**Тема: Спектральный анализ и его приложения к обработке сигналов в реальном времени .**

**Оглавление**

**Введение**

**Постановка проблем, формулировка задач**

**Глава 1. Теоретический анализ существующих алгоритмов спектрального анализа.**

**1.1.** Введение в спектральное оценивание

**• 1.1.1.** Задача спектрального оценивания

**• 1.1.2.** Проблемы в области спектрального оценивания.

**• 1.1.3.** Спектральные оценки по конечным последовательностям данных

**• 1.1.4.** Общая картина

**1.2.** Основные определения и теоремы классического спектрального анализа

**• 1.2.2** Операции дискретизации и взвешивания для получения дискретно- временных рядов Фурье.

**• 1.2.3.** Анализ эргодичных дискретных процессов.

**1.3.** Классические методы спектрального анализа.

**• 1.3.1.** Введение.

**• 1.3.2.** Окна данных и корреляционные окна в спектральном анализе.

**• 1.3.3.** Периодограммные оценки спектральной плотности мощности.

**• 1.3.4.** Коррелограммные оценки спектра.

**• 1.3.5.** Область применения.

1. Авторегрессионное спектральное оценивание.

**• 1.4.1.** Введение.

**• 1.4.2.** Оценивание корреляционной функции - метод Юла-Уалкера.

**• 1.4.3.** Методы оценивания коэффициентов отражения.

**• 1.4.3.1.** Геометрический алгоритм.

**• 1.4.3.2.** Гармонический алгоритм Берга.

**• 1.4.4.** Оценивание линейного предсказания по методу наименьших квадратов.

**• 1.4.5.** Градиентный адаптивный авторегрессионный метод

**• 1.4.6.** Рекурсивный авторегрессионный метод наименьших квадратов

**1.5.** Спектральное оценивание на основе моделей авторегрессии - скользящего среднего .

**1.6.** Спектральное оценивание по методу минимума дисперсии.

1. Методы оценивания частоты, основанные на анализе собственных значений.

**• 1.7.1.** Введение.

**• 1.7.2.** Процедуры оценки частоты в пространстве сигнала.

**• 1.7.3.** Оценки частоты в пространстве шума.

**Глава 2. Экспериментальный анализ алгоритмов спектрального анализа.**

**Особенности реализации.**

**Заключение.**

**Выводы.**

**Приложениe А.** Смещение периодограммы Уэлча.

**Приложениe В.** Методы и интерфейсы межзадачного системного и межсистемного обмена в среде *Windows ’95 (Delphi 3.0)*

**Приложениe С.** Достоверность полученных оценок спектральной плотности мощности.

**Приложениe D.** Таблица экспериментальных результатов по разрешающей способности методов спектрального анализа.

**Приложениe E.** Таблица и графики «С*лабые синусоидальные составляющие»*

**Приложениe F.** Дисперсии оценок СПМ как функции частоты.

**Приложениe G.** Таблица наилучших в смысле структурной устойчивости параметров адаптивного градиентного метода.

**Приложениe Н.** Графики оценок СПМ при различных значениях порядка авторегрессионной модели.

**Приложениe I.** Список используемой литературы.

**Введение**

Спектральный анализ - это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. Преобразование Фурье является математической основой, которая связывает временной или пространственный сигнал (или же некоторую модель этого сигнала) с его представлением в частотной области. Методы статистики играют важную роль в спектральном анализе, поскольку сигналы, как правило, имеют шумовой или случайный характер. Если бы основные статистические характеристики сигнала были известны точно или же их можно было бы без ошибки определить на конечном интервале этого сигнала, то спектральный анализ представлял бы собой отрасль точной науки. Однако в действительности по одному-единственному отрезку сигнала можно получить только некоторую оценку его спектра.[1]

К обработке сигналов в реальном масштабе времени относятся задачи анализа аудио, речевых, мультимедийных сигналов, в которых помимо трудностей, связанных непосредственно с анализом спектрального содержания и дальнейшей классификацией последовательности отсчетов (как в задаче распознавания речи) или изменения формы спектра - фильтрации в частотной области (в основном относится к мультимедийным сигналам), возникает проблема управления потоком данных в современных вычислительных системах. Реальность накладывает отпечаток как на сами вычислительные алгоритмы, так и на результаты экспериментов, поднимая вопросы, с которыми не сталкиваются при обработке всей доступной информации.

При обработке сигналов обычно приходится решать задачи двух типов - задачу обнаружения и задачу оценивания. При обнаружении нужно дать ответ на вопрос, присутствует ли в данное время на входе некоторый сигнал с априорно известными параметрами. Оценивание - это задача измерения значений параметров, описывающих сигнал [1].

Сигнал часто зашумлен, на него могут накладываться мешающие сигналы. Поэтому для упрощения указанных задач сигнал обычно разлагают по базисным составляющим пространства сигналов. Для многих приложений наибольший интерес представляют периодические сигналы. Вполне естественно, что используются *Sin* и *Cos*. Такое разложение можно выполнить с помощью классического преобразования Фурье.

При обработке сигналов конечной длительности возникают интересные и взаимозависимые вопросы, которые необходимо учитывать в ходе гармонического анализа. Конечность интервала наблюдения влияет на обнаружимость тонов в присутствии сильных шумов, на разрешимость тонов меняющейся частоты и на точность оценок параметров всех вышеупомянутых сигналов.

**Постановка проблемы, формулировка задачи**

На настоящее время существует большое количество алгоритмов и групп алгоритмов, которые так или иначе решают основную задачу спектрального анализа: оценивание спектральной плотности мощности, с тем чтобы по полученному результату судить о характере обрабатываемого сигнала .Основной вклад сделан такими исследователями как: Голд Б. (Gold B.), Рабинер Л. (Rabiner L.R.), Бартлетт M. (Bartlett M.S.) Однако каждый из алгоритмов имеет свою область приложения. Например, градиентные адаптивные авторегрессионные методы не могут быть применены к обработке данных с быстро меняющимся во времени спектром. Классические методы имеют широкую область применения, но проигрывают авторегрессионным и методах, основанных на собственных значениях, по качеству оценивания. Но в реальном масштабе времени использование последних затруднено из-за вычислительной сложности.

Более того, применение каждого из методов обычно требует выбора значений параметров (выбор окна данных и корреляционного окна в классических методах, порядка модели в авторегрессионном алгоритме и алгоритме линейного предсказания, предполагаемого числа собственных векторов в пространстве шума в методе Писаренко) и правильный выбор требует экспериментальных результатов с каждым классом алгоритмов.

