Вопрос о взаимосвязи математики и философии впервые был задан довольно давно. Аристотель, Бэкон, Леонардо да Винчи - многие

великие умы человечества занимались этим вопросом и достигали выдающихся

результатов. Это не удивительно: ведь основу взаимодействия философии

с какой-либо из наук составляет потребность использования аппарата

философии для проведения исследований в данной области; математика же,

несомненно, более всего среди точных наук поддается философскому анализу

(в силу своей абстрактности). Наряду с этим прогрессирующая математизация

науки оказывает активное воздействие на философское мышление.

Если пытаться некоторым образом классифицировать различные науки, то неизбежно приходишь к выводу, что и математика, и философия занимают некоторое особое место в этой классификации. Необходимо замечаешь, что между ними много общего. Рассмотрим этот вопрос поподробнее.

Во времена античности и средневековья вообще нельзя было отделить математику и философию. Примером тому являются Аристотель и Декарт, которым математики обязаны новыми взглядами на логику и на геометрию. В то же время эти ученые создали собственные философские учения, тесно связанные, лучше даже сказать, неотделимые от их исследований в области математики. И обратно, их математические результаты базируются на их философских взглядах и в то же время следуют из них. Такое положение продолжалось вплоть до XVII веков. Даже

фундаментальный труд Исаака Ньютона, положивший начало всему

дифференциально-интегральному исчислению и механике, был озаглавлен

"Математические начала натуральной философии". Надо сказать, что и в

дальнейшем все настоящие великие математики являлись и

мыслителями-философами. К их числу можно отнести, кроме вышеперечисленных,

Лобачевского, Римана, Брауэра, Гильберта, Пуанкаре, Геделя.

Затем философия выделяется в

отдельную область человеческого знания, причем очень специфическую

область. Если различные естественные науки имеют дело с материальными

объектами, изучая их с некоторой, вполне определенной точки зрения

(биология - с живыми организмами, физика - с пространством, временем,

телами и т. д.), общественные и социальные науки имеют дело с такими

понятиями, как государство, революция и эволюция и т. д., гуманитарные

науки - со словом, текстом, музыкой, психология имеет

дело с мозгом и поведением человека и т.д., то философия делает предметом

своего анализа обобщения частных наук. Если учесть, что каждая

частная наука как раз и характеризуется тем, что обобщает и классифицирует

знания, то философия имеет дело с более высоким, вторичным уровнем

обобщения.

То же самое можно сказать и про математику. Ни один

математический объект не встречается в реальной жизни. При этом если для

некоторых объектов, как то точка, прямая, натуральное число, мы можем

увидеть и осознать их грубую модель в природе, то для подавляющего

большинства математических понятий таких моделей нет и быть не может.

Они возникли как чисто умозрительные построения и обобщения уже построенных объектов. Парадокс состоит в том, что при всем своем отрыве от действительности они помогают познавать природу. Надо заметить, что это происходит не напрямую, а с помощью привлечения еще какой-либо науки из области естествознания, а последнее время и общественные науки стали серьезно использовать математические методы в своих исследованиях. Таким образом, математика тоже имеет дело со вторичным уровнем обобщения.

Особняком ко всем наукам стоит логика. Все науки, в том числе философия и математика) подчиняются

формально-логическим законам (иначе они теряют право называться наукой), в то же время логика - наука об наиболее общих законах мышления, поэтому ее можно рассматривать как часть философии или близкую к ней науку. Не случайно Гедель рассматривал философию прежде всего с точки зрения "науки

логики". ootnote Философия. Под ред. В.Н Лавриненко. М.,1996. С.25 В то же время логика рассматривается как часть математики, так как

логические законы могут быть отображены в формализованные языки

(логические исчисления) и исследованы с помощью математических методов.

Именно в математике обращается наибольшее внимание на логическую

строгость доказательств, и именно в связи с проблемой обоснования

математики были разработаны неклассические логики. Их создание и развитие,

в свою очередь, сильно повлияло на развитие математики, в частности,

общей алгебры, топологии, теории множеств, теории рекурсивных функций и

многих других областей математики. Ни с одной другой наукой логика не

находится в таком тесном взаимопроникновении, как с математикой и

философией. Знаменательно, что законы логики заложил Аристотель -

философ и математик.

Кроме того, и математика, и философия характеризуются одной важной особенностью, которой в такой мере не обладает ни одна другая наука. Эта особенность напрямую вытекает из того, что обе науки имеют дело со вторичным уровнем абстракции. Ни математик, ни философ не имеют возможности воспользоваться напрямую таким действенным методом познания, как практический эксперимент или опыт. Ни математику, ни философу не нужно дорогостоящее оборудование или статистические данные. Они довольствуются умозрительными экспериментами и данными других наук. Для работы им необходимо иметь только ручку и лист бумаги (или другое средство для записи мыслей и результатов). Таким образом, если чувственное познание отходит на второй план, возрастает роль логического познания. Как ни парадоксально, при этом в творческом процессе возрастает роль интуиции, озарения, которую зачастую противопоставляют логике и не всегда признают в качестве способа достижения новых результатов, представляя движение мысли как ряд непрерывных строго обоснованных логических звеньев цепи силлогизмов. Именно роли и месту интуиции и логики в математике и математическом творчестве посвящен данный реферат.

 ewpage

 egincenter

 f

История вопроса ootnoteОсновные факты, используемые в этой части, взяты из книг [3] и [4]

 ndcenter

Сейчас в математике, как ни в одной другой науке, особое внимание обращается на строгость и логическую последовательность доказательств. При этом те рассуждения, которые применялись еще сравнительно недавно и рассматривались как строгие, на нынешнем этапе уже не являются доказательствами и требуют дополнительного обоснования. Например, допускали, что непрерывная функция не может изменить знак, не проходя через нуль. Теперь это доказывают.

Первым особое внимание логической стройности рассуждений уделил Аристотель. Именно его понятие силлогизма и группа выделенных им законов (тождества, противоречия и исключенного третьего), по которым должно строится любое доказательство, надолго определили развитие логики. Группа работ Аристотеля была объединена под названием "Органон", то есть инструмент для получения истинного знания. В Новое время вопросами теории познания (в то время еще не отделившейся от логики) занимались Фрэнсис Бэкон и Рене Декарт. В частности, был поставлен вопрос о формировании исходных понятий (определений и аксиом). У Бэкона основным инструментом познания служила индукция, а у Декарта --- дедукция. Декарт, как истинный геометр, призывал допускать в качестве истинных только очевидные утверждения.

Таким образом, аксиомы постигаются интуитивно, а все остальные знания выводятся из них с помощью дедукции без пропуска логических звеньев. В "Рассуждении о методе" Декарт предлагает следующие правила познания:

1) допускать в качестве истины только такие утверждения, которые ясно и отчетливо представлены уму и не могут вызывать

никаких сомнений; 2) расчленять сложные задачи на более простые и

доступные для решения; 3) последовательно переходить от известного и доказанного к неизвестному и недоказанному; 4) не допускать пропуска звеньев в цепи логических доказательств.

Родоначальником современной математической логики явился Готфрид Лейбниц, развивший аристотелевскую силлогистику и учение Декарта о врожденных

идеях. Именно он выдвинул идею создания алфавита мыслей, или универсального языка. Если создать систему знаков для высказываний, подобную системе цифр в арифметике, и создать некую формальную комбинаторику, которая может определять истинность или ложность некоторой мысли или утверждения, то можно получить общий метод и с помощью формально логических законов получать все возможные истины или определять случаи, когда высказывание неизбежно окажется ложным.

Противоположных взглядов на математику

придерживался философ Иммануил Кант. Если, по Лейбницу, все

математические науки можно воплотить в некотором универсальном логическом исчислении, то Кант утверждал, что все математические положения могут доказываться только путем обращения к наглядному представлению, которое дается только априорными формами чувственности.

Но в прошлом веке положение начало резко меняться.

Начало этому положила геометрия Лобачевского, в которой

только один постулат (аксиома) отличался от традиционной евклидовой геометрии. Эта геометрия уже не соответствовала привычным представлениям людей, но в то же время была логически безупречна и непротиворечива. Дальнейшие работа немецкого математика Римана, создавшего систему различных геометрий, наиболее известна из которых сферическая геометрия Римана, итальянского математика Бельтрами показали, что геометрии можно строить на различных системах аксиом и получать при этом непротиворечивые теории. Математика перешла на новый уровень абстракции.

