# **БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики и робототехники

###### Курсовая работа

### **Тема: Синтез оптимальных уравнений**

 Студента 3-го курса 13 группы

 Павловского Сергея Александровича

 Научный руководитель

 Лютов Алексей Иванович

### **Минск 2001г.**

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Г л а в а I. **Введение** 2

§ 1. Задача об оптимальном быстродействии 2

 1.Понятие об оптимальном быстродействии 2

 2.Задача управления 3

 3.Уравнения движения объекта 5

 4.Допустимые управления 6

§ 2. Об основных направлениях в теории оптимальных процессов 7

 5.Метод динамического программирования 7

 6.Принцип максимума 9

§ 3. Пример. Задача синтеза 12

 7.Пример применения принципа максимума 12

 8.Проблема синтеза оптимальных управлений 14

Г л а в а II. **Линейные оптимальные быстродействия** 15

§ 4 Линейная задача оптимального управления 15

 9.Формулировка задачи 15

 10.Принцип максимума 16

 11.Принцип максимума — необходимое и достаточное условие

оптимальности 17

 12.Основные теоремы о линейных оптимальных быстродействиях 18

§ 5. Решение задачи синтеза для линейных задач второго порядка 18

 13.Упрощение уравнений линейного управляемого объекта 18

Г л а в а III. **Синтез оптимальных управлений для уравнения второго**

 **порядка** 20

§ 6. Решение задачи синтеза в случае комплексных собственных значений 20

 14.Задача синтеза для малых колебаний маятника 20

 Список используемой литературы 23

**Г л а в а I**

**ВВЕДЕНИЕ**

Управляемые объекты прочно вошли в нашу повседневную жизнь и стали обиходными, обыденными явлениями. Мы видим их буквально на каждом шагу: автомобиль, самолёт, всевозможные электроприборы, снабжённые регуляторами (например, электрохолодильник), и т. п. Общим во всех этих случаях является то, что мы можем «управлять» объектом, можем в той или иной степени влиять на его поведение.

Обычно переход управляемого объекта из одного состояния в другое может быть осуществлён многими различными способами. Поэтому возникает вопрос о выборе такого пути, который с некоторой (но вполне определённой) точки зрения окажется наиболее выгодным. Это и есть (несколько расплывчато сформулированная) задача об оптимальном управлении.

**§ 1. Задача об оптимальном быстродействии**

1. **Понятие об управляемых объектах.** Рассмотрим прямолинейное движение автомобиля. В каждый момент вре­мени состояние автомобиля можно характеризовать двумя числами: пройден­ным расстоянием s и скоростью движения *v.* Эти две величины меняются с те­чением времени, но не самопроизвольно, а сообразно воле водителя, который может по своему желанию управлять работой двигателя, увеличивая или уменьшая развиваемую этим двигателем силу *F.* Таким образом, мы имеем три связанных между собой параметра: *s*, *v*, *F*,показанных на схеме (рис. 1). Величины *s*, *v*,характеризующие состояние автомобиля, называют его *фазовыми координатами*,а величину *F* – *управляющим параметром*.

*S*

## v

*F*

Рис. 1.

# Если мы будем рассматривать движение автомобиля по плоскости (а не по прямой), то фазовых координат будет четыре (две «географические» координаты и две компоненты скорости), а управляющих параметров – два (например, сила тяги двигателя и угол поворота руля). У летящего самолёта можно рассматривать шесть фазовых координат (три пространственные координаты и три компоненты скорости) и несколько управляющих параметров (тяга двигателя, величины, характеризующие положение рулей высоты и направления, элеронов).

Разумеется, в проводимом ниже математическом исследовании мы будем иметь дело не с самими реальными объектами, а с некоторой математической моделью. Сказанное выше делает естественным следующее математическое описание управляемого объекта. *Состояние* объекта задаётся (в каждый момент времени) *n* числами *x*1*, x*2*,…,xn,* которые называются *фазовыми координатами* объекта. *Движение* объекта заключается с математической точки зрения в том, что его состояние с течением времени изменяется, т. е. *x*1*,x*2*,…,xn* являются переменными величинами (функциями времени). Движение объекта происходит не самопроизвольно. Им можно управлять; для этого объект снабжён «рулями», положение которых характеризуется (в каждый момент времени) *r* числами *u*1*,u*2*,…,ur*; эти числа называются управляющими *параметрами*. Рулями можно «манипулировать», т. е. по своему желанию менять (конечно, в допустимых пределах) управляющие параметры *u*1*,u*2*,…,ur.* Иначе говоря, мы можем по желанию выбрать функции *u*1*(t),u*2*(t),…,ur(t),* описывающие изменение управляющих параметров с течением времени. Мы будем предполагать (как это обычно и бывает), что, зная фазовое состояние объекта в начальный момент времени и выбрав управляющие функции *u*1*(t),u*2*(t),…,ur(t)* (для *t>t*0), мы можем точно и однозначно рассчитать поведение объекта для всех *t>t0*,т. е. можем найти функции *x*1*(t),x*2*(t),…,xn(t),* характеризующие изменение фазовых координат с течением времени. Таким образом, изменение фазовых координат *x*1*,x*2*,…,xn* уже не зависит непосредственно от нашего желания, но на движение объекта мы всё же можем в той или иной мере воздействовать, выбирая по своему желанию управляющие функции *u*1*(t),u*2*(t),…,ur(t)*.

Рис. 2.

*u1*

*u*2

.

.

.

*ur*

*x1*

*x*2

.

.

.

*xn*

Управляемый объект, о котором только что шла речь, в теории автоматического управления принято изображать так, как это показано на рис. 2. Величины *u*1*,u*2*,…,ur* (управляющие параметры) часто называют также «входными переменными», а величины *x*1*, x*2*,…,xn* (фазовые координаты) – «выходными переменными». Говорят ещё, что «на вход» объекта поданы величины *u*1*,u*2*,…,ur*, а «на выходе» мы получаем величины *x*1*, x*2*,…,xn*. Разумеется, на рис. 2 показано лишь *условное обозначение* управляемого объекта и никак не отражено его «внутреннее устройство», знание которого необходимо, чтобы выяснить, *каким образом,* зная управляющие функции *u*1*(t),u*2*(t),…,ur(t)*, можно вычислить изменение фазовых координат *x*1*(t),x*2*(t),…,xn(t)*.

Величины *u*1*,u*2*,…,ur* удобно считать координатами некоторого *вектора* *u=*(*u*1*,u*2*,…,ur*), также называемого *управляющим параметром* (векторным). Точно так же величины *x*1*, x*2*,…,xn* удобно рассматривать как координаты некоторого вектора (или точки) *x=*(*x*1*, x*2*,…,xn*) в *n –* мерном пространстве с координатами *x*1*, x*2*,…,xn.* Эту точку называют *фазовым состоянием* объекта, а *n –* мерное пространство, в котором в виде точек изображаются фазовые состояния, называется *фазовым пространством* рассматриваемого объекта. Если объект таков, что его фазовое состояние характеризуется только двумя фазовыми координатами *x*1*, x*2 (см. рис. 1), то мы будем говорить о *фазовой плоскости*. В этом случае фазовые состояния объекта изображаются особенно наглядно.

Итак, в векторных обозначениях рассматриваемый управляемый объект можно изобразить так, как показано на рис. 3. Входящая величина *u=*(*u*1*,u*2*,…,ur*) представляет собой управляющий параметр, а выходная величина *x=*(*x*1*, x*2*,…,xn*) представляет собой точку фазового пространства (или, иначе, фазовое состояние объекта).

*u*

*x*

Рис. 3.

Как сказано выше, чтобы полностью задать движение объекта, надо задать его фазовое состояние *x0=*(*x*01*, x*02*,…, x*0*n*) в начальный момент времени t0 и выбрать управляющие функции *u*1*(t), u*2*(t),…, ur(t)* (для *t*>*t*0), т. е. выбрать векторную функцию *u(t)= u*1*(t),u*2*(t),…,ur(t)*). Эту функцию *u(t)* мы будем называть *управлением*. Задание начального фазового состояния *x0* и управления *u(t)* однозначно определяет дальнейшее движение объекта. Это движение заключается в том, что фазовая точка *x*(*t)=*(*x*1*(t),x*2*(t),…,xn(t)*), изображающая состояние объекта, с течением времени перемещается, описывая в фазовом пространстве некоторую линию, называемую *фазовой траекторией* рассматриваемого движение объекта (случай *n=*2 изображён на рис. 4). Очевидно, что эта линия исходит из точки *x*0, поскольку *x*(*t*0)= *x*0.