Таким образом, имеется следующая задача :

*На основе существующих алгоритмов проанализировать возможность их применения как к последовательной обработке сигналов в реальном времени, так и к блочной обработке и оценить качество получаемых результатов .* Критериями «качества» оценки спектральной плотности мощности в общем случае являются смещение этой оценки и ее дисперсия. Однако аналитическое определение этих величин наталкивается на определенные математические трудности и в каждом конкретном случае на практике просто визуально совмещают графики нескольких реализаций спектральной оценки и визуально определяют смещение и дисперсии к функции частоты. Те области совмещенных графиков спектральных оценок, где экспериментально определенное значение дисперсии велико, будет свидетельствовать о том, что спектральные особенности видимые в спектре одной реализации не могут считаться статистически значимыми. С другой стороны, особенности совмещенных спектров в тех областях, где эта дисперсия мала, с большой достоверностью могут быть соотнесены с действительными составляющими анализируемого сигнала.

Из вышесказанного сформулируем следующие подзадачи:

*I. теоретическое и практическое исследование алгоритмов блочной обработки*

*II*. *анализ классических алгоритмов блочной обработки* всей последовательности в части применения окон данных и корреляционных окон

1. *анализ алгоритмов обработки сигналов в реальном масштабе времени*

Кроме этих теоретических проблем, существует ряд практических вопросов, специфичных для обработки сигналов в реальном времени. Среди них выбелим :

• Необходимость в «одновременном» выполнении следующих основных этапов обработки данных:

1. Непосредственное получение последовательности входных данных (цифровые отсчеты аудио-сигнала, речевого сигнала).
2. Обработка получаемых отсчетов сигнала.
3. Представление обработанной информации
4. Возможность контролировать процесс обработки информации

• Ограничение длительности интервала выборки поступающих данных вычислительными ресурсами

• Ограничение длительности интервала выборки характером сигнала

Если первый вопрос очевиден в рамках обработки данных в реальном времени, то второй и третий вопросы требуют осмысления причин этих ограничений.

К сформулированным выше задачам добавим :

1. *задачу построения схемы управления обработкой данных* в реальном времени, основанной, в силу первой проблемы, на параллельных вычислениях и протоколах взаимодействия и синхронизации;
2. *экспериментальный анализ по второй проблеме*, то есть исследование влияния вычислительных ресурсов и методов оцифровки данных на максимально допустимую длину интервала выборки;
3. *анализ длительности интервала выборки, исходя из характера сигнала.*

В качестве основного подхода к решению проблем и исследования применим методологию математического моделирования и вычислительного эксперимента. Экспериментальные входные данные будем формировать следующим образом

• для *задачи анализа алгоритмов блочной обработки* всей последовательности отсчетов формируем дискретизированные отсчеты данных тест-сигнала из суммы комплексных синусоид и аддитивных окрашенных шумовых процессов, сформированные посредством пропускания белого шума через фильтр с частотной характеристикой типа приподнятого косинуса или окна Хэмминга. Таким образом, в этом случае эксперимент определяется набором , где - последовательность комплексных синусоид с амплитудами  *дБ* и частотами *Гц*, а - последовательность шумовых процессов с параметрами : центральная частота *Гц.*, динамический диапазон перекрываемых частот  *Гц.*, мощность шума *дБ*.



• для *анализа классических алгоритмов блочной обработки* всей последовательности в части применения окон данных и корреляционных окон эксперимент и подсчет основных характеристик окон будем производить над дискретизированными отсчетами соответствующих функций.

• для *анализа алгоритмов обработки сигналов в реальном масштабе времени* используем аудио и речевой сигналы.

Выходными данными экспериментов будем считать :

• для задачи анализа алгоритмов блочной обработки всей последовательности отсчетов :

*1.)* оценку спектральной плотности мощности, полученную с помощью того или иного метода спектрального анализа, по которой можно судить о качестве применяемого метода, сравнивая истинную спектральную плотность мощности сформированного сигнала с полученной оценкой

*2.)* вычислительные и временные затраты метода

• для анализа окон данных и корреляционных окон - расчетные основные характеристики такие как : *максимальный уровень боковых лепестков, эквивалентная ширина полосы, ширина полосы по уровню половинной мощности, степень корреляции и т.д..*

• для анализа сигналов в реальном масштабе времени : спектральная плотность мощности (функция, зависящая в этом эксперименте также и от времени). Для оценки составляющих в спектре сигнала в данный момент времени.

**Глава 1. Теоретический анализ существующих алгоритмов спектрального анализа.**

1. **Введение в спектральное оценивание**

**1.1.1. Задача спектрального оценивания**

Задача спектрального оценивания подразумевает оценивание некоторой функции частоты. О характеристиках спектральной оценки судят по тому, насколько хорошо она согласуется с известным спектром тест-сигнала в некоторой непрерывной области частот.[1]

**1.1.2. Проблемы в области спектрального оценивания.**

Интерес к альтернативным методам спектрального анализа поддерживается тем улучшением характеристик, которое они обещают, а именно более высоким частотным разрешением, повышенной способностью к обнаружению слабых сигналов или же сохранением «достоверности» формы спектра при меньшем числе используемых параметров. Аналитически описать характеристики большинства методов в случае ограниченного времени анализа (то есть в случае короткой записи данных) весьма затруднительно[1]

Спектральное разрешение относится к числу главных проблем современного спектрального оценивания, в особенности применительно к анализу коротких последовательностей данных. При этом то, что понимается под термином «разрешение», носит весьма субъективный характер. Принято характеризовать относительные величины разрешающей способности двух спектральных оценок на основе визуальных впечатлений. [1]

**1.1.3. Спектральные оценки по конечным последовательностям данных**

Спектральная оценка, получаемая по конечной записи данных, характеризует некоторое предположение относительно той истинной спектральной функции, которая была бы получена, если бы в нашем распоряжении имелась запись данных бесконечной длины. Именно поэтому поведение и характеристики спектральных оценок должны описываться с помощью статистических терминов. Общепринятыми статистическими критериями качества оценки являются ее смещение и дисперсия. Аналитическое определение этих величин обычно наталкивается на определенные математические трудности, поэтому на практике просто совмещают графики нескольких реализаций спектральной оценки и визуально определяют смещение и дисперсию как функции частоты. Те области совмещенных графиков спектральных оценок, где экспериментально определенное значение дисперсии велико, будут свидетельствовать о том, что спектральные особенности, видимые в спектре отдельной реализации, не могут считаться статистически значимыми. С другой стороны, особенности совмещенных спектров в тех областях, где эта дисперсия мала, с большой достоверностью могут быть соотнесены с действительными частотными составляющими анализируемого сигнала. Однако в случае коротких записей данных часто не удается получить несколько спектральных оценок, да и сам статистический анализ отдельных спектральных оценок, полученных по коротким записям данных, в общем, случае представляет собой весьма трудную проблему.[1]

**1.1.4.Общая картина**

Из формального определения спектра, следует, что спектр является некоторой функцией одних лишь статистик второго порядка, относительно которых в свою очередь предполагается, что они остаются неизменными, или стационарными во времени. Следовательно, такой спектр не передает полной статистической информации об анализируемом случайном процессе, а значит, дополнительная информация может содержаться в статистиках третьего и более высокого порядка. Кроме того, многие обычные сигналы, которые приходится анализировать на практике, не являются стационарными. Однако короткие сегменты данных, получаемые из более длинной записи данных, можно считать локально стационарными. Анализируя изменения спектральных оценок от одного такого сегмента к другому, можно затем составить представление и об изменяющихся во времени статистиках сигналов, то есть нестационарных.

