** После этого заново подсчитываются платежи и псевдостоимости, и, если план ещё не оптимален, процедура улучшения продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Так в нашем примере после 2 циклов расчетов получим оптимальный план. При этом стоимость всей перевозки изменялась следующим образом: F0 = 723, F1 = 709, F2 = Fmin = 703.

Следует отметить так же, что оптимальный план может иметь и другой вид, но его стоимость останется такой же Fmin = 703.

# **Список использованной литературы**

1. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования М.; Наука, 1976г.

2. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.; Наука, 1986г.

3. Моисеев Н.Н., Иванов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.; Наука, 1978г.

4. Иванов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.; Наука, 1979г.

5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.; Наука, 1986г