Рис. 4.

*x(t)*

 *x0*

*0*

*x2*

*x1*

Пару векторных функций (*u(t), x(t)*), т. е. управление *u(t)* и соответствующую фазовую траекторию *x(t)*, мы будем называть в дальнейшем *процессом управления* или просто *процессом*.

Итак, резюмируем. Состояние *управляемого объекта* в каждый момент времени характеризуется *фазовой точкой x=*(*x*1*, x*2*,…,xn*). На движение объекта можно воздействовать при помощи *управляющего параметра* *u=*(*u*1*,u*2*,…,ur*). Изменение величин *u, x* с течением времени мы называем *процессом*; процесс (*u(t), x(t)*) составляется из *управления u(t)* и *фазовой траектории* *x(t)*. Процесс полностью определяется, если задано управление *u(t)* (при *t*>*t*0) и начальное фазовое состояние *x*0*=x(t*0*)*.

 *0*

*x0*

*x1*

*x2*

 *x1*

Рис. 5.

1. **Задача управления.** Часто встречается следующая задача, связанная с управляемыми объектами. В начальный момент времени *t*0объект находится в фазовом состоянии *x*0; требуется выбрать такое управление *u(t)*, которое переведёт объект в заранее заданное конечное фазовое состояние *x*1 (отличное от *x*0; рис. 5). При этом нередко бывает, что начальное состояние *x*0заранее не известно. Рассмотрим один из наиболее типичных примеров. Объект должен устойчиво работать в некотором режиме (т. е. находиться в некотором фазовом состоянии *x*1). В результате тех или иных причин (например, под воздействием неожиданного толчка) объект может выйти из рабочего состояния *x*1 и оказаться в некотором другом состоянии *x*0. При этом точка *x*0, в которую может попасть объект, заранее не известна, и мы должны уметь так управлять объектом, чтобы из любой точки *x*0 (или хотя бы из точек *x*0 достаточно близких к *x*1) вернуть его в рабочее состояние *x*1 (рис. 6).

Такое управление часто осуществляется человеком (оператором), который следит за приборами и старается выбирать управление, поддерживающее объект в требуемом рабочем режиме.

Рис. 6.

*x1*

*0*

*x1*

*x2*

Однако в современных условиях высокого развития техники оператор зачастую не может успешно справиться с этой задачей ввиду сложности поведения объекта, большой быстроты протекания процессов и т. п. Поэтому чрезвычайно важно создать такие приборы, которые сами, без участия человека, управляли бы работой объекта (например, в случае выхода объекта из рабочего состояния возвращали бы его в это рабочее состояние). Такие приборы («регуляторы», «автоматические управляющие устройства» и т. п.) сейчас очень распространены в технике, их изучением занимается теория автоматического управления.

Первым устройством этого рода был центробежный регулятор Уатта, сконструированный для управления работой паровой машины (см. рис. 9). Схема этого регулятора показана на рис. 7. В общем случае (рис. 8) на вход регулятора подаются фазовые координаты объекта.

Обычно требуется, чтобы *переходный процесс* (т. е. процесс перехода из начального фазового состояния *x*0 в предписанное состояние *x*1, рис. 5) был в определённом смысле «наилучшим», например, чтобы время перехода было наименьшим или чтобы энергия, затраченная в течение переходного процесса, была минимальной и т. п. Такой «наилучший» переходный процесс называется *оптимальным процессом*. Термин «оптимальный процесс» требует уточнения, т. к. необходимо разъяснить, *в каком смысле* понимается оптимальность. Если речь идёт о наименьшем времени перехода, то такие процессы называются *оптимальными в смысле быстродействия*. Иначе говоря, процесс, в результате которого объект переходит из точки *x*0 в точку *x*1 (рис. 5), называется оптимальным в смысле быстродействия, если не существует процесса, переводящего объект из *x*0в *x*1 за меньшее время (здесь и далее предполагается, что *x*1≠ *x*0). Разумеется, желательно, чтобы регулятор не просто возвращал объект в рабочее состояние, а делал это наилучшим образом, например, в смысле быстродействия (т. е. возвращал объект в рабочее состояние за кратчайшее время). В связи с этим в теории автоматического управления рассматриваются весьма различные регуляторы. Рассмотрение регуляторов приводит к тому, что уменьшение времени переходного процесса связано с усложнением конструкции регулятора; поэтому, усложняя конструкцию регулятора, можно лишь приближаться к «идеальному», «оптимальному» регулятору, который во всех случаях осуществляет переходный процесс за кратчайшее время. В точности же «оптимального» регулятора, по-видимому, осуществить нельзя. Однако такой вывод является ошибочным, т. к. сейчас уже создали математический аппарат, рассчитывающий такие регуляторы. Можно предполагать, что оптимальные регуляторы будут играть важную роль в технике будущего.

Рис. 7.

*Объект (паровая машина)*

### Регулятор

Рис. 8.

*Регулятор*

### Объект

Рис. 9.

*φ*

*ω*

1. **Уравнения движения объекта.** Начнём с рассмотрения одного простого примера. Пусть *G* – тело, которое может совершать прямолинейное движение (рис. 10). Массу этого тела будем предполагать постоянной и равной *m*, а его размерами будем пренебрегать (т. е. будем считать *G* материальной точкой.) Координату тела *G* (отсчитываемую от некоторой точки *O* той прямой, по которой оно движется) будем обозначать через *x*1*.* При движении тела *G* его координата *x*1 меняется с течением времени. Производная представляет собой скорость движения тела *G*. Будем предполагать, что на тело *G* действуют две внешние силы: сила трения ─и упругая сила ─ *kx*1 и что, кроме того, тело *G* снабжено двигателем. Развиваемую двигателем силу воздействия на тело *G* обозначим через *u*. Таким образом, по второму закону Ньютона движение тела *G* с течением времени будет описываться дифференциальным уравнением

*G*

*0*

Рис. 10.

*x*1

*x* 1

Обозначив скорость движения через *x2* (т. е. положив ), мы сможем записать этот закон движения в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

 (1.1)

Рис. 11.

*G*

*x2*

*x*1

*u*

Здесь величины *x*1*, x*2 являются фазовыми координатами тела *G*, а величина *u* – управляющим параметром, т. е. мы имеем объект, схематически изображённый на рис. 11.

Уравнения (1.1) представляют собой закон изменения фазовых координат с течением времени (с учётом воздействия управляющего параметра), т. е. представляют собой закон движения фазовой точки в фазовой плоскости.

Мы рассмотрели лишь один частный случай, но можно было бы указать целый ряд других примеров, в которых закон движения объекта описывается дифференциальными уравнениями. Чаще всего (см.(1.1)) эти уравнения дают выражения производных от фазовых координат через сами фазовые координаты и управляющие параметры, т. е. имеют вид

 (1.2)

где *f*1*, f*2*,…, fn –* некоторые функции, определяемые внутренним устройством объекта.

В дальнейшем мы сосредоточим своё внимание именно на таких объектах (рис. 2), закон движения которых описывается системой дифференциальных уравнений вида (1.2). В векторной форме систему (1.2) можно записать в виде

 (1.3)

где *x* ─ вектор с координатами *x*1*,…, xn, u* – вектор с координатами *u*1*,…, ur* и, наконец, *f*(*x, u*) – вектор, координатами которого служат правые части системы (1.2).

Разумеется, невозможно решить систему дифференциальных уравнений (1.2) (т. е. найти закон движения объекта), не зная каким образом будут меняться с течением времени управляющие параметры *u*1*, u*2*,…, ur*. Напротив, зная поведение величин *u*1*, u*2*,…,ur*, т. е. зная управляющие функции *u*1*(t), u*2*(t),…, ur(t)* для *t*>*t*0мы сможем из системы уравнений

 (1.4)

или, что то же самое, из векторного уравнения

 (1.5)

однозначно определить движение объекта (при *t*>*t*0), если нам известно начальное фазовое состояние объекта (в момент *t=t*0). Иначе говоря, задание управления *u(t)* и начального фазового состояния *x*0 однозначно определяет фазовую траекторию *x(t)* при *t*>*t*0, что согласуется со сделанными ранее (стр. 1) предположениями о свойствах объекта.