**1.2.Основные определения и теоремы классического спектрального анализа**

**1.2.1.Непрерывно-временное преобразование Фурье.**

***Определение:*** *Непрерывно-временным преобразованием Фурье* называется функция



В спектральном анализе переменная в комплексной синусоиде соответствует частоте, измеряемой в герцах, если переменная измеряется в единицах времени (в секундах). По сути дела, непрерывно-временное преобразование Фурье идентифицирует частоты и амплитуды тех комплексных синусоид, на которые разлагается некоторое произвольное колебание.



***Определение:*** Обратное преобразование Фурье определяется выражением



Существование прямого и обратного преобразований Фурье с непрерывным временем для данной функции определяется целым рядом условий. Одно из достаточных условий состоит в том, что сигнал должен быть абсолютно интегрируемым в смысле



**1.2.2 Операции дискретизации и взвешивания для получения дискретно-временных рядов Фурье.**

***Определение:*** Функцией отсчетов с интервалом называется следующая функция :



Предположим, что берутся отсчеты непрерывного действительнозначного сигналас ограниченным спектром, верхняя частота которого равна герц, так что преобразование Фурье равно нулю при частотах больше . Отсчеты сигналас интервалом Т могут быть получены посредством умножения этого сигнала на функцию отсчетов:



Теперь найдем непрерывное преобразование Фурье , это свертка спектра сигнала и преобразования Фурье функции отсчетов по времени с интервалом Т секунд :



То есть свертка с преобразованием Фурье функции отсчетов просто периодически продолжает с частотным интервалом 1/T Гц, соответствующим частотному интервалу между импульсными функциями. В общем случае отсчеты в одной области (например, временной) приводят к периодическому продолжению в области преобразования (например, частотной). Если частота отсчетов выбрана достаточно низкой, так что , то периодически продолженные спектры будут перекрываться с соседними (эффект наложения в частотной области). Частота отсчетов получила название *частоты отсчетов Найквиста.*



Для того чтобы восстановить исходный временной сигнал по его отсчетам, то есть осуществить интерполяцию некоторого континуума значений между этими отсчетами, можно пропустить дискретизованные данные через идеальный фильтр нижних частот, обладающий прямоугольной частотной характеристикой (взвешивание в частотной области ), используя теоремы о свертке во временной и частотной областях, получим :



Полученное выражение представляет собой математическую запись теоремы отсчетов во временной области, которая утверждает, что с помощью этой интерполяционной формулы действительный сигнал с ограниченным спектром может быть точно восстановлен по бесконечному счетному числу известных временных отсчетов, взятых с частотой . Аналогичный результат может быть получен и для комплексных сигналов с ограниченным спектром.



Дуальной к теореме отсчетов во временной области является следующая   
***Теорема.*** Для ограниченного временем по длительности сигнала верно, что



*где*



Таким образом, преобразование Фурье некоторого сигнала с ограниченной длительностью может быть однозначно восстановлено по эквидистантным отсчетам спектра такого сигнала, если выбранный интервал отсчетов по частоте удовлетворяет условию герц.



Пусть дан произвольный непрерывный сигнал и его преобразование , которые в общем случае могут быть неограниченными по спектру и по длительности. Если положить, что *N* отсчетов во времени взяты с равномерным интервалом *T* секунд, то ограничим спектр этого сигнала частотами герц взвешиванием в частотной области: , здесь - функция окна в частотной области. При этом сигнал трансформируется следующим образом . Далее берутся отсчеты во временной области сформированного первой операцией и ограниченного по спектру сигнала , соответствующие изменения в спектре можно представить как . Теперь ограничимся длительностью сигнала *NT* :. И снова свертка в частотной области для спектра полученного на этапе 2 . Последнее что осталось сделать - взятие отсчетов по частоте с интервалом 1/*NT* герц, это приводит к периодическому продолжению исходных *N* временных отсчетов. Сигнал на последнем этапе принимает следующий вид : , а его преобразование : .



Окончательно можно получить, что если исходный сигнал и - его преобразование, то на четвертом шаге и связаны следующими соотношениями :



, *где*



Последние соотношения называют *дискретно-временными рядами Фурье.* Исходя из процесса построения дискретно-временных рядов Фурье, можно установить требуемое точное соотношение между рядом Фурье временной последовательности и соответствующей непрерывно-временной функцией или между рядом Фурье преобразования и исходной функции преобразования. Если ширина спектра ограничена частотой 1/T герц, то ряд Фурье временной последовательности будет сохранять исходные значения в отсчетных точках, однако ряд Фурье последовательности преобразований будет состоять из отсчетов некоторого «размытого» варианта исходного преобразования . С другой стороны, если длительность фактически ограничена интервалом *NT* секунд, то ряд Фурье последовательности преобразований сохраняет исходные значения в отсчетных точках, однако ряд Фурье временной последовательности будет состоять из некоторого «размытого» варианта исходного сигнала . Эффекты размытия можно ослабить за счет уменьшения *T* (так что *1/T* будет соответствовать более широкой полосе) или увеличения *N* (так что *NT* будет соответствовать большей длительности), в результате чего дискретно-временной рад Фурье будет точнее аппроксимировать непрерывное преобразование. Ряд будет идентичным непрерывному преобразованию только в случае периодических сигналов, которые можно представить в виде суммы из комплексных синусоид с частотами *k/NT* герц, где *k=0,1,...N-1.*



**1.2.3. Анализ эргодичных дискретных процессов.**

***Определение:*** Дискретный случайный процесс *эргодичен в среднем* если



***Определение:*** Дискретный случайный процесс *автокорреляционно эргодичен* если



Допущение об эргодичности позволяет не только ввести через усреднение по времени определения для среднего значения и автокорреляции, но позволяет дать подобное определение спектральной плотности мощности :

***Определение:***



Эта эквивалентная форма спектральной плотности мощности получается посредством статистического усреднения модуля дискретно-временного преобразования Фурье взвешенной совокупности данных, для случая когда число отсчетов данных увеличивается до бесконечности. Статистическое усреднение необходимо здесь потому, что дискретно-временное преобразование само является случайной величиной, изменяющейся для каждой используемой реализации . Это определение эквивалентно определению спектральной плотности мощности как дискретно-временное преобразование Фурье автокорреляционной последовательности.