Что же послужило толчком для подобного события? Основу классической геометрии составляли пять постулатов Евклида, из которых первые четыре казались очевидными, и только пятый был достаточно сложным и казался более похожим на теорему. На протяжении почти двух тысячелетий многие математики пытались вывести его из других аксиом, но это не удавалось. Тем не менее, на геометрию смотрели как на идеал научного знания, и вопрос о единственности геометрии был не просто математическим вопросом, а имел мировоззренческий, философский характер. У Канта, например, идея единственности геометрии была органичной частью его философской системы. Иначе говоря, в то время математики рассуждали так: геометрия Евклида является великолепно выстроенным зданием, правда, в нем есть некоторая неясность, связанная с 5 постулатом, однако, в конце концов, все выясниться и неясность будет устранена.

Однако в начале XIX века вдруг наступил кризис в отношении пятого постулата, и сразу трое человек (Н. Лобачевский, Ф. Гаусс и Я. Больяи) решают этот кризис методом построения новой геометрии. Почему же именно в этот момент произошел перелом? Вряд ли можно предполагать, что одновременно появились три гения, которых не было на протяжении многих веков.

Дело в том, что проблема пятого постулата предстала перед математиками в новом свете, уже не как досадная неясность, а как проблема,

порождающая ряд фундаментальных вопросов: как вообще должна быть построена математика? Может ли она быть построена на действительно прочных основаниях? Является ли она достоверным знанием? Является ли она логически точным знанием? Эти вопросы возникли не в связи с постановкой проблемы пятого постулата, а были определены общим состоянием математики в тот исторический момент.

Вплоть до XVII века математика находилась как бы в зачаточном состоянии. Наиболее разработана была геометрия, известны начала алгебры и тригонометрии. Но с XVII века математика начала бурно развиваться, и к началу XIX века она представляла собой довольно сложную и развитую систему знаний. Для нужд механики было создано и развивалось дифференциальное и интегральное исчисление; значительное развитие получила алгебра, появилось понятие функции; появилась теория вероятностей и теория рядов. Математическое знание выросло не только количественно, но и качественно. С этим развитием появилось множество новых понятий, которые математики не могли истолковать. Например, алгебра несла с собой понятие числа. Положительные, отрицательные и мнимые величины были в равной степени ее объектами, но что это такое, никто толком не знал до XIX века. Не было ответа даже на более общий вопрос --- что такое число? Что такое бесконечно малая величина, которая уже широко использовалась в дифференциальном и интегральном исчислениях? Как можно обосновать дифференцирование, интегрирование, суммирование рядов, то есть операции, требующие предельного перехода? Что представляет собой вероятность?

В итоге именно в XIX веке сложилась кризисная ситуация в математике.

Но трудности истолкований новых понятий еще можно было понять: то, что неясно сегодня, станет ясно завтра, когда соответствующая область получит должное развитие, когда там будет сосредоточено достаточное количество интеллектуальных усилий. Иначе дело обстояло с проблемой пятого постулата --- она стояла уже около двух тысячелетий, и многие люди ей занимались, но решения не было. Может быть, что эта проблема устанавливала некий эталон для истолкования тогдашнего состояния математики и уяснения того, что есть математика вообще. Возможно, математика не является точным знанием. В свете этих вопросов проблема пятого постулата перестала быть частной задачей, а стала фундаментальной проблемой и была решена путем построения новых геометрий. Параллельно на основе нового взгляда на метематику развивались и другие области.

Алгебра логики возникла в работах англичанина Джона Буля, который предложил рассматривать логику как алгебру, где переменные принимают только два значения - 0 и 1, и применять к высказываниям методы алгебры. Буль полагал, что есть некие общие принципы мышления, что дает основания для аналогий между логикой и алгеброй. Эта идея блестяще подтвердилась, кроме того, булевозначные алгебры, как оказалось, являются моделями классической теории множеств.

На этом подходе ныне базируется вся электронно-вычислительная техника. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах математика Готлоба

Фреге, который осуществил дедуктивно-аксиоматическое построение логики высказываний и

логики предикатов. Он построил систему формализованной арифметики, тем

самым пытаясь обосновать идею сводимости значительной части математики к

чистой логике. Это направление получило название логицизм, который был

развит в работе "Принципы математики" англичанами Бертраном Расселом и

Альфредом Уайтхедом. В этом же направлении работали гениальные математики

Пеано (им создана знаменитая система аксиом Пеано для определения базового понятия математики - натурального числа и принципа математической индукции) и Гильберт, строго аксиоматически изложивший евклидову геометрию в своем труде "Основания геометрии"(1889). Надо сказать, что она была достаточно далека от той геометрии, которую до сих пор преподают в школах.

Однако с углублением формализации математики начали натыкаться на различные парадоксы, связанные с определениями абстрактных понятий, из которых наиболее известен парадокс Рассела в теории множеств. Возникла

ситуация, похожая на ситуацию с евклидовой геометрией. Опять еще более

остро стали философские вопросы обоснования математики и возможности

ее построения на чисто логико-аксиоматической основе.

В 1931 году

австрийский математик Курт Гедель доказал неполноту достаточно богатых

формальных систем, что и означало, что лейбницева программа полной

формализации мышления невозможна. Иначе говоря, существуют

предложения, которые формулируются в терминах данной теории, но

недоказуемы и неопровержимы в рамках этой теории. Эти исследования

наряду с исследованиями поляка Тарского и голландца Чёрча определили

современное состояние математической логики. На сегодняшний день

ситуация с классической логикой повторила ситуацию с евклидовой

геометрией. Созданы и развиваются интуиционистская и конструктивная

логики, основанные на отбрасывании или замене классических

аристотелевских законов логики. Ведутся исследования в области

многозначных, релевантных и модальных логик.

Итак, можно сказать, что в ходе развития математики все большее внимание уделялось строгости логики. Надо сказать, что это не является какой-то особенностью именно математики. Для примера можно взять юриспруденцию и сравнить законы, которые использовались в средние века, в Новое время и сегодняшний свод законов. Можно увидеть, что при сохранении основных идей (записанных еще в Библии --- не убий, не укради и т.д.) увеличивается детальность и логическая последовательность законов. Тем более это видно в естественных науках. Был момент, когда казалось, что все в математике можно свести к формальным правилам вычислений. Иначе говоря, можно было бы сконструировать некую машину, которая могла бы генерировать все теоремы и их доказательства, а нужда в математике-человеке с его интуицией бы отпала. Только в 30-х годах XX века вновь появилось понимание, что машина не может заменить человека в этой области знаний (и, по-видимому, ни в какой другой).

 egincenter

 f

О природе математического умозаключения

 ndcenter

Сама возможность математического познания при рассмотрении ее с точки зрения логицизма кажется неразрешимым противоречием. Если все предложения в математике выведены одно из другого по правилам формальной логики, то верно ли, что вся математика сводится к бесконечному повторению и тавтологии? Ведь силлогизм Аристотеля не может научить ничему новому, и если все теоремы вытекают из закона тождества, то все должно к сводится к нему и к нескольким аксиомам, лежащим в основе математики. Правда, надо предположить или проверить, что эта система аксиом не сводится к закону противоречия.

Получается, что ни одна теорема не могла бы дать никаких новых знаний, если бы в ее доказательство не входила бы новая аксиома. Ведь сам силлогизм ничего не добавляет к тем данным, которые даются в посылке. Иначе говоря, вся математика сводилась бы к нескольким аксиомам и скрытому способу говорить, что А есть А. Кроме того, если математика имеет дедуктивный характер, то как объяснить тот факт, что 90 процентов математических статей связаны с обобщением уже известных результатов. Чтобы объяснить смысл этих противоречий, надо признать, что математическое умозаключение само по себе имеет род творческой силы, и этим отличается от силлогизма.