Тот факт, что задание начального фазового состояния (в момент *t=t*0) позволяет из системы (1.4) однозначно определить фазовую траекторию *x(t), t*>*t*0*,* вытекает из *теоремы о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений.* Предположим, что, зная начальное фазовое состояние *x*0и управление *u(t)=(u*1*(t),…, ur(t)),* мы определили фазовую траекторию *x(t)* (с помощью системы (1.4)). Если мы изменим управление *u(t)* (сохранив то же начальное состояние *x*0), то получим некоторую другую траекторию, исходящую из той же точки *x*0; вновь изменим управление *u(t)* – получим ещё одну траекторию и т. д. Таким образом, рассматривая различные управления *u(t)*, мы получим много траекторий, исходящих из точки *x*0 (рис. 12). (Разумеется, это не противоречит теореме единственности в теории дифференциальных уравнений, так как, заменяя функции *u*1*(t),…,ur(t)* другими функциями, мы переходим от системы дифференциальных уравнений относительно фазовых координат *x*1*,…, xn.*)

Рис. 12.

*x*2

*x*1

*0*

*x0*

*x(t)*

*x*1

Напомним, что *задача оптимального быстродействия* заключается в отыскании такого управления *u(t)*, для которого фазовая траектория *x(t)*, соответствующая этому управлению в силу уравнения (1.5), проходит через точку *x*1 и переход из *x*0в *x*1осуществляется за кратчайшее время. Такое управление *u(t)* будем называть *оптимальным управлением (в смысле быстродействия)*; точно так же соответствующую траекторию *x(t)* буде называть *оптимальной траекторией*.

1. **Допустимые управления.** Обычно управляющие параметры *u*1*,…,ur* не могут принимать совершенно произвольные значения, а подчинены некоторым ограничениям. Так, например, в случае объекта, описанного на стр. 4, естественно предположить, что сила *u*, развиваемая двигателем, не может быть как угодно большой по величине, а подчинена ограничениям *α*≤*u*≤*β*, где *α* и  *β* – некоторые постоянные, характеризующие двигатель. В частности, при *α=*─1, *β=*1 мы получаем ограничение ─1≤*u*≤1, которое означает, что двигатель может развивать силу, направленную вдоль оси *x*1 как в положительном, так и в отрицательном направлении, но не превосходящую единицы по абсолютной величине.

Для объектов, содержащих *r* управляющих параметров *u*1*,…,ur*, в приложениях часто встречается случай, когда эти параметры могут произвольно меняться в следующих пределах:

*α*1≤*u*1≤ *β*1, *α*2≤*u*2≤*β*2,…, *αr*≤*ur*≤*βr*.

Иначе говоря, каждая из величин *u*1*, u*2*,…,u*r в уравнениях (1.2) представляет собой отдельный управляющий параметр, область изменения которого не зависит от значений остальных

управляющих параметров и задаётся неравенствами

*αi*≤*ui*≤*βi, i=*1*,…,r.* (1.6)

Заметим, что при *r*=2 точки *u=*(*u*1*, u*2), координаты которых подчинены неравенствам (1.6), заполняют прямоугольник; при *r=*3 неравенства (1.6) определяют в пространстве переменных *u*1*,u*2*,u*3 прямоугольный параллелепипед; в случае произвольного *r* говорят, что неравенства (1.6) определяют *r-мерный параллелепипед.*

В общем случае будем считать, что в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации задано в пространстве переменных *u*1*,…, ur* некоторое множество *U* и управляющие параметры *u*1*, u*2*,…, ur* должны в каждый момент времени принимать лишь такие значения, чтобы точка *u=*(*u*1*,u*2*,…,ur*) принадлежала множеству *U*. Иначе говоря, разрешается рассматривать лишь такие управления *u(t)*, что *u(t)* *U* для любого *t*. Множество *U* в дальнейшем будем называть *областью управления*. Область управления *U* не всегда будет параллелепипедом; она может иметь геометрически более или менее сложный характер, так как в силу конструкции объекта между управляющими параметрами *u*1*, u*2*,…,ur* могут существовать связи, выражаемые, например, уравнениями вида φ(*u*1*, u*2*,…, ur*)=0 или неравенствами ψ(*u*1*, u*2*,…, ur*)≤0. Так, если параметры *u*1*,u*2 характеризуют векторную величину на плоскости, модуль которой не превосходит единицы, а направление произвольно, то эти параметры подчинены только одному условию

(*u*1)2 +(*u*2)2 ─1≤0 (1.7)

и область управления *U* представляет собой круг. В дальнейшем будем предполагать, что указание области управления входит в математическое определение объекта, т. е. что *для математического задания управляемого объекта надо указать закон его движения* (1.2) *и область управления U*.

Наконец, сделаем ещё одно, весьма существенное предположение о характере управлений. Именно, будем предполагать, что «рули», положения которых характеризуются управляющими параметрами *u*1*,u*2*,…,ur*, *безынерционны,* так что мы можем, если нужно, *мгновенно* переключать эти «рули» из одного положения в другое, т. е. менять скачком значения управляющих параметров *u*1*,u*2*,…,ur*. В соответствии с этим будем рассматривать не только непрерывные, но и *кусочно-непрерывные* управления *u(t)*. Кроме того, будем предполагать, что каждое рассматриваемое управление *u(t)* непрерывно на концах отрезка *t*0≤*t*≤*t*1, на котором оно задано, т. е. что все точки разрыва, если они есть, расположены на интервале *t*0<*t*<*t*1. Для удобства условимся называть *допустимым управлением* всякую кусочно-непрерывную функцию *u*(*t*), *t*0≤*t*≤*t*1, со значениями в области управления *U*, непрерывную справа в точках разрыва (для определённости нам так удобно предполагать) и непрерывную в концах отрезка [*t*0; *t*1], на котором она задана.

Задача об оптимальных быстродействиях уточняется теперь следующим образом:

*Среди всех допустимых управлений u=u(t), под воздействием которых управляемый объект* (1.3) *переходит из заданного начального фазового состояния x*0 *в предписанное конечное состояние x*1*, найти такое, для которого этот переход осуществляется за кратчайшее время*

**§ 2. Об основных направлениях в теории оптимальных процессов**

1. **Метод динамического программирования.** Для управляемого объекта, описанного в предыдущем параграфе, мы рассмотрим задачу об оптимальном переходе ─ в смысле быстродействия ─ из фазового состояния *x* в фазовое состояние *x*1. При этом конечную фазовую точку *x*1 будем считать фиксированной, а в качестве начальной точки *x* будем рассматривать различные точки фазового пространства. Мы будем предполагать в этом пункте, что для рассматриваемого управляемого объекта выполняется следующая гипотеза:

Г и п о т е з а 1. *Какова бы ни была отличная от x*1 точка *x фазового пространства, существует оптимальный (в смысле быстродействия) процесс перехода из точки x*0 *в точку x*1 (рис. 6).

Время, в течение которого осуществляется оптимальный переход из точки *x*0 в точку *x*1, обозначим через *T(x*). В дальнейших рассуждениях будет удобно вместо *T(x*) ввести функцию *ω*(*x*), отличающуюся от неё знаком

*ω*(*x*)= ─*T(x*). (1.8)

Так как каждая точка *x* фазового пространства имеет координаты *x*1*,…,xn*, то *ω*(*x*)= ─*T(x*) является *функцией от n переменных,* т. е. *ω*(*x*)= *ω*(*x*1*,…,xn*). Поэтому имеет смысл говорить о непрерывности этой функции (по совокупности переменных *x*1*,…,xn*) и о дифференцируемости этой функции по каждой из переменных *x*1*,…,xn*.