Если в последнем определении не учитывать операцию математического ожидания, то получим оценку спектральной плотности мощности, которая называется *выборочным спектром* :



Хотя выборочный спектр не является состоятельной оценкой истинной спектральной плотности мощности, эта оценка может быть использована если выполнять некоторого рода усреднение или сглаживания. На использовании этой оценки основан классический периодограммый метод определения спектральной плотности мощности.

**1.3. Классические методы спектрального анализа.**

**1.3.1 Введение**

Оценки СПМ, основанные на прямом преобразовании данных и последующем усреднении, получили название периодограмм. Оценки СПМ, для получения которых по исходным данным сначала формируется корреляционные оценки, получили название коррелограммных методов спектрального оценивания.

При использовании любого метода оценивания СПМ пользователю приходится принимать множество компромиссных решений, с тем, чтобы по конечному количеству отсчетов данных получать статистически устойчивые спектральные оценки с максимально возможным разрешением. К этим компромиссным решениям относятся, в частности, выбор таких функций окна для взвешивания данных и корреляционных функций и таких параметров усреднения во временной и в частотной областях, которые позволяют сбалансировать требования к снижению уровня боковых лепестков, выполнению эффективного усреднения по ансамблю и к обеспечению приемлемого спектрального разрешения. Устойчивые результаты (малые спектральные флюктуации) и хорошая точность (малое смещение относительно истинных спектральных значений на всех частотах) достижимы только тогда, когда произведение *TB*, где *Т* - полный интервал записи данных, а *B* - эффективное разрешение по частоте, значительно превышает единицу. Все эти компромиссы можно количественно охарактеризовать в случае гауссовских процессов, для которых подробно теоретически изучены статистические характеристики классических спектральных оценок. Однако выбор конкретного метода спектрального оценивания в случае негауссовских процессов зачастую обосновывается только экспериментальными данными. Да и выбор функции окна очень часто основывается на данных экспериментальных, а не теоретических исследований.

**1.3.2. Окна данных и корреляционные окна в спектральном анализе.**

Окна представляют собой весовые функции, используемые для уменьшения размывания спектральных компонент, обусловленного конечностью интервалов наблюдения. Так, можно считать, что воздействие окна на массив данных (как мультипликативной весовой функции) состоит в уменьшении порядка разрыва на границе периодического продолжения. Этого добиваются, согласуя на границе возможно большее число производных взвешенных данных. Проще всего обеспечить такое согласование, сделав эти производные равными или, по крайней мере, близкими к нулю. Таким образом, вблизи границ интервала взвешенные данные плавно стремятся к нулю, так, что периодическое продолжение сигнала оказывается непрерывным вплоть до производных высших порядков.

С другой стороны, можно считать, что окно мультипликативно воздействует на базисное множество так, чтобы сигнал произвольной частоты имел значительные проекции только на те базисные векторы, частоты которых близки к частоте сигнала. Оба подхода ведут, конечно, к одинаковым результатам.

**1.3.3. Периодограммные оценки Спектральной Плотности Мощности.**

Пренебрегая операцией вычисления математического ожидания и полагая, что конечное множество данных содержит N отсчетов, получаем выборочный спектр



который может быть вычислен по конечной последовательности данных. Однако поскольку была опущена операция математического ожидания, эта оценка будет неустойчивой или несостоятельной. И для сглаживания применяется что-то вроде псевдоусреднения по ансамблю. Существует три различных типа сглаживания быстрых флюктуаций спектра.

Первый метод заключается в усреднении по соседним спектральным частотам. Если для вычисленный выборочный спектр на сетке частот , то модифицированная оценка периодограммы на частоте может быть получена посредством усреднения в P точках с каждой стороны от этой частоты



Обобщением этого подхода является обработка выборочного спектра с помощью фильтра нижних частот с частотной характеристикой . В этом случае модифицированную периодограмму можно записать в виде свертки частотной характеристики фильтра нижних частот и самого выборочного спектра



Вторым методом сглаживания выборочного спектра является усреднение по псевдоансамблю периодограмм за счет деления последовательности из N отсчетов данных на P неперекрывающихся сегментов по D отсчетов в каждом, так что DP<N (называемым периодограмма Бартлетта). Тогда p-ый сегмент будет состоять из отсчетов , где n=0,1,..,D-1,p=0,1,..P-1. Для каждого сегмента независимо вычисляется выборочный спектр в диапазоне частот



Далее на каждой частоте, представляющей интерес, P отдельных немодифицированных периодограмм усредняются, с тем чтобы получить окончательную оценку:



Математическое ожидание и дисперсия даются следующими выражениями:



Из выражения для дисперсии видно, что устойчивость спектральной оценки Бартлетта улучшается как величина, обратная числу сегментов P.

Третьим и одним из самых эффективных методов является метод периодограмм Уэлча. Основное отличие от периодограммы Бартлетта состоит в том, что здесь используется окно данных и осуществлено перекрывающееся сегментирование последовательности отсчетов. Применение окна данных дает незначительное ухудшение разрешения по частоте, так как сам спектр окна вносит погрешности в результирующий спектр, однако удается достичь уменьшения влияния боковых лепестков спектра прямоугольного окна, которое косвенно применяется при сегментировании последовательности данных. Целью перекрытия сегментов является увеличение числа усредняемых сегментов и тем самым уменьшение дисперсии оценки спектральной плотности мощности. Сам метод состоит в следующем. Пусть дана запись комплексных данных , которая разбивается на число сегментов *D* со сдвигом *S* отсчетов между соседними сегментами, тогда взвешенный p-ый сегмент будет состоять из отсчетов, где n = 0,1..*D*-1, p = 0,1..*P*-1, *P*=[(*N-D*)/*S*+1]. А выборочный спектр взвешенного p-ого сегмента в диапазоне частот



, *где*



И окончательный вид периодограммы Бартлетта приобретает вид :



Среднее и дисперсия оценки выглядят следующим образом (доказательство первого соотношения в приложении А):



При использовании перекрытия соседних сегментов можно сформировать большее число псевдореализаций, чем в методе Бартлетта, а это уменьшает величину дисперсии периодограммы Уэлча, хотя порядок имеет тот же самый. Экспериментальные результаты приведены в соответствующем разделе.