Рассмотрим один из важнейших, если не самый важный, тип математических умозаключений, причем сделаем это на простейшем примере, на примере арифметике. Выражение "дважды два равно четырем" используется, когда говорят о чем-то очень простом, элементарном. Это вроде бы ясно, и доказывать тут нечего. Первым пытался доказать это Лейбниц. Для этого необходимо ввести некие понятия (по сути - аксиомы), а именно понятие числа 1 и операции прибавления к некоторому числу х числа 1. Далее определяем числа 2, 3 и 4 следующими равенствами

2=1+1, 3=2+1, 4=3+1. Теперь определим операцию прибавления 2 следующим образом х+2=(х+1)+1. Заметим, что пока ничего содержательного не появилось, но при этом в определении новой операции неявно используется аксиома ассоциативности сложения. Иначе говоря, либо вводится эта аксиома, и тогда новая операция определяется однозначно, либо сначала определяется новая операция прибавления 2, и из нее получается ассоциативность сложения как свойство (а не как аксиома). Далее имеем цепочку равенств 2+2=(2+1)+1=3+1=4. Откуда и получим, что 2+2=4. Таким образом, на основе формально введенных понятий мы доказали формальное(!) равенство. Вроде бы эти рассуждения может проделать и машина, с этим никто не спорит.

Но если спросить любого математика об этом доказательстве, то он скажет, что это рассуждение доказательством не является, это просто проверка. Грань между доказательством и проверкой очень тонкая, и если все математики ее чувствуют интуитивно, то далеко не все смогут ее точно определить. На самом деле проверка - это некое бесплодное рассуждение, где фактически мы просто проверили закон тождества, перевели предпосылки на другой язык. Истинное доказательство должно быть плодотворным, и вывод должен заключать в себе некое новое знание, чем посылка, которое берется не из новых введенных аксиом, а из самой творческой силы умозаключения.

Рассмотрим другое рассуждение, которое, по-видимому, лежит в самой основе математики. Пусть у нас есть некоторое высказывание, зависящее от n, например, что существует n-угольник, у которого 3 острых угла. Ряд силлогизмов будет выглядеть следующим образом

Это верно для n=3.

Если это верно для n=3, то это верно для n=4.

Следовательно, это верно для n=4.

Если это верно для n=4, то это верно для n=5.

Следовательно, это верно для n=5. и т.д.

Таким образом, мы получаем бесконечный ряд силлогизмов. Если мы хотим проверить наше утверждение для 10-угольника, то нам необходимо пройти все предыдущие этапы, и обосновать 7 силлогизмов. Для 100-угольника потребуется немного больше времени --- 97 силлогизмов. Тем не менее это время конечное. А вот если потребуется узнать, верна ли теорема для многоугольника с миллиардом углов, то жизни одного человека уже не хватит. Однако, как бы далеко мы не шли, мы никогда не дойдем до применимой ко всем числам теоремы, которая и есть предмет науки математика. Чтобы ее достигнуть, необходимо пройти бесконечный ряд силлогизмов, то есть надо перескочить бездну, сделать шаг, на который не способна формальная логика, и, следовательно, на этот шаг неспособна машина.

Орудием, которое

позволяет переходить от конечного к бесконечному, является математическая индукция, которая избавляет нас от ряда долгих и однообразных проверок, позволяя получить общую теорему. Надо сказать, что метод математической индукции для натуральных, а в последнее время и для трансфинитных чисел, включен в систему аксиом Пеано. Если задуматься, то это очень странный факт - ведь МЕТОД мышления включен в систему аксиом, он не может быть выведен из других аксиом - понятий при помощи логических законов. Причем еще в начале нашего века множество математиков пыталось создать систему аксиом без индукции (кстати, это же пытался сделать и сам Пеано, и великий Гильберт), но так или иначе, индукция возникала в скрытой, неявной форме.

Вторая странность заключается вот в чем. Если аксиома - это то, что нам очевидно, то надо сказать, что метод математической индукции имеет дело с бесконечностью, перед которой бессилен любой человеческий опыт. Это правило не доступно для аналитического или опытного доказательства или проверки. Но тем не менее, этот метод достаточно очевиден для мало-мальски образованного и подготовленного ума. Доказательством тому является тот факт, что в последние годы он входит в школьную программу для 10-11 классов, а наиболее подготовленные ученики осваивают его в 7-8 классе, причем интуитивно они начинают его применять примерно с 6 класса, и поэтому его логическую формулировку воспринимают достаточно легко. Здесь, по-видимому, сказывается только утверждение могущества человеческого разума, который способен постичь общность бесконечного повторения одного и того же акта, даже в различных его вариациях. В силу этого могущества разум обладает непосредственной интуицией бесконечного и интуицией обобщения.

Еще один аспект проблемы индукции в математике связан с процессом конструирования. Имея простые понятия, математики строят более сложные совокупности или конструкции. Затем путем анализа этих сочетаний они возвращаются к первоначальным объектам, раскрывая соотношение этих элементов и выводя отсюда отношение самих совокупностей. В этом процессе конструирования, которому всегда совершенно справедливо придавалось большое значение, некоторые хотели видеть необходимое и достаточное условие прогресса математики и вообще точных наук. Необходимость очевидна. А вот достаточность? Ведь для того, чтобы процесс конструирования был полезен, необходимо, чтобы конструкция несла в себе что-то новое по сравнению с составляющими ее элементами. Например, для чего изучать многоугольники, с которыми несомненно, дело иметь гораздо труднее, вместо того, чтобы ограничиться изучением только треугольников? Ведь любой многоугольник может быть составлен из треугольников.

Делается это для того, чтобы получать и доказывать общие свойства многоугольников с любым числом сторон (например, оценка периметра через сумму диагоналей), которые можно применять затем в любом частном случае. Если же рассматривать многоугольник только как фигуру, состоящую из элементарных треугольников, то увидеть эти свойства удается только ценой значительных умственных усилий или интуиции, или не удается вообще.

Отсюда получается, что конструирование становится плодотворным тогда, когда его можно сравнивать с аналогичными конструкциями того же родового понятия и когда есть возможность доказывать некоторые родовые свойства, не прибегая к проверке этих свойств для каждой конструкции. Для этого опять необходимо подняться от частного к общему, а это делается с помощью математической индукции.

 egincenter

 f

Два типа математического мышления

 ndcenter

Если ознакомится с работами различных математиков, то легко заметить, что существуют два сильно отличающихся типа математического мышления. Один из них можно условно называют геометрическим или европейским тип, а другой - алгебраическим или азиатским (ныне его также называют аналитическим стилем мышления). Конечно, подобные названия сильно условны, и появились, по-видимому, в связи с тем, что геометрия как школа и наука развилась в Европе (Пифагор, Евклид, Декарт, Лобачевский), а начало алгебре, уравнениям и т.д. было положено в трудах арабов Аль-Хорезми, Омара Хайяма и других. Само слово алгебра происходит от арабского слова аль-джебр.

Аналитики придерживаются в своих работах логической стройности, двигаясь вперед шаг за шагом. Обычно они не пропускают без доказательства ни одной мелочи, аккуратно обосновывая каждый шаг. При этом общая идея доказательства может потонуть за нагромождением разного рода деталей. Чертежи или иного рода наглядные представления используются в работах аналитиков чрезвычайно редко.

Совершенно иная ситуация у математиков с

геометрическим стилем мышления. Их работы изобилуют рисунками, если это вообще возможно. Если нет, то по крайней мере они на словах пытаются

объяснить то, что представляется их внутреннему взору. При этом общие идеи доказательств обычно выписываются до строгой формулировки теорем, а иногда и вместо нее. Они не затрудняют себя доказательством мелких деталей.

Надо сказать, что условное деление на геометров и аналитиков вовсе не означает, что они занимаются именно той областью математики, которая вынесена в название соответствующего типа мышления. Это просто условное название того типа мышления, который присущ данным людям. Причем, видимо, эта склонность дается от рождения, а не формируется в результате воспитания или обучения, хотя в ходе этих процессов можно развить или подкорректировать эти склонности. Чтобы проиллюстрировать все вышесказанное примерами, обратимся к свидетельству французского математика Анри Пуанкаре, записанной в его книге "Ценность науки". Я позволю себе процитировать довольно большой кусок, потому что он дает яркие примеры двух типов математиков, с которыми Пуанкаре был знаком лично.