А также будем предполагать, что для рассматриваемого управляемого объекта выполняется следующая гипотеза:

Г и п о т е з а 2. *Функция ω*(*x*) *непрерывна и всюду, кроме точки x*1*, имеет непрерывные частные производные*

Пусть теперь *x*0 ─ произвольная отличная от *x*1 точка фазового пространства, а *u*0 ─ произвольная точка области *U*. Предположим, что объект находится в момент *t*0 в фазовом состоянии *x*0 и движется в течение некоторого времени под воздействием постоянного управления *u= u*0. Фазовую траекторию объекта при этом движении обозначим через *y*(t)=(*y*1*(t),…, yn(t*)). Таким образом, фазовая траектория *y(t*) при *t>t*0 удовлетворяет уравнениям

 (1.9)

(см. (1.2), (1.3)) и начальному условию

*y*(*t*0)=*x*0. (1.10)

Если мы будем двигаться из точки *x*0 до точки *y(t*) (по рассматриваемой фазовой траектории), то затратим на это движение время *t* ─ *t*0. Двигаясь затем из точки *y(t*) оптимально, мы затратим на движение от точки *y*(*t*) до точки *x*1 время *T(y(t*)). В результате мы совершим переход из точки *x*0 в точку *x*1, затратив на этот переход время (*t* ─ *t*0)+*T*(*y*(t)). Но так как оптимальное время движения от точки *x*0 до точки *x*1 равно *T*(*x*0), т. е. равно *T*(*y*(*t*0)), то *T*(y(*t*0))≤(*t* ─ *t*0)+*T*(*y*(*t*)). Заменяя функцию *T* через *ω* (см. (1.8)) и разделив обе части неравенства на положительную величину *t* ─ *t*0, получаем отсюда и поэтому, переходя к пределу при *t→t*0, находим

│при ≤1. (1.11)

Но производная, указанная в левой части этого неравенства, вычисляется по формуле полной производной Поэтому согласно (1.9) и (1.10) неравенство (1.11) принимает вид Точки *x*0, *u*0 здесь были произвольными. Таким образом, *для любой (отличной от x*1*) точки x фазового пространства и любой точки u области управления U выполнено соотношение*

 (1.12)

Пусть теперь (*u*(*t*), *x*(*t*)) ─ оптимальный процесс, переводящий объект из фазового состояния *x*0 в состояние *x*1, и *t*0≤*t*≤*t*1 ─ отрезок времени, в течение которого это оптимальное движение происходит, так что *x*(*t*0)= *x*0, *x*(*t*1)=*x*1 и *t*1=*t*0 + *T*(*x*0). Движение по рассматриваемой оптимальной траектории от точки *x*0 до точки *x*(*t*) осуществляется в течение времени *t* ─ *t*0, а движение от точки *x*(*t*) до точки *x*1 ─ в течение времени *T*(*x*0) ─ (*t* ─ *t*0). Быстрее, чем за время *T*(*x*0) ─ (*t* ─ *t*0), из точки *x*(*t*) попасть в точку *x*1 невозможно. Итак, *T*(*x*0) ─ (*t* ─ *t*0) есть время оптимального движения из точки *x*(*t*) в точку *x*1, т. е. *T*(*x*(*t*))= *T*(*x*0) ─ (*t* ─ *t*0). Заменив здесь *T* через *ω*, т. е. *ω*(*x*(*t*))= *ω*(*x*0) + *t* ─ *t*0) и взяв производную по *t*, получаем

 *t*0≤*t*≤*t*1. (1.13)

Таким образом, *для каждого оптимального процесса в течение всего движения выполняется равенство* (1.13).

Если мы теперь введём в рассмотрение функцию

*B*(*x, u*(*t*))=, (1.14)

То соотношения (1.12) и (1.13) могут быть записаны следующим образом:

*B*(*x, u*)≤1 для всех точек *x*≠*x*1 и *u*; (1.15)

*B*(*x, u*)≡1 для любого оптимального процесса (*u*(*t*), *x*(*t*)). (1.16)

Итак, справедлива следующая

Т е о р е м а 1.1. *Если для управляемого объекта, описываемого уравнением* (1.5) *и предписанного конечного состояния x*1 *выполнены гипотезы* 1 *и* 2*, то имеют место соотношения* (1.15) *и* (1.16) (оптимальность понимается в смысле быстродействия).

Эта теорема и составляет сущность *метода динамического* *программирования* для рассматриваемой задачи. Эту теорему можно сформулировать и несколько иначе. Написав соотношение (1.16)

Для *t*=*t*0, *получим B*(*x*0, *u*(*t*0))=1, т. е. *для любой точки x*0(отличной от *x*1) *найдётся в U такая точка u* (*а именно u=u*(*t*0)), *что B*(*x*0, *u*)=1. В сопоставлении с неравенством (1.15) получаем соотношение

 для любой точки *x*≠*x*1. (1.16\*)

Метод динамического программирования (1.15), (1.16) (или, что то же самое, (1.16\*), (1.16)) содержит некоторую информацию об оптимальных процессах и потому может быть использован для их разыскания. Однако он имеет ряд неудобств. Во-первых, применение этого метода требует нахождения не только оптимальных управлений, но и функции *ω*(*x*), так как эта функция входит в соотношения (1.15) ─ (1.16\*). Во-вторых, уравнение Беллмана (1.16\*) (или соотношения (1.15), (1.16)) представляет собой уравнение в частных производных относительно функции *ω*, осложнённое к тому же знаком максимума. Указанные обстоятельства сильно затрудняют возможность пользования методом динамического программирования для отыскания оптимальных процессов в конкретных примерах. Но самым главным недостатком этого метода является предположение о выполнении гипотез 1 и 2. Ведь оптимальные управления и функция *ω* нам заранее не известны, так что гипотезы 1 и 2 содержат предположение о неизвестной функции, и проверить выполнение этих гипотез по уравнениям движения объекта невозможно. Этот недостаток можно было бы считать не особенно существенным, если бы после решения оптимальной задачи этим методом оказалось, что функция *ω*(*x*) действительно является непрерывно дифференцируемой. Но дело заключается в том, что даже в простейших, линейных задачах оптимального управления функция *ω*(*x*) не является, как правило, всюду дифференцируемой. Тем не менее, методом динамического программирования можно нередко пользоваться как ценным эвристическим средством.

1. **Принцип максимума.** Продолжим теперь рассуждения предыдущего пункта, предположив функцию *ω*(*x*) уже дважды непрерывно дифференцируемой (всюду, кроме точки *x*1). Итак, будем предполагать, что выполнена следующая

Г и п о т е з а 3. *функция ω*(*x*) *имеет при x≠x*1 *вторые непрерывные производные i, j=*1,2,…,*n*, *а функции fi*(*x, u*) ─ *первые непрерывные производные где i, j=*1,2,…,*n.*

Пусть (*u(t), x(t)*)*, t*0≤*t*≤*t*1, ─ оптимальный процесс, переводящий объект (1.2) (или (1.3)) из фазового состояния *x*0 в состояние *x*1. Фиксируем некоторый момент времени *t*, *t*0≤*t*≤*t*1, и рассмотрим функцию *B*(*x, u*(*t*))=переменного *x.* В силу гипотезы 3 вытекает, что функция *B*(*x, u*(*t*)) всюду, кроме точки *x*1, имеет непрерывные производные по переменным *x*1,*x*2,…,*xn*:

 (1.17)

В частности, так как *x*(*t*)≠*x*1 (поскольку *t*<*t*1), то функция *B*(*x, u*(*t*)) имеет вблизи точки *x*=*x*(*t*) непрерывные производные по переменным *x*1,*x*2,…,*xn*. Далее, мы имеем в силу (1.15), (1.16) *B*(*x, u*(*t*))≤1 для любого *x≠x*1; *B*(*x, u*(*t*))=1 при *x=x*(*t*).

Эти два соотношения означают, что функция *B*(*x,u*(*t*)) достигает в точке *x*=*x*(*t*) максимума, и потому её частные производные по *x*1*,…,xn* обращаются в нуль в этой точке:

 (1.18)

Кроме того, дифференцируя функцию по *t,* находим

Поэтому соотношение (1.18) может быть переписано в следующем виде:

 (1.19)

Заметим теперь, что в формулы (1.15), (1.16), (1.17) и (1.19) сама функция *ω* не входит, а входят только её частные производные . Поэтому мы введём для удобства следующие обозначения:

 (1.20)

Тогда функция *B* (см. (1.14)) записывается таким образом:

*B*(*x*(*t*)*, u*(*t*))=

и соотношение (1.16) принимает вид

, для оптимального процесса (*x*(*t*), *u*(*t*)), *t*0≤*t*<*t*1. (1.21)

Кроме того, согласно (1.15)

 для любой точки *uU* и всех *t*0≤*t*<*t*1. (1.22)

Наконец, соотношения (1.19) записываются следующим образом:

 (1.23)

Итак, *если* (*u*(*t*), *x*(*t*)), *t*0≤*t*<*t*1, ─ *оптимальный процесс, то существуют такие функции ψ*1(*t*), *ψ*2(*t*),…, *ψn*(*t*) (*они определяются равенствами* (1.20))*, что имеют место соотношения* (1.21), (1.22), (1.23).