**1.3.4. Коррелограммные оценки Спектральной Плотности Мощности.**

Альтернативным методом является коррелограммный метод. Косвенный метод основан на использовании бесконечной последовательности значений данных для расчета автокорреляционной последовательности, преобразование Фурье которой дает искомую СПМ. В отличии от прямого метода, который основан на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье для бесконечной последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения. Показано, что результирующая функция, получаемая без использования такого усреднения и называемая выборочным спектром, оказывается неудовлетворительной из-за статистической несостоятельности получаемых с ее помощью оценок, поскольку среднеквадратичная ошибка таких оценок сравнима по величине со средним значением оценки.

Автокорреляционная последовательность на практике может быть оценена по конечной записи данных следующим образом (несмещенная оценка):

, *где*



или смещенной оценкой автокорреляции, которая имеет меньшую, по сравнению с несмещенной оценкой, дисперсию:

, *где*



Коррелограммный метод заключается в подстановке в определение спектральной плотности мощности оценку автокорреляционной последовательности (коррелограммы). Таким образом, имея две оценки автокорреляционной последовательности получаем две оценки спектральной плотности мощности:

, , *где*



**,** *где*  **-** *ядро* *Дирихле*



Эффект неявно присутствующего окна из-за конечности данных приводит к свертке истинной спектральной плотности с преобразованием Фурье дискретно-временного прямоугольного или треугольного (как в случае со смещенными оценками) окна. Для уменьшения этого эффекта используется корреляционное окно и коррелограммная оценка спектральной плотности мощности в общем виде выглядит следующим образом:



Экспериментальные результаты приведены в соответствующем разделе.

**1.3.5.** **Область применения.**

Классические методы спектрального анализа применимы почти ко всем классам сигналов и шумов в предположении о стационарности. Вычислительная эффективность периодограммных и коррелограммных методов основана на использовании алгоритма Быстрого Преобразования Фурье. Недостатком всех методов спектрального анализа является искажения в спектральных составляющих по боковым лепесткам из-за взвешивания данных при помощи окна. Сравнение экспериментальных результатов с другими методами и характеристики взвешивающих окон приведены в соответствующем разделе.

1. **Авторегрессионное спектральное оценивание.**

**1.4.1. Введение**

Одна из причин применения параметрических моделей случайных и процессов и построения на их основе методов получения оценок спектральной плотности мощности обусловлена увеличением точности оценок по сравнению с классическими методами. Еще одна важная причина - более высокое спектральное разрешение. Далее рассматриваются следующие методы: *метод* *Юла-Уалкера* оценивания авторегрессионных параметров по последовательности оценок автокорреляционной функции, *метод Берга* оценивания авторегрессионных параметров по последовательности оценок коэффициентов отражения, метод *раздельной* минимизации квадратичных ошибок линейного предсказания вперед и назад - *ковариационный метод*, метод *совместной* минимизации квадратичных ошибок прямого и обратного линейного предсказания - *модифицированный* *ковариационный*.

Модель временного ряда (называемая модели *авторегрессии-скользящего* *среднего в случае входной последовательности - белого шума*), которая пригодна для аппроксимации многих встречающихся на практике детерминированных и стохастических процессов с дискретным временем, описывается следующим разностным уравнением:



Системная функция , связывающая вход и выход этого фильтра имеет рациональную форму:



Если в качестве входной последовательности использовать белый шум, то приходим к АРСС-модели. Спектральную плотность для АРСС-модели получаем, подставляя , что дает



, где



, , а - дисперсия



возбуждающего белого шума

В частных случаях для *авторегрессионной* модели и модели *скользящего* *среднего* получаем соответственно :



1. **Оценивание корреляционной функции - метод Юла-Уалкера.**

Из соотношения, связывающего параметры АРСС-модели с порядком авторегрессии *p* и скользящего среднего *q*:



Поскольку полагается, что *u*[*k*] - белый шум, то

**,**



**,** m>q



**,** m<0



В частном случае для авторегрессионных параметров, получаем :

**,**



**,** *m*=*0*



**,** m<0



В матричном виде эти соотношения выглядят следующим образом :



Таким образом, если задана автокорреляционная последовательность для , то АР-параметры можно найти в результате решения последнего матричного соотношения (называемого *нормальными уравнениями* *Юла-Уалкера*), где автокорреляционная матрица является и теплицевой, и эрмитовой.



Наиболее очевидным подходом к авторегрессионному оцениванию является решение *нормальных уравнений Юла-Уалкера*, в которые вместо значений неизвестной автокорреляционной функции подставляем их оценки. Результаты экспериментов с этим, первым методом АР-оценивания и сравнение с другими методами этого класса приведены в соответствующем разделе.

**1.4.3. Методы оценивания коэффициентов отражения.**

Рекурсивное решение уравнений Юла-Уалкера методом Левинсона связывает АР-параметры порядка *p* c параметрами порядка *p-1* выражением :

, *где* *n*=1,2,..*p*-1



Коэффициент отражения определяется по известным значениям автокорреляционной функции :



, *где*



Из всех величин только непосредственно зависит от автокорреляционной функции. В разное время предлагалось несколько различных процедур оценки коэффициента отражения, рассмотрим некоторые из них.



1. **Геометрический алгоритм.**

Ошибки линейного предсказания вперед и назад определяются соответственно следующими выражениями:



Рекурсивные выражения, связывающие ошибки линейного предсказания моделей порядков *p* и *p*-*1*, определяются простой подстановкой и в рекурсивное соотношение для авторегрессионных параметров:



Несложно показать, что коэффициент отражения обладает следующим свойством (является коэффициентом частной корреляции между ошибками линейного предсказания вперед и назад) :



Используя оценки взаимной корреляции и автокорреляции ошибок предсказания вперед и назад, получим :



Таким образом, геометрический алгоритм использует алгоритм Левинсона, в котором вместо обычного коэффициента отражения, вычисляемого по известной автокорреляционной функции, используется его оценка



Окончательный вид выражений геометрического алгоритма :

, *где* *n*=1,2,..*p*-1



,



, *где*



**1.4.3.2. Гармонический алгоритм Берга.**

Алгоритм Берга идентичен геометрическому, однако оценка коэффициента отражения находится из других соображений, а именно : при каждом значений параметра *p* в нем минимизируется арифметическое среднее мощности ошибок линейного предсказания вперед и назад (то есть выборочная дисперсия ошибки предсказания):



Приравнивая производные к нулю, имеем оценку для :



Некоторым обобщением является взвешивание среднего квадрата ошибки предсказания для уменьшения частотного смещения, наблюдаемого при использовании базового метода Берга:



что приводит к следующей оценке :



1. **Оценивание линейного предсказания по методу наименьших квадратов.**

Налагая ограничения на авторегрессионные параметры, с тем чтобы они удовлетворяли рекурсивному выражению метода Левинсона, в методе Берга происходит минимизация по одного параметра - коэффициента отражения . Более общий подход состоит в минимизации одновременно по всем коэффициентам линейного предсказания.