"Так, Мере хочет доказать, что двучленное уравнение всегда имеет корень, или, говоря просто, что всегда можно разделить угол на части. Если есть истина, которую мы могли бы узнать непосредственной интуицией, то она здесь. Кто станет сомневаться, что угол всегда можно разделить на какое угодно количество равных частей, и чтобы доказать это, ему нужно несколько страниц. Напротив, посмотрите на Клейна: он изучает один из самых абстрактных вопросов теории функций; требуется узнать, всегда ли существует на данной поверхности Римана функция, допускающая данные сингулярности. Что делает знаменитый немецкий геометр? Он заменяет поверхность Римана металлической поверхностью, электропроводность которой меняется по известным законам, и соединяет две точки ее с двумя полюсами элемента. Ток, говорит он, непременно пройдет, и распределение этого тока по поверхности определит функцию, особыми свойствами которой будут именно те, которые предусмотрены условием. Без сомнения, Клейн знает, что он дал здесь лишь наглядный очерк; и все-таки он не задумался опубликовать его; вероятно, он надеялся найти здесь если не строгое доказательство, то по крайней мере как бы нравственную уверенность. Логик с ужасом отбросил бы подобную концепцию или --- вернее --- ему и не нужно было бы ее отбрасывать, потому что она никогда не могла бы возникнуть в его уме."

Аналогичная, даже еще более характерная ситуация сложилась в общей теории функций, особенно функций комплексного переменного. Основа этого направления заложена в работах двух немецких математиков, Вейерштрасса и Римана. Они жили примерно в одно время, и получили примерно одинаковое образования. Математическая одаренность каждого из них не вызывает никаких сомнений. Работали они примерно в одной области, но насколько разительно их подходы отличаются друг от друга! Если Вейерштрасс сводил все функции к аналитическим рядам и рассматривал далее операции и свойства числовых и функциональных рядов, то есть как будто сводил всю теорию функций к алгебре или даже арифметике, то

Риман прибегал к помощи геометрии и особенно топологии. Особенно интересно затронуть этот вопрос в свете того, что сама я лично была свидетелем очень яркого примера подобной классификации умов, и именно в этой области. Во время моего обучения в университете теорию функций комплексного переменного нам одновременно читали два преподавателя: Леонид Эммануилович Медников и Александр Борисович Воронецкий. Естественно, они разделили темы, и каждый читал эту теорию с той точки зрения, которая ему ближе. Если Воронецкий имеет ярко выраженные черты аналитического склада мышления, то Медников, наоборот, ярко выраженный геометр и, естественно, читал топологическую часть, связанную с римановыми многообразиями. Воронецкий же читал часть, связанную с оценками, неравенствами, разложениями в ряды и т.д. В чем же еще было отличие? Всем моим одногруппникам нравились лекции Воронецкого, потому что он не пропускал ни одной детали, все у него было логически правильно построено, при этом записано на бумаге, весь текст он полностью переносил на доску. Отдельно были выделены определения, затем теоремы, доказательства и примеры. Лекции же Медникова, по общему мнению, слушать было еще можно, а вот запоминать или записывать - нет. Он не записывал на доске практически ни одной формулы, а рисовал множество картинок, поясняя общую идею доказательства и не вдаваясь в детали. При этом в принципе было невозможно понять, где доказательство теоремы, а где пример. На мой взгляд, он как бы моделировал творческую работу математика, процесс его размышлений над теоремами. Причем надо заметить и неоднозначную оценку студентами методов того и другого. Если мои одногруппники считали, что лекции Медникова не понятны и поэтому скучны, то для меня, наоборот, лекции Воронецкого казались загруженными ненужными деталями и поэтому скучными и сложными для понимания, а идеи доказательства, выраженные в картинках, я помню до сих пор, и до сих пор именно красота интуитивных идей делает для меня эти рассуждения простыми. Иначе говоря, эти два отличия присущи не только великим умам, но и встречаются повсюду. Если аналитики не способны представлять в пространстве(а у мы, будучи студентами, подозревали, что Медников может представить четырехмерное пространство), то геометры не способны к длительным вычислениям и скоро в них путаются (именно сейчас, в ходе работы над диссертацией, у меня возникают серьезные проблемы со строгой записью доказательств. Надо ли говорить, что я считаю свой стиль мышления более геометрическим, чем аналитическим). Оба рода умов одинаково необходимы для развития науки, оба делают те открытия и шаги, на которые неспособны другие.

 egincenter

 f

Роль интуиции в математике

 ndcenter

Но, раз уж мы говорим, что математические рассуждения ученых античности и нового времени грешат отсутствием логической строгости, там не доказаны казавшиеся очевидными факты, то означает ли это, что все эти ученые были по своему складу ума геометрами? Конечно, это не так.

Иначе пришлось бы заключить, что в древности природа создавала только геометров, зато в 19 веке и на рубеже 20 вдруг перевыполнила план по аналитикам. Например, если взять Евклида , про которого неизвестно ничего, кроме одного сочинения, в котором и излагается система его аксиом, то можно с уверенностью заключить, что этот человек --- аналитик. Только логик мог в античные времена вообще принять необходимость выделения в геометрии неизбыточной системы непротиворечивых аксиом. С большой вероятностью можно утверждать, что сами аксиомы, принимаемые интуитивно, были высказаны другими учеными, тем более другими людьми доказаны теоремы геометрии. Но тем не менее эту геометрию мы называем евклидовой, потому что именно Евклид взял на себя труд обобщить и систематизировать разрозненные знания.

На сегодняшний день изменились не умы, а идеи. Сейчас от математиков, руководствуются они интуицией или логикой, требуется некий необходимый уровень строгости, и эта необходимость признана всеми. Какова же причина этого негласного соглашения? Она лежит на поверхности. Мало того, что интуиция, при всей ее творческой силе, не может дать нам строгости. Это еще полбеды. К сожалению, она не может дать достоверности знания, полученного с ее помощью.

Например, все мы имеем интуитивное понятие о

непрерывной функции как о функции, график которой представляется непрерывной линией. В то же время строгое определение непрерывности, на каком языке (топологическом, языке последовательностей, $ e- l$-окрестностей) его не формулируй, не может не содержать менее 5 предикатов, а нормальный, не занимавшийся математикой человек может понять сходу фразу, содержащую не более двух вложенных предикатов. Зачем тогда вообще нужно это строгое логическое определение? Но с помощью того интуитивного представления, которое мы имеем, представляя непрерывную кривую, мы получаем такое "доказательство": любая непрерывная функция имеет производную, так как любая кривая имеет касательную. В то же время известно, что далеко не всегда непрерывность функции обеспечивает ее гладкость.

Интуиция нас "обманывает" ровно в силу того, что в математике мы имеем дело не с реальными объектами, а с идеальными. Мы не можем представить себе кривую, не имеющую толщины. В лучшем случае мы представляем не канат, а очень тонкую линию, но тем не менее предельного перехода чувственная интуиция совершить не может. Это необходимо остается на долю логиков.

Таким образом, необходима логическая строгость, а она

невозможна в рассуждениях, если ее нет в определениях. Таким образом, усилия логиков были направлены на сами начальные определения. Так, интуитивное понятие непрерывности сложилось в сложную систему неравенств. Понятие вещественного числа строго было определено только в 19 веке Дедекиндом, причем пришлось столкнуться с такими сложностями, что подобное определение изучают только ПРИ ПОЛУЧЕНИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, и то только технические специальности. Очевидное интуитивное понятие натурального числа тоже формализовано только в 19 веке, и тоже с большими трудностями.

Естественно возникает вопрос: а закончилась ли эта эволюция строгости? Ведь не из лени и не из-за отсутствия внимательности предыдущие поколения математиков не добивались требуемой нынешним временем строгости.

Кстати, физики до сих пор оперируют в своих рассуждениях уровнем строгости такого сорта, что вызывают ужас у математиков. Результаты

экспериментов экстраполируются некоторой формулой, и если результаты последующих экспериментов хорошо ложатся в эту формулу, то она признается верной. Кроме того, их не интересуют такие тонкие случаи, как поведение решений на границах и других множествах меры нуль, так как вероятность попадания туда равна нулю. В то же время математик не сочтет задачу решенной, пока не исследует поведение решения во всех точках, и, как правило, его интересуют именно тонкие случаи.