Рассмотрение левых частей соотношений (1.21), (1.22) подсказывает нам, что целесообразно ввести в рассмотрение следующую функцию:

 (1.24)

зависящую от 2*n+r* аргументов *ψ*1, *ψ*2,…, *ψn*, *x*1,…, *xn*, *u*1,…, *ur*. С помощью этой функции соотношения (1.21), (1.22) записываются в следующем виде:

 для оптимального процесса (*u*(*t*), *x*(*t*)), *t*0≤*t*<*t*1, (1.25)

где *ψ*(*t*)=(*ψ*1(*t*),…,*ψn*(*t*)) определяются равенствами (1.20);

для любой точки *uU* и всех *t*0≤*t*<*t*1. (1.26)

Вместо неравенства (1.26) мы можем в силу (1.25) написать следующее соотношение:

 *t*0≤*t*<*t*1. (1.27)

Наконец, соотношения (1.23) можно, очевидно, переписать так:

 (1.28)

Итак, *если* (*u*(*t*), *x*(*t*)), *t*0≤*t*<*t*1, ─ *оптимальный процесс*, то существует такая функция *ψ*(*t*)=(*ψ*1(*t*),…, *ψn*(*t*))*, что выполняются соотношения* (1.25), (1.27), (1.28)*, где функция H определяется соотношением* (1.24).

Так как в соотношениях (1.24), (1.25), (1.27), (1.28) нигде не участвует явно функция *ω*(*x*), то равенства (1.20), выражающие функции *ψ*1(*t*),…, *ψn*(*t*) через *ω*, никаких добавочных сведений не дают, и о них можно забыть, ограничившись утверждением, что какие-то функции *ψ*1(*t*),…, *ψn*(*t*), удовлетворяющие перечисленным соотношениям (1.25), (1.27), (1.28), существуют. Соотношения (1.28) представляют собой систему уравнений, которым эти функции удовлетворяют. Заметим, что функции *ψ*1(*t*),…, *ψn*(*t*) составляют нетривиальное решение этой системы (т. е. ни в какой момент времени *t* все эти функции одновременно в нуль не обращаются); действительно, если бы при некотором *t* было *ψ*1(*t*)= *ψ*2(*t*)=…=*ψn*(*t*)=0, то в силу (1.24) мы получили бы *H*(*ψ*(*t*), *x*(*t*), *u*(*t*))=0, что противоречит равенству (1.25). Таким образом, мы получаем следующую теорему, которая носит название *принципа максимума.*

Т е о р е м а 1.2. *Предположим, что для рассматриваемого управляемого объекта, описываемого уравнением* (*в векторной форме*)

 (A)

*и предписанного конечного состояния x*1 *выполнены гипотезы* 1, 2 *и* 3. *Пусть* (*u*(*t*), *x*(*t*)), *t*0≤*t*≤*t*1, ─ *некоторый процесс, переводящий объект из начального состояния x*0 *в состояние x*1. *Введём в рассмотрение функцию H, зависящую от переменных x*1(*t*),…, *xn*(*t*)*, u*1*,…,ur и некоторых вспомогательных переменных ψ*1(*t*),…, *ψn*(*t*) (см. (1.24)):

 (B)

*С помощью этой функции H запишем следующую систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных:*

 (C)

*где* (*u*(*t*), *x*(*t*)) ─ *рассматриваемый процесс* (см. (1.28)). *Тогда, если процесс* (*u*(*t*), *x*(*t*)), *t*0≤*t*<*t*1*, является оптимальным, то существует такое нетривиальное решение ψ*(*t*)=(*ψ*1(*t*),…, *ψn*(*t*))*, t*0≤*t*<*t*1*, системы* (C)*, что для любого момента t, t*0≤*t*<*t*1*, выполнено условие максимума*

 (D)

(см. (1.27)) *и условие* (1.25) *H*(*ψ*(*t*),*x*(*t*),*u*(*t*))=1.

Однако в приведённой здесь форме принцип максимума страдает одним недостатком: он выведен в предположение дифференцируемости (и даже двукратной) функции *ω*(*x*), а эта функция в действительности не является (в обычно встречающихся случаях) всюду дифференцируемой.

Из-за предположения о выполнении сформулированных гипотез (о функции *ω*(*x*)) принцип максимума в том виде, в каком он сформулирован выше, не является удобным условием оптимальности. По форме он выведен как необходимое условие оптимальности: если процесс оптимален, то выполнено соотношение (1.16\*) и соответственно (D), т. е. выполнение этого условия необходимо для оптимальности. Однако это условие выведено лишь в предположении выполнения гипотез 1, 2, 3, а их выполнение отнюдь не необходимо для оптимальности. Вот почему сформулированные выше теоремы не могут считаться необходимыми условиями оптимальности.

Замечательным, однако, является тот факт, что *если в теореме* 1.2 *решение ψ*(*t*) *и условие максимума* (D) *рассматривать на всём отрезке t*0≤*t*≤*t*1(*а не только при t*0≤*t*<*t*1)*, а заключительное условие*

 *H*(*ψ*(*t*1), *x*(*t*1), *u*(*t*1))≥0, (E)

*то в этой форме принцип максимума будет справедлив без каких бы то ни было предположений о функции ω, т. е. принцип максимума станет весьма удобным и широко применимым* ***необходимым условием оптимальности.***

**§ 3. Пример. Задача синтеза**

1. **Пример применения принципа максимума.** В этом пункте мы разберём один пример вычисления оптимальных процессов. Именно, рассмотрим управляемый объект, упомянутый в п. 3 (см. уравнения (1.1)), при условии, что сила трения и упругая сила отсутствуют (т. е. *b*=0, *k*=0), масса *m* равна единице (*m*=1), а управляющий параметр подчинён ограничениям |*u*|≤1. Иначе говоря, мы рассматриваем материальную точку *G* массы *m=*1 (см. рис. 10), свободно и без трения движущуюся по горизонтальной прямой и снабжённую двигателем, развивающим силу *u*, где |*u*|≤1. Согласно (1.1) уравнения движения этого объекта имеют вид:

(1.29)

─1≤*u*≤1. (1.30)

Для этого объекта рассмотрим задачу о быстрейшем попадании в начало координат (0, 0) из заданного начального состояния *x*0=(*x*01, *x*02). Иначе говоря, будем рассматривать задачу об оптимальном быстродействии в случае, когда конечным положением служит точка *x*1=(0, 0). Механически это означает, что материальную точку, имеющую заданное положение *x*01 и заданную начальную скорость *x*02, мы хотим за кратчайшее время привести в начало отсчёта с нулевой скоростью (т. е. добиться того, чтобы точка пришла в начало отсчёта и остановилась там).

Функция *H* в рассматриваемом случае имеет вид

*H*=*ψ*1*x*2+*ψ*2*u* (1.31)

(см. (1.29) и (B)). Далее, для вспомогательных переменных *ψ*1, *ψ*2 мы получаем систему уравнений . Из этой системы уравнений находим: *ψ*1=*d*1; *ψ*2= ─*d*1*t+d*2, где *d*1, d2 ─ постоянные интегрирования. Далее, в силу соотношения максимума (D) мы находим, учитывая (1.31) и (1.30):

*u*(*t*)= +1, если *ψ*2(*t*)>0; *u*(*t*)= ─1, если *ψ*2(*t*)<0.

Иначе говоря, *u*(*t*)=sign *ψ*2(*t*)=sign (─ *d*1*t* + *d*2). Отсюда следует, что *каждое оптимальное управление u*(*t*), *t*0≤*t*≤*t*1, *является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения*  *и имеющей не более двух интервалов постоянства* (ибо линейная функция ─*d*1*t + d*2 не более одного раза меняет знак на отрезке *t*0≤*t*≤*t*1).

Для отрезка времени, на котором u1, мы имеем (в силу системы (1.29)) , откуда находим

*x*1=1/2(*x*2)2+*c*. (1.32)

Таким образом, кусок фазовой траектории, для которого u1, представляет собой дугу параболы (1.32). Семейство парабол (1.32) показано на рис. 13 (они получаются друг из друга сдвигом в направлении оси *x*1). По этим параболам фазовые точки движутся снизу вверх (ибо = *u*1, т. е. ).

Рис. 13.

*x*1

*x*2

*x*1

*x*2

Рис. 14.