Итак, пусть для оценивания авторегрессионных параметров порядка *p* используются последовательность данных .Оценка линейного предсказания вперед порядка *p* для отсчета будет иметь форму:



где - коэффициенты линейного предсказания вперед порядка *p*.



Ошибка линейного предсказания :



В матричном виде это выражение записывается как :



и соотношение для ошибки :



Однако если рассматривать, в котором минимизируется следующая, невзвешенная выборочная дисперсия :



то матрица принимает теплицевый вид (далее ее будем обозначать ).



Нормальные уравнения, минимизирующие средний квадрат ошибки имеют следующий вид:



Элементы эрмитовой матрицы имеют вид корреляционных форм



, *где*



Таким образом, авторегрессионные параметры могут быть получены в результате решения нормальных уравнений. Рассмотрим алгоритм, который в решении нормальных уравнений учитывает тот факт, что эрмитова матрица получена как произведение двух теплицевых и в результате этого сводит количество вычислений к . При использовании алгоритма *Холецкого* потребовалось бы операций.



Ошибки линейного предсказания вперед и назад *p-ого* порядка



Здесь вектор данных , вектор коэффициентов линейного предсказания вперед и вектор линейного предсказания назад определяется следующими выражениями:



, ,



На основе отсчетов измеренных комплексных данных *ковариационный* метод линейного предсказания позволяет *раздельно* минимизировать суммы квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад:



**,**



что приводит к следующим нормальным уравнениям :

,



Введем необходимые для дальнейшего определения :

,



исходя из вида и можно записать :



, ,



где вектор столбцы и даются выражениями :



,



Важными также являются следующие выражения :



Пара векторов-столбцов и определяются из выражений :



Аналогично определяются вектора и , а также и через матрицы и .



Процедура, используемая для обновления порядка вектора линейного предсказания вперед выглядит следующим образом :

, *где* , *в котором*



Соответствующий вид имеет процедура обновления порядка для вектора предсказания назад:

, *где* ,



Векторы и должны удовлетворять следующим рекурсиям обновления порядка:



Используя тот факт, что является эрмитовой матрицей имеем следующие выражения для и :



Введем скалярные множители



Соответствующие рекуррентные выражения для и имеют следующий вид :



Наконец, еще одна рекурсия обновления порядка необходима для вектора :



Обновление временного индекса в векторе коэффициентов линейного предсказания вперед осуществляется в соответствии с выражением :



Выражение для обновления временного индекса у квадрата ошибки линейного предсказания вперед :



Аналогичным образом обновление временного индекса в векторе коэффициентов линейного предсказания назад ведется в соответствии с выражением :



Выражение для обновления временного индекса у квадрата ошибки линейного предсказания назад :



,



где комплексный скаляр удовлетворяет выражениям :



Соответствующие рекурсии по временному индексу для действительных скаляров и даются следующими выражениями:



,



Начальные условия необходимы для того, чтобы начать рекурсивное решение с порядка равного нулю:

, , ,



, ,



,



Экспериментальные результаты приведены в соответствующем разделе.

1. **Градиентный адаптивный авторегрессионный метод**
2. **Рекурсивный авторегрессионный метод наименьших квадратов**

**1.5. Спектральное оценивание на основе моделей авторегрессии - скользящего среднего .**

Модель авторегресии-скользящего среднего имеет больше степеней свободы, чем авторегрессионная модель, поэтому следует ожидать, что получаемые с ее помощью оценки спектральной плотности мощности будут обладать большими возможностями для передачи формы различных спектров. Основой спектрального оценивания при помощи модели авторегрессии-скользящего среднего является аппроксимация СС-процесса авторегрессионной моделью высокого порядка. Пусть

- системная функция СС(q)-процесса



-системная функция АР-процесса,



эквивалентного этому СС(q)-процессу, то есть



Применим обратное z-преобразование к обеим частям последнего равенства, используя теорему об обратном преобразовании произведения функций, получим:

причем



Таким образом, СС-параметры можно определить по параметрам некоторой эквивалентной авторегрессионной модели посредством решения произвольной подсистемы из *q* уравнений. Используя АР-оценки высокого порядка можно записать следующую систему уравнений :



В идеальном случае ошибка должна быть равна нулю при всех значениях *m*, за исключением *m*=0, однако на практике при использовании конечной записи данных эта ошибка не будет равна нулю, поэтому оценки для CC-параметров должны определятся посредством минимизации дисперсии квадрата ошибки:



Из структуры уравнения для оценок параметров скользящего среднего видно, что эти оценки можно найти, решив соответствующие нормальные уравнения (здесь используется либо *«Оценивание корреляционной функции - метод Юла-Уалкера»*, либо

*«Оценивание линейного предсказания по методу наименьших квадратов»*)

Общая процедура раздельного оценивания авторегрессионных параметров и параметров скользящего среднего заключается в следующем. Этап **первый** - определение авторегрессионных параметров по исходным данным, после этого исходную последовательность данных необходимо подвергнуть фильтрации для получения временного ряда приближенно соответствующего некоторому СС-процессу (этап **второй**). Этот фильтр имеет системную функцию вида :

, *где* - оценки



авторегрессионных параметров, определенные с помощью метода наименьших квадратов. Системная функция процесса авторегресии-скользящего среднего равна , поэтому



Таким образом, пропуская запись измеренных данных через фильтр с системной функцией , получаем на его выходе аппроксимирующий процесс скользящего среднего. Этап **третий** : для оценивания СС-параметров применяется процедура, описанная в начале этого раздела. Оценка спектральной плотности мощности АРСС-процесса имеет вид :



, *где*



- оценка автокорреляции, полученная по фильтрованной последовательности



Экспериментальные результаты приведены в соответствующем разделе.

.