Древние считали свой уровень строгости достаточным. Не потребуют

ли наши потомки еще большего господства логики? Конечно, одной логикой обойтись нельзя, так как она сводит все к чистой тавтологии. Необходима интуиция. А что же вообще может пониматься под словом интуиция? Рассмотрим следующие утверждения:

1) Две величины, равные третьей, равны между собой;

2) Пусть теорема равна для n=1, и верно, что если она верна для n, то верна и для n+1. Тогда теорема верна для всех целых чисел;

3) Если точка С лежит на прямой между А и В, а точка D лежит между А и С, то точка D лежит между А и В;

4) Через две точки можно провести только одну прямую.

Все четыре высказывания являются аксиомами и должны быть приписаны интуиции. Тем не менее первое есть выражение формального логического закона (если заранее определено понятие равенства), второе есть выражение метода, называемого математической индукцией, третье есть апелляция к геометрической или пространственной интуиции и к интуитивно понимаемому отношению "между", а четвертое утверждение есть фактически скрытое определение прямой. Иначе говоря, интуиция не есть обязательно свидетельство чувств человека. Есть несколько видов интуиции --- обращение к чувствам или воображению, интуиция обобщения, и, наконец, интуиция чистого числа, породившая арифметику и в дальнейшем всю математику. Первые две не могут дать достоверности, но третья является основой математики, иначе говоря, сомневаться в ней означает сомневаться в арифметике. Сейчас в математике окончательно изгнана из доказательств интуиция первого рода, строго формализована интуиция второго рода. Остальное составляют силлогизмы и интуиция чистого числа. На современном уровне развития философии можно сказать, что в математике достигнута абсолютная строгость.

 egincenter

 f

Интуиция ученого

 ndcenter

Если мы говорим, что логика дает только чистую тавтологию, то в чем же заключается процесс творчества ученого? Этот вопрос особенно интересен для

математического творчества, потому что в этом акте человеческий ум заимствует из внешнего мира меньше всего, и орудием, и объектом воздействия является он сам. Поэтому, изучая процесс математического творчества, можно надеяться проникнуть в саму сущность человеческого ума.

На самом деле удивителен тот факт, что некоторые люди совершенно не понимают математических рассуждений. При этом они могут быть талантливы, умны, но не понимать математику. На самом деле, ведь если математика есть цепь силлогизмов, построенных по общим нормальным законам логики, которые понятны каждому нормальному человеку, и основанных на некоторых принципах, называемых аксиомами, которые общи для всех и никто не собирается их отрицать, то почему большое количество людей не понимает эти построения? Понятно, что не каждый способен на творчество, понятно также, что не каждый может запомнить однажды услышанное доказательство. Но каким образом такое количество людей не могут понять доказательство в тот момент, когда его излагают? Это подтверждает даже тот факт, что математика, преподаваемая в школе и не имеющая самого элементарного уровня строгости, считается одним из наиболее трудных предметов и усваивается далеко не всеми. Кроме того, как могут возникать ошибки в математических доказательствах? Ведь это просто цепь предложений, построенных по очень простым правилам. Но, тем не менее, ошибки допускали даже великие умы, причем бывало, что ошибки в их доказательствах были найдены через столетия после опубликования работ (яркий пример тому - метод множителей Лагранжа).

Ответ на этот вопрос можно дать следующий. Если доказательство являет собой длинную цепь силлогизмов, заключение каждого из которых является посылкой следующего, то вряд ли хоть кто-то совершит ошибку или не поймет такое доказательство. Но настоящее математическое доказательство не есть прямая цепочка. Иногда некоторый вывод, полученный в заключении некоторого элементарного силлогизма, используется в качестве посылки спустя длительное время, при этом параллельно развертывается несколько логических цепей. Когда мы возвращаемся к нашему предложению, мы можем забыть или исказить его смысл. Кроме того, одно и то же рассуждение, применяемое несколько раз, кажется настолько очевидным, что через некоторое время можно начать применять его без достаточного обоснования, и при этом допустить ошибку. Таким образом получается, что способности к математике определяются хорошей памятью и аккуратностью. Но тогда все математики были бы людьми собранными, ни в коем случае не рассеянными, имеющими большие способности к вычислениям, например. Но это не так, и много есть примеров гениальных математиков, которые были страшно рассеянными или не могли без ошибок провести простейшие операции. Почему же плохая память не мешала им при проведении математических рассуждений?

На самом деле математическое доказательство не есть нагромождение неких

аксиом и силлогизмов, пусть даже и связанных друг с другом (кстати, те

люди, которые не понимают доказательств, отзываются о них как о куче

или нагромождении непонятных фактов). Все выводы в доказательстве

расположены в известном порядке, причем порядок здесь более важен, чем сами элементы. Именно об это и говорят те математики, которые сначала обозревают общий ход решения, не задерживаясь на деталях, затем формулируют теорему и строго ее доказывают, отдавая дань необходимости соблюдения всех логических законов. Если же человек обладает интуицией такого порядка расположения фактов и силлогизмов, то, по всей видимости, это и называется математическим дарованием. Память здесь играет не такую важную роль, так как в случае интуиции такого рода все силлогизмы без больших усилий занимают отведенные им места. И в силу этого отпадает необходимость зубрить доказательство, так как достаточно понять его один раз, и при желании или необходимости его можно воспроизводить самостоятельно. Понятно, что все люди не могут обладать одновременно и хорошей памятью, и математической интуицией, и достаточным вниманием для концентрирования именно на этой области. Таким образом, математическое дарование не может быть всеобщим.

Математическое творчество состоит не только в

конструировании некоторых объектов, оно состоит также в том, чтобы выбрать из множества возможных объектов и комбинаций полезные и плодотворные. Очевидно, что машину, генерирующие некоторые истины по строгим логическим законам, можно сравнить с той знаменитой обезьяной с пишущей машинкой, которая бьет по клавишам в случайном порядке. Конечно, она может случайно напечатать роман Толстого "Война и мир" или какое-то другое литературное произведение, но произойдет это с нулевой вероятностью. Чтобы появилось подобное литературное произведение, мало проверять все комбинации, как ученый из "Путешествия Гулливера", а необходим еще акт творчества. Именно так обстоит дело и с математическим творчеством.

Но творить, изобретать не значит уметь выбирать из большого множества вариантов. На самом деле практически все бесплодные варианты даже не представляются уму изобретателя, а перед ним возникают только полезные комбинации или комбинации, которые впоследствии будут отброшены с помощью логического анализа, но они не лишены черт полезных. Именно это и можно назвать математической интуицией.

Феномен интуиции чрезвычайно широк и не всегда то, что считают интуитивным, действительно заслуживает такого названия. Нередко можно встретить умозаключения, посылки которых не формулируются в явном виде, и результаты кажутся неожиданными, но они вовсе не интуитивны, как можно предположить. Для того, чтобы таких случаев было как можно меньше, в математике добиваются возможно большей, на современном этапе абсолютной строгости. При этом посылки силлогизмов должны быть выписаны явным образом. Слово интуиция применяется также к сенсорно-чувственной интуиции, но математическая интуиция по своей сути есть интуиция интеллектуальная.

И еще одна чрезвычайно важная черта свойственна интуиции --- ее непосредственность. Непосредственным знанием (в отличие от опосредованного) принято называть такое, которое не опирается на логическое доказательство. Интуиция является непосредственным знанием только в том отношении, что в момент выдвижения нового положения оно не следует с логической необходимостью из существующего чувственного опыта и теоретических построений. ootnote Копнин П.В. "Гносеологические и теоретические основы науки". С.190 Иначе говоря, интуиция --- это способность постижения истины путем прямого ее усмотрения без обоснования с помощью доказательства. ootnote "Философский энциклопедический словарь", М.,1989. С.221 Приведем примеры. Свои ощущения и размышления излагает Анри Пуанкаре в книге "Наука и метод".