Аналогично для отрезка времени, на котором u ─1, мы имеем, откуда находим

*x*1= ─1/2(*x*2)2 + *c*’. (1.33)

Семейство парабол (1.33) (также получающихся друг из друга сдвигом в направлении оси *x*1) показано на рис. 14. По параболам (1.33) фазовые точки движутся сверху вниз (ибо )

Как было указано выше, каждое оптимальное управление *u*(*t*) является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения и имеющей не более двух интервалов постоянства. Если управление *u*(*t*) сначала, в течение некоторого времени, равно +1, а затем равно ─1, то фазовая траектория состоит из двух кусков парабол (рис. 15), примыкающих друг к другу, причём второй из этих кусков лежит на той из парабол (1.33), которая проходит через начало координат (ибо искомая траектория должна вести в начало координат). Если же, наоборот, сначала *u=* ─1, а затем *u= +*1, то мы получаем фазовую траекторию, изображённую на рис. 16. На рис. 15, 16 надписаны на дугах парабол соответствующие значения управляющего параметра *u*.

*0*

Рис. 16.

*u=+*1

*u= -*1

*C*

*x*0

*x*2

*x*1

Рис. 15.

*0*

*x*2

*x*1

*u=* +1

*u= -*1

*x*0

На рис. 17 изображено всё семейство полученных таким образом фазовых траекторий (здесь *AO* ─ дуга параболы *x*1=1/2(*x*2)2, расположенная в нижней полуплоскости; *BO* ─ дуга параболы *x*1= ─1/2(*x*2)2, расположенная в верхней полуплоскости).

Итак, согласно принципу максимума *только изображённые на рис.* 17 *траектории могут быть оптимальными,* причём видно, что из каждой точки фазовой плоскости исходит только одна траектория, ведущая в начало координат, которая может быть оптимальной (т. е. задание начальной точки *x*0 однозначно определяет соответствующую траекторию).

### A

*B*

 Рис. 17.

*u=+*1

*u= -*1

*0*

*x*2

*x*1

1. **Проблема синтеза оптимальных управлений.** Посмотрим на разобранный в предыдущих пунктах пример с несколько иной точки зрения. Найденное выше решение оптимальной задачи можно истолковать следующим образом. Обозначим через *v*(*x*)= +1 ниже линии *AOB*и на дуге *AO*, *v*(*x*)= ─1 выше линии *AOB* и на дуге *BO*. Тогда (см. 17) на каждой оптимальной траектории значение *u*(*t*) управляющего параметра (в произвольный момент времени *t*) равно *v*(*x*(*t*)), т. е. равно значению функции *v* в той точке, в которой в момент *t* находится движущаяся фазовая точка, пробегающая оптимальную траекторию *u*(*t*)=*v*(*x*(*t*)). Это означает, что, заменив в системе (1.29) величину *u* функцией *v*(*x*), мы получим систему

(1.34)

решение которой (при произвольном начальном состоянии *x*0) даёт оптимальную фазовую траекторию, ведущую в начало координат. Иначе говоря, система (1.34) представляет собой систему дифференциальных уравнений (с разрывной правой частью) для нахождения оптимальных траекторий, ведущих в начало координат.

Рассмотренный пример показывает, что решение задачи об оптимальных управлениях естественно ожидать в следующей форме. Будем решать оптимальную задачу в общей постановке:

(см. п. 3), рассматривая всевозможные начальные состояния и каждый раз предписывая в качестве конечного состояния начало координат *O* фазового пространства. Тогда (насколько можно судить по разобранному выше примеру) *существует такая функция v*(*x*), *заданная в фазовом пространстве V принимающая значения в области управления U, что уравнение*

 (1.35)

*определяет все оптимальные траектории, ведущие в начало координат.* Иначе говоря, оптимальное управление оказывается естественным искать не в форме *u=u*(*t*), а в форме *u=v*(*x*), т. е. *искомое оптимальное управление в каждый момент зависит лишь от того, в какой точке пространства находится в данный момент фазовая точка*.

Функцию *v*(*x*), дающую уравнение оптимальных траекторий в форме (1.35), называют *синтезирующей функцией,* а задачу нахождения синтезирующей функции ─ *задачей синтеза* оптимальных управлений. В разобранном примере синтезирующая функция была кусочно-непрерывной (даже кусочно-постоянной).

**Г л а в а II**

**ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ**

**§ 4. Линейная задача оптимального управления**

1. **Формулировка задачи.** Ниже будут подробно изучены управляемые объекты, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями относительно величин *x*1,…,*xn*, *u*1,…,*ur*, т. е. уравнениями вида

 *i*=1,2,…,*n*, (2.1)

где *aiα* и *biβ* ─ некоторые постоянные коэффициенты.

Одним из наиболее важных для приложений является случай, когда каждая из величин *u*1*,u*2*,…,ur* в уравнениях (2.1) представляет собой отдельный управляющий параметр, область изменения которого не зависит от значений остальных управляющих параметров и задаётся неравенствами

 *β*=1,…,*r*. (2.2)

Как было указано выше (см. п. 4), эти неравенства определяют *r*-*мерный параллелепипед*.

В дальнейшем при рассмотрении объектов вида (2.1) будет предполагаться, что управляющий параметр *u=*(*u*1, *u*2,…, *ur*) может меняться в замкнутой области управления *U*, представляющей собой *выпуклый многогранник* (лежащий в пространстве переменных *u*1, *u*2,…, *ur*).

Для того чтобы записать уравнения (2.1) в векторной форме, мы введём в рассмотрение матрицы

 (2.3)

элементами которых являются коэффициенты *aiα*, *biβ*, входящие в уравнения (2.1). Как обычно, результат применения матрицы *A* к вектору *x*=(*x*1, *x*2,…, *xn*) мы будем обозначать символом *Ax*, т. е. *y*=*Ax* есть *n-*мерный вектор, координаты которого определяются формулами

 (2.4)

Аналогично для любого *r-*мерного вектора *u=*(*u*1, *u*2,…, *ur*) через *Bu* обозначается вектор, *i-*я координата которого равна Таким образом, матрица *A* определяет линейное отображение координатного *n-*мерного пространства снова в *n-*мерное пространство, а матрица *B* определяет отображение *r-*мерного пространства в *n-*мерное.

Пользуясь матрицами *A* и *B*, мы можем теперь записать уравнения (2.1) в векторной форме:

 (2.5)

Пусть *u*(*t*)=(*u*1, *u*2,…, *ur*) ─ произвольное допустимое (в смысле п. 4) управление, заданное на некотором отрезке *t*0≤*t*≤*t*1, и *x*0=(*x*10,…, *xn*0) ─ некоторая точка фазового пространства. Обозначим *θ*1, *θ*2,…, *θk* все точки, в которых хотя бы одна из функций  *u*1(*t*), *u*2(*t*),…, *ur*(*t*) терпит разрыв, причём занумеруем эти точки таким образом, что *t*0<*θ*1<*θ*2<…<*θk*<*t*1. Подставив функции *u*1(*t*), *u*2(*t*),…, *ur*(*t*) в правые части системы (2.1),мы придём к системе уравнений

 (2.6)

или в векторной форме,

 (2.7)

Систему (2.7) мы рассмотрим сначала для значений *t*, удовлетворяющих неравенствам *t*0≤*t*≤*θ*1. На этом отрезке изменения аргумента существуют такие функции *x*1(*t*),…, *xn*(*t*), определённые и непрерывные на всём отрезке *t*0≤*t*≤*θ*1, которые, рассматриваемые на интервале *t*0<*t*<*θ*1, являются решениями системы (2.6) и, кроме того, удовлетворяют начальным условиям *x*1(*t*0)=*x*10, *x*2(*t*0)=*x*20,…, *xn*(*t*0)=*xn*0 (согласно сведениям из дифференциальных уравнений (см. книгу Л.С. Понтрягина «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Наука», М., 1965 (стр. 23, 24 и 168-172))).