**1.6. Спектральное оценивание по методу минимума дисперсии.**

Оценка спектральной плотности мощности по методу минимума дисперсии не является

истинной функцией СПМ, поскольку площадь под графиком МД-оценки не характеризует полную мощность измеряемого процесса. Обратное преобразование Фурье, соответствующее МД-оценке, также не совпадает с автокорреляционной последовательностью. Таким образом, МД-оценку можно считать спектральной оценкой в том смысле, что она описывает относительные интенсивности компонент частотного спектра, но не является оценкой истинной СПМ. *Минимальная дисперсия* - это характеристика, которая более информативна вблизи начала координат оценки. Она получается посредством минимизации дисперсии процесса на выходе узкополосного фильтра, частотная характеристика которого адаптируется к спектральным компонентам входного процесса на каждой представляющей интерес частоте.

Рассмотрим фильтр с *p+1* коэффициентами . Выход этого фильтра, соответствующий входу , определяется сверткой:



Дисперсия на выходе рассматриваемого фильтра определяется выражением :



Коэффициенты фильтра необходимо выбирать таким образом, чтобы на частоте частотная характеристика этого фильтра имела единичный коэффициент усиления. Это ограничение можно записать следующим образом:



, *где*



Отсюда следует, что синусоида с частотой , поданная на вход такого фильтра, пройдет без искажений. Для режекции компонент спектра, удаленных от частоты , необходимо минимизировать дисперсию на выходе рассматриваемого фильтра при последнем ограничении. То есть рассматривается задача условной минимизации:



Несложно показать, что при таком ограничении решение по методу минимума дисперсии для коэффициентов фильтра будет удовлетворять уравнению:



Само значение дисперсии:



Отсюда получается выражение для спектральной оценки минимальной дисперсии:



Экспериментальные результаты приведены в соответствующем разделе.

1. **Методы оценивания частоты, основанные на анализе собственных значений.**

**1.7.1. Введение**

Ключевой операцией в методах, основанных на анализе собственных значений, является разделение информации, содержащейся в автокорреляционной матрице или матрице данных, на два векторных подпространства - подпространство сигнала и подпространство шума. В этих подпространствах можно определять различные функции от векторов сигнала и шума для получения оценок частоты. Однако эти оценки не сохраняют мощность анализируемого процесса и, следовательно, не являются оценками истинной СПМ. Далее будет рассмотрен метод классификации множественных сигналов.

Основная формула практически всех методов оценивания частоты, основанных на анализе собственных значений имеет следующий вид:

, здесь



- собственные значения автокорреляционной матрицы, упорядоченные по степени их убывания; главные собственные вектора (), соответствующие собственным значениям .На собственные векторы натянуто подпространство шума матрицы и всем им соответствует одно и то же собственное значение . На главные собственные векторы натянуто подпространство сигнала матрицы .



Разложение автокорреляционной матрицы на собственные значения можно двумя способами использовать для получения спектральных оценок или, точнее говоря, улучшенных процедур оценок частоты. Сохранение одной лишь информации, соответствующей собственным векторам пространства сигнала, то есть формирование для матриц аппроксимации пониженного порядка, эффективно способствует увеличению отношения сигнал/шум, поскольку устраняет вклад мощности компонент подпространства шума. Этот факт лежит в основе процедур оценок частоты главных компонент (подпространства сигнала). Свойство инвариантных прямых подпространств (подпространств шума и сигнала) положено в основу процедур оценок частоты в подпространстве шума.



**1.7.2.Процедуры оценки частоты в пространстве сигнала.**

**1.7.3.Оценки частоты в пространстве шума.**

**Глава 2. Экспериментальный анализ алгоритмов спектрального анализа.**

В данной работе математическое моделирование и вычислительные эксперименты преследовали следующие задачи:

1. Провести сравнительный анализ численных методов спектрального анализа на различных типах тестовых сигналах.
2. Выявить особенности каждого из методов и на их основе сделать вывод о целесообразности применения того или иного алгоритма в следующих условиях вычислительного эксперимента:
3. Тест-сигнал состоит из смеси комплексных синусоид и шумовых процессов (белых шумов, пропущенных через фильтры с частотными характеристиками типа приподнятого косинуса) (используем для проверки способности метода к сохранению «достоверности» формы спектра)
4. Несколько комплексных синусоид, присутствующие в анализируемом сигнале, имеют близкие частоты (этот тип тестовых сигналов используем для получения предельной разрешающей способности по частоте)
5. В сигнале присутствуют слабые синусоидальные составляющие на фоне сильных шумовых процессов (анализируем способность спектральных оценок обеспечивать обнаружение слабых компонент сигнала).
6. Проводим серию испытаний с одним методом и формируем при этом различные реализации процесса (здесь анализируем качество оценки СПМ, рассматриваемое как функция дисперсии оценки, зависящая от частоты; меньшим значениям функции соответствует лучшая оценка на заданной частоте). Здесь же вводится в рассмотрение равномерный критерий оценки качества получаемых оценок СПМ и на основе его делается вывод о наилучшем методе в рамках своего класса и, вообще, о лучшем из всех исследованных в рамках данной работы.
7. Для вычислительных схем функционирующих в реальном масштабе времени проводим серию экспериментов, направленных на выявление влияния значений параметров на структурную устойчивость алгоритма.
8. Серия экспериментов, направленных на решение вопроса о выборе значений параметров в параметрических методах оценки СПМ (выбор порядка в авторегрессионном методе и методе авторегрессии-скользящего среднего, а также порядок модели линейного предсказания в ковариационном методе; шаг адаптации в адаптивном авторегрессионном алгоритме; действительный весовой множитель в рекурсивном алгоритме наименьших квадратов; количество главных собственных векторов, отвечающих подпространству сигнала в методе, основанном на собственных значениях; тип окна в классических методах спектрального анализа).

Сохранение «*достоверности*» формы спектра - одно из свойств, которое присуще практически всем исследованным методам. Однако меру «*достоверности*» сложно определить аналитически и затем количественно для каждого из методов, поэтому «*достоверность*» относится к числу субъективных критериев качества получаемых оценок и основным подходом к сравнению алгоритмов является визуальное сравнение получаемых оценок с истинным априорно известным спектром тест-сигнала. Результаты сравнения полученных каждым из исследованных методов оценок приведены в приложении **C**.

Максимально допустимое *разрешение* оценки СПМ для всех рассмотренных методов приведены в приложении **D**. Как и следовало ожидать наилучшими в смысле спектрального разрешения являются альтернативные неклассические методы. Основной недостаток классических методов заключается в искажающем воздействии какого бы то ни было взвешивающего окна. А псевдоусреднение по ансамблю за счет сегментации данных приводит к еще более худшему разрешению (приложение **D** график **N**). От этого недостатка свободны *все* остальные взятые в рассмотрение методы. Однако в случае авторегрессионных методов увеличение порядка модели наряду с улучшением разрешающей способности приводит к эффекту появления ложного спектрального пика или к расщеплению спектральной линии (что продемонстрировано на графике **N** приложения **D**). Оценки по методу минимума дисперсии и оценки, полученные авторегрессионными методам, связаны некоторыми соотношениями, поэтому эти же эффекты присутствуют и в МД-оценках. В случае алгоритмов, основанных на сингулярном разложении матрицы данных, значительные ложные пики также имеют место при увеличении порядка модели.