"В течении двух недель я старался доказать, что невозможна никакая

функция, которая была бы подобна тем, которым я впоследствии дал

название фуксовых функций; в то время я был еще весьма далек от того,

что мне было нужно. Каждый день я усаживался за свой рабочий стол,

проводил за ним один-два часа, перебирал большое число комбинаций и не приходил ни к какому результату. Однажды вечером я выпил, вопреки своему обыкновению, чашку черного кофе; я не смог заснуть; идеи возникали во множестве; мне казалось, что я чувствую, как они сталкиваются между собой, пока, наконец, две из них, как бы сцепившись друг с другом, не образовали устойчивого соединения. Наутро я установил существование класса функций Фукса, а именно тех, которые получаются из гипергеометрического ряда; мне оставалось лишь сформулировать результаты, что отняло у меня лишь несколько часов."

Далее он подробно описывает свои дальнейшие размышления над развитием теории фуксовых функций, и каждый новый шаг характеризуется тем толчком, или озарением, а затем кропотливой работой по записи и логическому оформлению результатов.

Бертран Рассел отмечал, что иногда его попытки протолкнуть силой воли ход творческой работы оказывались бесплодными, и он убеждался в необходимости терпеливо ожидать подсознательного вызревания идей, что было результатом напряженных размышлений. "Когда я работаю над книгой, --- писал он, --- я вижу ее во сне почти каждую ночь. Не знаю, возникают ли при этом новые идеи или оживляются старые, зачастую я вижу целые страницы и могу во сне прочесть их." ootnote Цит. по "Интуиция и научное творчество". Аналитический сборник ИНИОН. М.,1981. С.17 Примеров тому можно привести много, и, конечно же, не только из области математики. Здесь вспоминается и Эйнштейн, и химик Кекуле, которому приснилась формула бензола, и Менделеев, которому приснилась его таблица.

Но все изложенное выше демонстрирует по крайней мере еще две черты, свойственные интуиции: внезапность и неосознанность. Решение проблемы в этих примерах приходило всегда неожиданно, случайно, и казалось бы , в неподходящих для творчества условиях, так или иначе непохожих на условия целенаправленного научного поиска.

Интуитивное видение совершается не только случайно, но и без явной осознанности путей и средств, приводящих к данному результату. Причем иногда неосознанным остается и результат, а самой интуиции при таком исходе ее действия уготована лишь участь возможности, не становящейся действительностью. Человек может вообще не сохранить никаких воспоминаний о моменте озарения. Одно замечательное наблюдение было сделано американским математиком Леонардом Юджином Диксоном. Его мать и ее сестра, которые в школе были соперницами по геометрии, провели долгий и бесплодный вечер над решением какой-то задачи. Ночью матери приснилась эта задача, и она стала решать ее вслух громким и ясным голосом. Ее сестра, услышав это, встала и записала. На следующее утро в ее руках было правильное решение, неизвестное матери Диксона ootnote Налчаджян А.А. "Некоторые психологические и философские проблемы интуитивного познания (интуиция в процессе научного творчества)".

М.,1972.. Аналогичный пример, правда, не принадлежащий области математики, можно привести и с Владимиром Маяковским. По его словам, у него никак не складывались нужные строчки, отражающие его чувства и обстановку в Петрограде времен гражданской войны. Он промучился весь вечер и лег спать. Во сне ему приснились наконец нужные строчки, он вскочил и записал их на спичечном коробке, валявшемся на столе. С утра он очень долго не мог вспомнить, откуда они взялись.

Таким образом, интуитивной способности человека свойственны следующие особенности:

1) неожиданность решения задачи;

2) неосознанность путей и средств ее решения;

3) непосредственность постижения истины на сущностном уровне объекта.

С чем же связана такая быстрота и эффективность интуиции? Рассмотрим вопрос с психофизиологической точки зрения. Опыты показали, что три компонента речи --- понятийный, вербализационный и моторный ---

локализуются относительно самостоятельно. Оценивая эти данные в плане интуиции, А.А.Налчаджян пишет:" Если принять эту схему, то можно заключить, что вполне возможно мышление бессловесное, с отсутствием или слабым моторным сопровождением. А это не что иное, как подсознательное или же осознанное, но образное мышление. Отсюда можно также заключить, что творческое мышление, процесс подсознательной инкубации, по всей вероятности, связано с относительно самостоятельной активностью идеационной части локализованных следов памяти. Каким образом конкретно осуществляется образование следов памяти и как достигается физиологически эта относительная самостоятельность регистрации различных компонентов, имевших языковое выражение и воспринятых слухом содержаний, нам пока что неизвестно. Вполне возможно, что это осуществляется вовлечением одних и тех же нервных

клеток в различные многоклеточные узоры." ootnote Налчаджян А.А. "Некоторые психологические и философские проблемы интуитивного познания (интуиция в процессе научного творчества)".

М.,1972. C.149. Он приводит убедительные доводы в подтверждение того положения, что после прекращения сознательного анализа научной проблемы процесс ее решения продолжается в подсознательной сфере, что соответствующие электро-физиологические процессы также не прекращаются, а преобразуются, продолжают протекать, но лишь с измененными характеристиками.

Поражает внезапность этого озарения, что, по всей видимости, свидетельствует о длительной бессознательной работе. Это проявляется не только в таких ярких случаях, которые приведены выше, но и в житейской, повседневной жизни. Часто, когда раздумываешь над какой-то задачей и кажется, что ты в тупике и мысль пошла по кругу, то волей-неволей идешь отдыхать или отвлекаешься от задачи каким-то другим способом. Через некоторое время садишься за стол, проходит еще час или около того, и вдруг в голове возникает решение. Можно подумать, что сознательная работа стала эффективнее от того, что клетки мозга получили отдых, к ним вернулась сила и свежесть. Но скорее всего отдых был занят подсознательной работой, и именно ее результаты сказались на том, что возникло решение. Иначе говоря, поскольку интуитивная работа мышления происходит в подсознательной сфере, продолжается даже при "отключенности" субъекта от проблемы, то можно сделать вывод, что подобное временное отключение может оказаться полезным.

Ж. Адамар, например, советовал после первой серьезной работы над проблемой откладывать ее решение на некоторое время и заниматься другими проблемами. Ученый, по его словам, может параллельно работать над несколькими проблемами, время от времени переходя от одной к другой для активизации подсознательных механизмов мышления. Хорошим дополнением к этой рекомендации может быть совет известного венгерского ученого и популяризатора математики, человека, организовавшего систему математических олимпиад для школьников Д. Пойа из его книги " Как решать задачу": лучше не откладывать в сторону нерешенную задачу без чувства хотя бы небольшого успеха; хоть какая-нибудь маленькая деталь должна быть улажена; нужно уяснить себе какую-нибудь сторону вопроса к моменту, когда мы прекращаем работать над решением.

Кроме того, бессознательная работа возможна или по крайней мере плодотворна лишь в том случае, если ей предшествует и за нею следует период сознательной работы. Никогда эти внезапные внушения не происходят иначе, как после некоторого времени волевых усилий, казалось бы, совершенно бесплодных. Но эти усилия стимулируют, запускают машину бессознательного поиска и дают ей направление. Необходимость второго периода сознательной работы тем более очевидна. Надо пустить в действие результаты вдохновения, привести их в логически стройный порядок, провести доказательства и прежде всего проверить интуитивные догадки. К сожалению, они не всегда бывают правильными и достоверными. Случается, что интуиция обманывает человека.

Можно сделать вывод, что к общим условиям

формирования интуиции относятся следующие ootnote Алексеев П.В.,

Панин А.В. Философия: Учебник для ВУЗов--- М.:ТЕИС, 1996. C.242:

1) основательная профессиональная подготовка человека, хорошее владение материалом, глубокое знание проблемы или задачи;

2) поисковая ситуация, состояние проблемности;

3) наличие у субъекта поисковой доминанты на основе непрерывных попыток решить проблему, длительные напряженные усилия при решению проблемы;

4) наличие "подсказки".

Под "подсказкой" понимается некий факт внешнего мира, напрямую не связанный с решаемой проблемой, но наталкивающий субъекта на некие ассоциации, которые могут, в свою очередь, определить некий бессознательный выбор того или иного решения. Это может быть любой предмет. Классический пример "подсказки" --- яблоко, упавшее на голову Ньютону. На мой взгляд, хотя доказать свое утверждение я не могу,

наличие подобной "подсказки" вовсе необязательно, и оно лишь иногда подталкивает подсознание не к правильному решению, которое уже выбрано на основе каких-либо принципов, о которых пойдет речь в следующей части, а подталкивает только выход этого решения из области подсознательного в область сознательного.