Теперь мы можем рассмотреть систему (2.6) на отрезке *θ*1≤*t*≤*θ*2, воспользовавшись точкой *γ*1=(*x*1(*θ*1),…, *xn*(*θ*1), *θ*1) в качестве начального значения. На отрезке *θ*1≤*t*≤*θ*2 снова существует решение с начальным значением *γ*1. Это решение мы снова обозначим через *x*(*t*)=(*x*1(*t*),…, *xn*(*t*)). Теперь функция *x*(*t*) построена на отрезке *t*0≤*t*≤*θ*2 и непрерывна на всём этом отрезке (и, в частности, в «точке сопряжения» *θ*1;). Воспользовавшись, далее, новым начальным значением *γ*2=(*x*1(*θ*2),…, *xn*(*θ*2), *θ*2), мы продолжим эту функцию *x*(*t*) на отрезок *θ*2≤*t*≤*θ*3 и т. д. В конце концов мы определим *x*(*t*) на всём отрезке *t*0≤*t*≤*t*1.

Полученная функция *x*(*t*)=(*x*1(*t*),…, *xn*(*t*)) непрерывна на всём отрезке *t*0≤*t*≤*t*1 и является на нём *кусочно-дифференцируемой*; именно, во всех точках интервала *t*0<*t*<*t*1, кроме *θ*1, *θ*2,…, *θk*, функция *x*(*t*) непрерывно дифференцируема (и удовлетворяет системе (2.6)). Построенную функцию мы будем называть *решением* системы (2.6) (или уравнения (2.7)), *соответствующим* управлению *u*(*t*), при начальном условии *x*1(*t*0)=*x*10, *x*2(*t*0)=*x*20,…, *xn*(*t*0)=*xn*0. Наконец, мы будем говорить, что допустимое управление *u*(*t*), *t*0≤*t*≤*t*1, *переводит* фазовую точку из состояния *x*0 в состояние *x*1 (в силу закона движения (2.1) или (2.5)), если соответствующее ему решение *x*(*t*) системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию *x*(*t*0)=*x*0, приходит в момент *t*1 в точку *x*1, т. е. удовлетворяет также «конечному» условию *x*(*t*1)=*x*1.

Теперь можно уточнить постановку задачи.

*Линейной задачей оптимального управления* мы будем называть задачу об отыскании оптимальных быстродействий в случае, когда выполнены следующие три условия:

1. уравнения движения объекта линейны (см. (2.1) или (2.5));
2. предписанное конечное состояние *x*1 совпадает с началом координат (0, 0,…, 0) *n*-мерного фазового пространства переменных *x*1, *x*2,…,*xn*;
3. область управления *U* является *r*-мерным выпуклым многогранником в *r*-мерном пространстве (*u*1, *u*2,…, *ur*), причём начало координат этого пространства принадлежит многограннику *U*, но не является его вершиной.

Заметим, что начало координат *xi*=0, *i*=1,…,*n*, является положением равновесия системы

 (2.8)

получающейся из системы (2.1) отбрасыванием управлений (т. е. получающейся из (2.1) при *u*1*=u*2=…=*ur*=0). Таким образом, условие 2) означает, что ищется управление, переводящее объект из заданного начального состояния *x*0 в положение равновесия.

1. **Принцип максимума.** В пункте 6 мы сформулировали необходимое условие оптимальности, называемое *принципом максимума*. Данный пункт посвящён принципу максимума в случае линейной задачи оптимального управления. Вначале укажем те упрощения в формулировке принципа максимума, которые возникают в этом частном случае (т. е. в случае линейной задачи оптимального управления).

Заметим, прежде всего, что функция *H* (см. формулу (B) на стр. 10) принимает вид

 (2.9)

(Здесь в правой части записаны скалярные произведения; например, *ψAx* есть скалярное произведение векторов *ψ* и *Ax*.)

Далее, рассмотрим систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных *ψ*1, *ψ*2,…, *ψn* (см. формулу (C) на стр. 10). Мы имеем

Следовательно, система уравнений для вспомогательных переменных принимает вид

 (2.10)

т. е. представляет собой так называемую сопряжённую систему (по отношению к линейной системе (2.8)). В векторной форме система (2.10) записывается в виде

 (2.11)

где

─ матрица, получающаяся из матрицы *A* *транспонированием* (т. е. заменой строк столбцами).

Так как в правой части соотношения (2.9) первое слагаемое совсем не зависит от *u*, то при написании соотношения (D) (см. стр. 11) достаточно рассмотреть лишь второе слагаемое. Таким образом, соотношение (D) принимает в рассматриваемом случае вид

 (2.12)

для любого момента *τ*, *t*0≤τ*≤t*1.

Наконец, соотношение (E) (стр. 11) становится просто ненужным, так как в рассматриваемом случае оно всегда выполняется. Действительно, так как *x*(*t*1)=(0, 0,…, 0) (условие 2) на стр. 15), то в *H*(*ψ*(*t*1), *x*(*t*1), *u*(*t*1)) первое слагаемое обращается в нуль (см. (2.9)). Второе же слагаемое, в силу (2.12), заведомо неотрицательно, ибо при *u*1=…=*ur*=0 (эта точка, в силу условия 3) на стр.15, принадлежит многограннику *U*) мы имеем *ψ*(*τ*)*Bu*=0, а потому максимальное значение выражения *ψ*(*τ*)*Bu* неотрицатнльно. Итак, соотношение *H*(*ψ*(*t*1), *x*(*t*1), *u*(*t*1))0 для линейной оптимальной задачи всегда выполнено.

Сказанное можно резюмировать следующим образом. Пусть *u*(*t*), *t*0*tt*1, допустимое управление, переводящее объект (2.5) из заданного начального состояния *x*0 в положение равновесия (0, 0,…, 0). Будем говорить, что управление *u*(*t*) *удовлетворяет принципу максимума*, если существует такое нетривиальное решение (*t*) уравнения (2.11), для которого выполняется условие максимума (2.12) (в каждый момент времени , *t*0*t*1). *Для оптимальности управления u*(*t*) *необходимо, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума*. Это и есть та упрощённая формулировка принципа максимума, к которой мы приходим в случае линейной задачи оптимального управления.

1. **Принцип максимума — необходимое и достаточное условие оптимальности.** Замечательным фактом является то, что в случае линейной задачи оптимального управления принцип максимума представляет собой не только необходимое, но и достаточное условие оптимальности. Однако факт этот имеет место не для произвольной линейной задачи — имеются малосущественные исключения. Поэтому мы наложим на линейную задачу некоторое ограничение, называемое *условием общности положения*. Сформулируем это условие:

*Условие общности положения*: *если — вектор, параллельный произвольному ребру многогранника U, то вектор B не принадлежит никакому собственному инвариантному подпространству относительно преобразования A*. Невыполнение условия общности положения означает, что хотя бы для одного ребра многогранника *U* векторы *B*, *AB*, *A*2*B*,…, *An*-1*B* линейно зависимы, т. е. определитель *n-*го порядка, составленный из координат этих векторов, обращается в нуль. Однако *всюду в дальнейшем условие общности положения предполагается* (*если не оговорено противное*) *выполненным*.

Теперь перейдём к теореме, упоминавшейся в начале этого пункта.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть u*(*t*), *t*0*tt*1, — *допустимое управление, переводящее объект из заданного начального состояния x*0 *в положение равновесия* (0, 0,…, 0). *Для оптимальности управления u*(*t*) *необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума*.

1. **Основные теоремы о линейных оптимальных быстродействиях.**

Т е о р е м а 2.2. *Для каждого нетривиального решения* (*t*) *уравнения* (2.11) *соотношение* (2.12) *однозначно определяет допустимое управление u*(*t*); *при этом оказывается, что функция u*(*t*) *кусочно-постоянна и её значениями являются лишь вершины многогранника U*.

Каждую точку разрыва оптимального управления мы будем называть *точкой переключения*.

Т е о р е м а 2.3. *Предположим, что многогранник U является r-мерным параллелепипедом* (2.2) *и что все собственные значения матрицы A=*(*aij*), *составленной из коэффициентов уравнений* (2.1), *действительны. Тогда в оптимальном управлении u*(*t*)=(*u*1(*t*),…, *ur*(*t*)) *каждая из функций u*(*t*), =1,…,*r*, *кусочно-постоянна, принимает только значения a и b* (см. (2.2)) *и имеет не более n-*1 *переключений* (*т. е.* *не более n интервалов постоянства*)*, где n — порядок системы* (2.1).

Т е о р е м а 2.4 (т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и). *Пусть u*1(*t*) *и u*2(*t*) *— два оптимальных управления, заданных соответственно на отрезках t*0*tt*1 *и t*0*tt*2 *и переводящих точку x*0 *в начало координат*. *Тогда эти управления совпадают*, *т. е.* *t*1=*t*2 *и* *u*1(*t*)*u*2(*t*) *на отрезке t*0*tt*1.