Другое дело, если подсказка является существенной и исходит из той же области знаний, что и решаемая проблема. На таких подсказках построен процесс обучения математике у талантливых педагогов. Ни один из них не рассказывает детям доказательства тех или иных фактов. Они основывают все на некоторых ключевых задачах, которые дети сами решают с помощью умело выстроенных подсказок, которые не ведут к решению задачи на прямую, а подсказывают некие ассоциации с идеями решения и освобождают ум от шаблонов. К сожалению, в процессе познания никто заранее не может составить подобную систему подсказок, так как ее можно составить, только глубоко чувствуя ход и идеи доказательства. Если в процессе обучения у учеников возникает как бы наведенная, запланированная преподавателем интуиция, то в процессе математического творчества она является самопроизвольной.

 egincenter

 f

Красота доказательства как критерий его правильности

 ndcenter

В процессе бессознательной деятельности загадочно ускоряется сам ход мышления,

наблюдается возможность переработки на бессознательном уровне $10^9$ бит информации в секунду, а на сознательном --- только 100 бит. ootnote Алексеев П.В.,

Панин А.В. Философия: Учебник для ВУЗов--- М.:ТЕИС, 1996. C.242. Все это является важной предпосылкой для развертывания быстрых мыслительных процессов, для оперирования огромной по своему объему информацией в подсознательной сфере. Подсознание способно проводить за короткое время огромную работу, которая не под силу сознанию за тот же короткий срок.

Иначе говоря, подсознательное "я" играет в математическом творчестве роль первостепенной важности. Но это подсознательное "я" считают совершенно автоматическим. Между тем мы видели, что математическая работа не есть простая механическая работа, в самом математическом умозаключении заложен акт творчества, математическую работу нельзя доверить машине. Ведь дело не в том, чтобы перебирать все комбинации, количество которых превышает все мыслимые пределы, а в том, чтобы сделать выбор между этими комбинациями, причем еще до их рассмотрения, дабы освободить себя от труда создавать все бессмысленный сочетания. Но правила, руководящие таким априорным выбором, очень тонкого, почти неуловимого свойства. Они явственно чувствуются, но плохо поддаются формулировке словами. Поэтому невозможно представить себе некий механизм, который мог бы отсеивать варианты или целые направления априорно, до их построения и проверки.

В таком случае представляется правдоподобной следующая гипотеза: "я" подсознательное нисколько не ниже, чем "я" сознательное, оно не имеет механического характера, а способно к распознаванию, обладает той самой математической интуицией, о которой говорилось выше. Причем надо заметить, что зачастую оно справляется лучше, чем "я" сознательное, ему удается то, что в сознательном состоянии оказывается недоступным. Верно ли, что подсознательное "я" является чем-то высшим, чем "я" сознательное?

По всей видимости, это все-таки не так. Так как подсознание действует эффективнее в плане объема информации, то оно может построить гораздо больше комбинаций, чем человек это делает в сознательном состоянии.Тем не менее, это число ограничено. Заметим также, что при проявлении интуиции внутреннему взору человека предстает одна, и только одна комбинация, которая зачастую оказывается правильной. Получается, что подсознание проводит выбор два раза --- когда априорно выбирает те комбинации, которые будут построены, и когда из построенных комбинаций выбирается та одна, которой и удается переступить порог сознания. Если бы первый выбор был случаен, то с очень маленькой вероятностью среди произвольных комбинаций возникала бы правильная, гармоничная. Тем более не случаен второй выбор, так как он выбирает уже среди подходящих комбинаций наилучшую, а не произвольную. Но на основе каких принципов происходит этот выбор?

По всей видимости, первый выбор обусловлен как раз той предварительной сознательной работы, и именно в этом заключается ее роль. Математик начинает перебирать не произвольные возможные варианты и пути решения, а совершает перебор именно в том направлении, где он ждет найти правильное решение. Выбор этого направления обусловлен опытом предыдущих решений. Если в этом направлении не находится необходимое решение, то мысль расширяет область поиска, уходит в сторону, но тем не менее имеется некоторый стержень, который позволяет априори отбрасывать бесплодные комбинации. Таким образом, начальный период сознательной работы создает то направление, в котором начинает работу подсознание. В силу своей большей производительности оно имеет возможность охватить те области, которые сознание не успевает охватить в силу нехватки времени, усталости или других факторов.

Но по какому принципу осуществляется выбор одной-единственной

комбинации среди многих построенных? Каков критерий прорыва этой версии в сознание или эта версия выбирается случайным образом?

Очевидно, нет, так как если бы дело обстояло именно так, то, учитывая примерный объем проверенных комбинаций (а его легко вычислить на основе цифр, характеризующих производительность подсознания), и считая, что версии выбираются с одинаковой вероятностью, мы получим, что интуиция должна обманывать нас с вероятностью, близкой к единице. Тем не менее, все совсем не так, и чем талантливее ученый, тем больше можно доверять его интуиции, тем реже она обманывает.

Второй этап выбора, по всей видимости, подчиняется общему закону человеческого восприятия. Среди всех раздражителей наших чувств наше внимание остановится только на самых интенсивных воздействиях, причем чем сильнее раздражитель, тем большую часть внимания он забирает. Недаром при сильном горе человек забывает обо всем, даже о еде. Здесь действует аналогичный механизм, только сигнал воспринимают не органы слуха, зрения, обоняния и т.д., а нечто другое, что можно назвать математической интуицией. Именно это может объяснить и тот факт, что ученые часто бывают рассеянными, но в то же время в своей области проявляют незаурядную память. Дело в том, что для на их интуицию интеллектуальный раздражитель действует с такой огромной силой, что забирает большую часть внимания, а внешние раздражители оказываются второстепенными, более слабыми.

Каждый математик не раз сталкивался с ситуацией, когда доказательство некого факта вызывает чувство глубокого эстетического наслаждения, сродни наслаждению от искусства. При этом другой человек, понимая и видя то же самое доказательство, не может понять, как оно может вообще вызывать какие-то эмоции. Иначе говоря, он не может отличить то, что математики называют красивым доказательством, от того, что математики называют техническим доказательством, или доказательством "в лоб", "муторным" или "тупым" доказательством, доказательством, "где надо только работать руками". Кроме этих, существует еще множество эпитетов. То есть математик способен получать чувство эстетического наслаждения от самих рассуждений. Понятно, что эта способность, как и способность, например, к музыке и к наслаждению музыкой, не может относится ко всем. Но если музыке радуются те, кто имеет слух (имеются в виду, конечно, музыкальные способности, а не просто отсутствие глухоты), то в математике дело обстоит точно так же, и математикой имеют счастье наслаждаться те, кто в какой-нибудь мере наделен математической интуицией.

Что же именно кажется прекрасным и изящным в математических предметах и доказательствах? Это те конструкции, элементы которых расположены настолько гармонично, что ум без труда может охватить всю картину и не упустить деталей, причем эта гармония сложена из далеких, казалось бы, друг от друга элементов. Иначе говоря, изящным рассуждением в математике будет считаться то, которое позволяет за сложностью задачи увидеть гармонию различных ее частей. Эта картина не только удовлетворяет эстетические потребности, но и позволяет легко ее запомнить, так как она как бы сама руководит умом. И в то же время, давая чувство правильно расположенного целого, она дает предчувствие математического закона. А единственными заслуживающими внимания математическими фактами служат как раз те, которые могут привести к открытию нового закона. Иногда новый закон получался вследствие того, что был замечен некоторый КРАСИВЫЙ факт, а затем математики пытались выяснить, что же скрывается за этим фактом или наблюдением, и примеров тому в математике множество. Таким образом, наиболее полезными оказываются как раз те комбинации, которые кажутся изящными с математической точки зрения.

Теперь представим себе, что подсознание перебирает множество комбинаций, и чем комбинация изящней и чем более развито математическое чувство эстетики, тем большее влияние окажет комбинация на внимание человека. Некоторые из вариантов оказываются столь гармоничными и прекрасными, что очень сильно воздействовуют на эту специальную восприимчивость математика, и это позволит им перешагнуть порог сознания.