*Областью управляемости* для объекта (2.5)мы будем называть множество всех точек *x*0фазового пространства *X*, из которых возможно при помощи какого-либо допустимого управления попасть в начало координат. Само начало координат мы также будем причислять к области управляемости. Ясно, что вопрос о нахождении оптимальных процессов разумно ставить лишь в случае, если начальное фазовое состояние *x*0 принадлежит области управляемости (ведь из точек, не принадлежащих области управляемости, вообще нельзя попасть в начало координат).

Т е о р е м а 2.5 (т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я). *Область управляемости является выпуклым открытым множеством фазового пространства X*; *для любой точки x*0, *принадлежащей области управляемости*, *существует оптимальное управление*, *переводящее точку x*0 *в начало координат*.

Т е о р е м а 2.6. *Если в линейной задаче оптимального управления матрица A* (см. (2.3)) *устойчива*, *т. е. все её собственные значения имеют отрицательные действительные части, то область управляемости совпадает со всем фазовым пространством X*. *Следовательно*, *для любой точки x*0*X существует оптимальное управление*, *переводящее фазовую точку x*0 *в начало координат*.

**§ 5. Решение задачи синтеза для линейных задач второго порядка**

1. **Упрощение уравнений линейного управляемого объекта.** Нередко бывает, что в линейной задаче общая запись уравнений движения объекта в виде (2.1) неудобна и целесообразно воспользоваться некоторыми упрощениями. Мы здесь отметим стандартные упрощения, которые можно осуществить с помощью замены координат.
* Прежде всего, рассмотрим вопрос о замене координат в фазовом пространстве *X* рассматриваемого управляемого объекта. Предположим, что в пространстве *X* вместо координат *x*1,…, *xn* введены новые координаты *y*1,…, *yn*, связанные с прежними координатами соотношениями

 (2.13)

(где матрицы *P*=(*pij*) и Q=(*qij*) взаимно обратны). Ясно, что при такой замене линейная система (2.1) превращается в новую линейную систему

коэффициенты которой легко вычисляются:

Таким образом, ,

Переходя к векторным обозначениям, можно сказать, что указанная замена координат переводит уравнение (2.5) в уравнение где матрицы *C* и *D* выражаются через матрицы *A, B, P, Q* по формулам *C*=*QAP*, *D*=*QB*.

Очевидно, при такой замене условия 1), 2), указанные на стр. 15, сохраняются и для уравнения получаемого после замены. Далее, каждый процесс (*u*(*t*), *x*(*t*)), удовлетворяющий уравнению переходит в процесс (*u*(*t*), y(*t*)), удовлетворяющий уравнению (и обратно). Так как при этом время *t* не меняется, то указанная замена переводит оптимальные процессы для уравнения (и наоборот). В частности, синтез оптимальных управлений для уравнения переводится с помощью преобразования координат (2.13) в синтез оптимальных управлений для уравнения .

Таким образом, если уравнение окажется проще и для него синтез оптимальных управлений можно будет построить, то из этого синтеза можно (с помощью афинного преобразования (2.13)) получит синтез и для первоначального уравнения . В этом и заключается смысл замены координат (2.13): она позволяет заменить матрицу *A* трансформированной матрицей *C*=*QAP,* в то же время вызывая лишь афинное искажение картины синтеза оптимальных управлений. Таким образом, преобразованием (2.13) можно воспользоваться для упрощения матрицы *A*, составленной из коэффициентов при фазовых координатах.

* Предположим, что в уравнении матрица *A* уже приведена к простейшему виду (с помощью описанного выше приёма). Укажем теперь, каким образом может быть упрощена матрица *B*, составленная из коэффициентов при управляющих параметрах.

С этой целью положим

 (2.14)

Это означает, что вместо *r* управляющих параметров *u*1,…,*ur* вводятся *n* других управляющих параметров *v*1,…, *vn*, благодаря чему система (2.1) заменяется следующей:

или в векторной форме,

Нужно только выяснить, в каких пределах может изменяться точка *v*=(*v*1, *v*2,…, *vn*). Удобно считать, что эта точка *v*=(*v*1, *v*2,…, *vn*) расположена в том же пространстве *X*, что и точка *x*=(*x*1,…, *xn*).

Соотношения (2.14) определяют линейное отображение *r-*мерного пространства переменных *u*1,…,*ur* в фазовое пространство *X*. Образом многогранника *U* при отображении (2.14) является некоторый выпуклый многогранник в пространстве *X*, который мы обозначим через *V*.

Таким образом, получаем два линейных уравнения:

 (2.15)

 (2.16)

**Г л а в а III**

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

**§ 6. Решение задачи синтеза в случае комплексных собственных значений**

1. **Задача синтеза для малых колебаний маятника.** Здесь будет дано полное решение задачи синтеза оптимальных управлений для линейных объектов, описываемых уравнениями второго порядка. Фазовое пространство *X* в этом случае представляет собой плоскость.

Рассмотрим колебание плоского маятника. Как известно колебание маятника, подвешенного к точке опоры, описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

(в нашем случае положим *β*=1)

при малых колебаниях маятника Sinφ≈φ тогда уравнение движения маятника запишется в виде:

 (3.1)

Управляющий параметр *u* (скалярный) будем предполагать изменяющимся в пределах −1*u*1.

Пусть — угол отклонения, а — скорость маятника. Тогда уравнение (3.1) перепишется в виде следующей нормальной системы:

 (3.2)

На плоскости *x*1, *x*2 «многогранник» *U* будет представляться отрезком [−1, 1], расположенным на оси *x*2. Легко видеть, что ось *x*2 не является собственным инвариантным подпространством матрицы *A*, которая для системы (3.2) имеет вид:

*A*=,

и потому условие общности положения всегда выполнено.

Найдём собственные значения матрицы *A*. Для этого составим характеристическое уравнение |*λE─A*|=0, т. е. *λ*2+*λ*+1=0. Откуда находим, что собственные значения матрицы A такие:

т. е. собственные значения матрицы *A* комплексные. Введём обозначения где *b*≠0.

Тогда матрица A преобразуется к виду:

=.

Будем рассматривать систему, соответствующую матрице , т. е. систему вида:

 (3.3)

Вначале рассмотрим соответствующую однородную систему:

 (3.4)

Общее решение этой системы имеет вид:

где *c, γ* – произвольные постоянные интегрирования.

Запишем функцию *H* и применим принцип максимума.

где ψ1, ψ2 определяются системой, сопряжённой к системе (3.3), т. е. системой вида:

 (3.5)

Общее решение этой системы имеет вид:

где *c’, γ’* – произвольные постоянные интегрирования. Т. е. функция *H* имеет вид:

Подставим в функцию *H* представление решений *x*1, *x*2:

Т. к. собственный вектор матрицы *A*, соответствующий собственному значению *λ* имеет вид *q*1─*iq*2, где *q*1=(1;─1/2); *q*2=(0;─).

Пусть *q*1 и *q*2 – базисные векторы новой косоугольной системы координат *y*1, *y*2. Тогда переход от системы *y*1, *y*2 к системе *x*1, *x*2 выражается формулами:

Тогда в новых координатах система уравнений (3.2) запишется в виде

или, иначе, в виде

где *v*=(*v*1, *v*2) ─ управляющая точка, которая может меняться в пределах многогранника *V*, представляющего собой отрезок [] оси *y*2.

Согласно теории вершинам *e*1=(0, ), *e*2=(0, ) многогранника *V* соответствуют точки *h*1=(1, −), *h*2=(-1, ) (координаты указаны в системе *y*1, *y*2), а каждый из углов *α*1, *α*2, соответствующих этим вершинам, равен π.

Рис. 18.

*y*1

*y*2

Теперь уже нетрудно построить синтез оптимальных управлений в плоскости *y*1, *y*2. Кусками фазовых траекторий будут дуги логарифмических спиралей, т. к. у нас =1, т. е. >0 (рис. 18).

 При переходе от координат *y*1, *y*2 к координатам *x*1, *x*2 картина синтеза афинно искажается.

# ***Список используемой литературы:***

# В.Г. Болтянский. «Математические методы оптимального управле­ния», М.: «Наука», 1968г.

# Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. «Математическая теория оптимальных процессов», 4-е издательство. М.: «Наука», 1983г.

# Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. «Методы оптимизации», Минск, издательство БГУ, 1981г.