Это подтверждается так же и

тем фактом, что те интуитивные гипотезы, которые не выдерживают логической проверки, тем не менее в полной мере обладают гармонией. В этом случае часто говорят:"Жаль, что это неверно." Эта фраза означает не то, что математику жалко потраченного на проверку неправильной гипотезы времени, а именно то, что если бы это интуитивное утверждение было бы верным, то оно удовлетворяло бы эстетическому чувству этого человека. Отсюда можно получить, что это тонкое чувство математической эстетики и является содержанием математической интуиции, и человек, лишенный этого чувства, не имеет возможности стать творцом в области математики.

 egincenter

 f

Роль логики при проверке интуитивных гипотез

 ndcenter

После периода бессознательной работы мозга обязательно должен следовать период сознательного труда. Чем же это вызвано? Исследователи отмечают, что интуитивная способность образовалась, по-видимому, в результате длительного развития живых организмов вследствие необходимости принимать решения при неполной информации о событиях, и способность интуитивно познавать можно расценивать как вероятностный ответ на вероятностные условия среды. ootnoteАлексеев П.В., Панин А.В. Философия: Учебник для ВУЗов.

С. 246 Так как ученому для совершения открытия даны не все посылки и средства, то он осуществляет именно вероятностный выбор на основе интуиции. Получается, что интуиция носит вероятностный характер, и для человека это означает, что на основе интуиции есть возможность получить как истинное знание, так и ошибочное.

"Интуиции бывает достаточно для усмотрения истины, но ее недостаточно, чтобы убедить в этой истине других и самого себя. Для этого необходимо доказательство." ootnote Философский энциклопедический словарь.

М.,1989. С.222 А само доказательство должно быть проведено на строгом логическом уровне, и без этого доказательства никто не сможет оценить правильность интуитивной гипотезы. Надо заметить, что вдохновение и интуицию сопровождает чувство абсолютной достоверности, и тем труднее заставить себя провести строгое доказательство. Это кажется скучным и ненужным, и только воспоминание об обманах интуиции заставляют проделывать эту работу. Хотя, возможно, я говорю с точки зрения геометрического мышления, потому что на этом этапе наступает та часть, в которой именно аналитики-логики чувствуют себя как рыба в воде и могут довольно продолжительное время тратить на обоснование всех мелочей.

Другое замечание. Никогда не бывает так, чтобы бессознательная работа доставила вполне готовым результат сколько-нибудь продолжительного вычисления, состоящего только в многократном применении простых правил. Казалось бы, если наше подсознание работает механически, то уж к такой работе, которую выполнит любая машина, оно должно быть способно. Но сколько ни думай с вечера о каком-либо интеграле, к утру не получишь его первообразную. Или еще более механическая работа состоит в проверке того, что производная данной первообразной является интегральной функцией. Здесь та же ситуация, сколько ни размышляй об этом, достоверного ответа с помощью интуиции не получишь, а если первообразная хоть сколько-нибудь сложна, то не получишь вообще никакого ответа. Все придется проверять либо вручную, либо с помощью специальных программ.

Иначе говоря, от интуитивных внушений приходится ждать не ответа, а только исходной точки для подобных вычислений, а сами вычисления приходится проводить во время второго периода сознательной деятельности. Именно в этот период проверятся интуитивные идеи и делаются из них выводы. Этот процесс происходит на основе современной логики, поэтому он достаточно сложен и требует дисциплины, повышенного внимания, участия воли, а следовательно, может происходить только при участии сознания. Если перерыв в работе требовался для того, чтобы освободить внимание и позволить подсознанию отвлечь на себя ресурсы мозга, создать некоторую свободу для составления различных комбинаций, то теперь вся работа должна направлена на обоснование одной-единственной комбинации, и все сосредоточено именно на одной точке, а это уже может произойти только при включенном сознании. В этом периоде математического творчества опять должна превалировать работа аналитическо-логического мышления, и это даже более важно, чем в первом периоде, где абсолютная строгость не обязательна, и, даже более того, не может быть достигнута.

 egincenter

 f

Заключение

 ndcenter

Говоря о двух различных типах математического мышления, можно заметить, что первый геометрический тип можно назвать также интуитивным типом.

Эти математики обладают чувственной интуицией, которая позволяет им наглядно представлять те объекты, которые получены путем комбинирования других абстрактных объектов. Эта чувственная интуиция в сочетании с математической интуицией, дает возможность "видеть" математическое пространство, оттого этот тип изначально более тяготел к геометрии. Кроме того, этот тип мышления более полезен при выдвижении гипотез, каких-то общих положений, потому что при таком способе мышления легче подняться над частностями и обозреть общее. Иначе говоря, геометрическому типу мышления более свойственна индукция. К сожалению, "большое видится на расстоянии", но при этом ускользают детали. Иначе говоря, математики этого типа получают наибольшее эстетическоле наслаждение от наглядного доказательства, допускающего какие-то другие интерпретации в других, неожиданных областях, то есть от гармонии "содержания". Их более интересует сама идея, чем ее реализация.

Второму аналитическому типу более свойственна интуиция числа, формы, что при работе выражается в чувстве удовлетворенности от стройности и системности изложения решения. Этому типу мышления более свойственна дедукция. Иначе говоря, чувство эстетического наслаждения они получают от завершенности и полной доказанности утверждений, от гармонии "связи", то есть следования всем логическим законам и неизбыточности содержания. При этом все не упускаются из виду все мелкие детали, но общая идея может быть упущена, если при ее доказательстве логик задержится на первом или втором шаге, и в дальнейшем сочтет невыполнимой всю идею. На самом деле, этот тип мышления более полезен при проверке и строгом оформлении гипотез и идей, выдвинутых заранее. Он делает то, в чем затрудняется человек геометрического стиля мышления. Он способен длительно концентрировать внимание на кропотливой работе, в то время как человек, руководимый интуицией, предпочитает работать на подсознательном уровне, и в силу этого не любит концентрировать внимание на монотонных деталях.

Надо заметить, что оба стиля одинаково необходимы в математике и присутствовали, по всей видимости, всегда. Победа какого-то стиля оказывалась временной и даже вредной. Математика может развиваться только при условии единства интуитивного и логического, и в каждом математике присутствуют в той или иной мере оба направления. Но именно преобладание одного из направлений эстетичекого чувства делает мышление ученого принадлежащим к какому-то типу. При этом невозможно представить математика, имеющего чисто геометрический или аналитический стиль мышления. Ведь даже интуиция может быть основана только на логике, и без первого этапа сознательной ЛОГИЧЕСКОЙ деятельности не состоится акт интиуции, в то же время чистый логик не смог бы ничего творить в силу отсутствия в его выкладках творческой силы, без которой они сводятся к тавтологии. Единство логического и интуитивного --- единственный путь развития математики и любой другой науки.

 ewpage

 egincenter

 f

Список литературы

 ndcenter

1. Алексеев П. В., Панин А.В. Философия: Учебник для ВУЗов--- М.:ТЕИС,

1996.

2. Налчаджян А.А. Некоторые психологические и философские проблемы интуитивного познания (интуиция в процессе научного творчества).--- М. : Мысль, 1972 (глава 2: Проблема интуитивного "озарения" в научном творчестве, с.60--86)

3. Философия / Под ред. проф. В.Н. Лавриненко.--- М. : "Юристъ", 1996.

4. Философский словарь / Под ред. И.Т. Фролова. --- 6-е изд., перераб. и доп.--- М. : Политиздат, 1991.

5. Философский энциклопедический словарь / Гл. ред. Л.Ф. Ильичев и др. --- М. : Советская энциклопедия, 1983.

6. Анри Пуанкаре. О науке: Пер с франц.--- М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

7. Д. Пойа. Как решать задачу.--- М. : Учпедгиз, 1961.

8. Копнин П.В. Гипотеза и ее роль в познании. --- М. : Знание, 1958.

9. Интуиция и научное творчество. Аналитический сборник ИНИОН.---

М., 1981.

10. Философия и методология науки: Учеб. пособие / Под ред. В.И.

Купцова.--- М.: Аспект Пресс, 1996.

 nddocument