Практически все методы позволяют экспериментально обнаружить *слабые синусоидальные составляющие*. В таблице приложения **Е** приведены максимально допустимое соотношение сигнал/шум для всех методов, при котором еще возможно обнаружить составляющие сигнала, а также графики, иллюстрирующие результаты исследования.

Приложение **F** включает в себя получение и исследование дисперсии оценок СПМ как функции частоты.

Выбор правильных параметров в методах, функционирующих в реальном масштабе времени сопряжен со значительными трудностями. С одной стороны, если рассматривать градиентный адаптивный авторегрессионный метод, выбор большего параметра адаптации приводит к улучшению разрешающей способности и к увеличению «достоверности» спектра, с другой стороны это приводит к возрастанию структурной неустойчивости всей вычислительной схемы, а на больших порядках модели, вообще, к разрушению алгоритма. В эксперименте с аудио сигналом для каждого представления отсчетов (под представлением понимается следующий набор установок : *частота дискретизации* из диапазона 8 Кгц. - 44 Кгц., *количество каналов* - 1 (моно)/ 2(стерео), *количество битов на отсчет* 8 бит/16 бит ) и для каждого набора параметров схемы, осуществляющей сбор данных в реальном масштабе времени (количество (значения из диапазона : 3,...,128) и длина буферных областей задержек данных на входе и выходе (значения из диапазона : 256,...,16384 отчета)) было выбрано компромиссное решение. Результаты приведены в приложении **G.**

Поскольку наилучшее значение порядка фильтра в авторегрессионной модели, как правило, не известно, на практике приходится испытывать несколько порядков моделей. Базируясь на этом, вводят тот или иной критерий ошибки, по которому затем определяем требуемый порядок модели. Если порядок модели выбран слишком малым, получаются сильно сглаженные спектральные оценки, если излишне большим - увеличивается разрешение, но в оценке появляются ложные спектральные пики. Таким образом, применительно к авторегрессионному спектральному оцениванию выбор порядка моделей эквивалентен компромиссу между разрешением и величиной дисперсии для классических методов спектрального оценивания. Очевидно, что следует увеличивать порядок АР-модели до тех пор, пока вычисляемая ошибка предсказания не достигнет минимума. Однако во всех исследованных методах оценка дисперсии монотонно уменьшается с увеличением порядка модели. Следовательно, одной дисперсии обычно не достаточно для того, чтобы определить момент окончания процедуры изменения порядка.

Для выбора порядка АР-модели предложено много различных критериев - своего рода целевых функций. Рассмотрим некоторые из них. Первый критерий называется *окончательная ошибка предсказания(ООП).* Согласно этому критерию, выбор порядка осуществляется таким образом, чтобы минимизировать среднюю дисперсию ошибки на каждом шагу предсказания.

, *где*



*N* - число отсчетов данных, *p*-порядок АР-процесса и - оценочное значение дисперсии белого шума (которая будет использоваться в качестве ошибки линейного предсказания).Выбирается такое значение порядка, при котором величина *ООП* минимальна. Однако использование этого и последующих критериев дает отличные результаты только для идеальных авторегрессионных процессов, а в случае реальных данных результат оказывается сильно заниженным.



Вторым критерием, основанным на методике максимального правдоподобия является *информационный критерий Акаике(он представляет исключительно теоретический интерес, а на практике используется как нижняя граница порядка модели)*



На практике обычно порядок модели выбирают в интервале от *N/3 до N/2* где *N* - длина обрабатываемой последовательности отсчетов. В приложении **Н** приведены графики оценок СПМ, полученных при различных значениях порядка модели.

**Особенности реализации**

Для решения поставленных задач был разработан и реализован язык проектирования алгоритмов, включающий в себя средства межзадачного обмена данными, то есть построение распределенных по процессам вычислительных алгоритмов, определенные части которого исполняются параллельно несколькими процессам. Дальнейшим развитием этого подхода является построение сетевых распределенных схем алгоритмов. Существует большое количество приложений этого подхода.

**Заключение**

В данной работе :

1. Tеоретически проанализированы методы спектрального анализа, а также возможность применения этих методов в современных вычислительных системах для обработки данных в реальном масштабе времени.
2. Получены результаты поставленных экспериментов и на их основе выбран наиболее подходящий метод оценивания спектральной плотности мощности в аддитивной смеси комплексных синусоид и окрашенного стационарного шумового процесса для каждого из типов экспериментов, сформулированных в разделе экспериментальных результатов.
3. Дано описание и выполнена реализация схемы управления процессом обработки данных в реальном времени, использующая преимущества параллельной архитектуры вычислительных систем.
4. Cформулирован ряд требований по вычислительным ресурсам при реальной обработке, сделан анализ длины выборки данных при различном представлении входного сигнала.
5. Получены результаты по эксперименту вычисления характеристик окон и на их основевыбрано наилучшее решение в смысле разрешения (недостаточное качество разрешения по частоте в классических спектральных методах может быть улучшено исключительно выбором весового окна, а выбор параметров метода второстепенен по отношению к выбору окна) в каждом эксперименте по оцениванию спектральной плотности мощности тест-сигнала.

**Приложениe А.**

**Смещение периодограммы Уэлча.**

Здесь доказывается факт, который используется в разделе классических методов. Среднее периодограммы Уэлча можно записать в следующем виде:



Докажем, что его можно представить в виде свертки истинного спектра (спектральной плотности мощности) и нормированного квадрата модуля дискретно-временного преобразования используемого окна данных, то есть как

, *где*  *и*



Рассмотрим выборочный спектр взвешенного p-ого сегмента в диапазоне частот :



Найдем непосредственно квадрат модуля в последнем равенстве



Подставив в формулу для математического ожидания периодограммы Уэлча, получим следующее выражение:



Введем в рассмотрение следующее окно данных (свертка используемого окна данных с тем же комплексно сопряженным, но в обратном времени, окном):



Его дискретно-временное преобразование Фурье равно, по теореме о свертке во временной области, произведению преобразований Фурье окна данных и окна . Если заметить, что преобразование окна равно комплексно-сопряженному преобразованию окна , то искомое выражение для будет равно квадрату модуля , где



Заменяя кратную сумму в выражении



и учитывая, то обстоятельство, что за пределами интервала шириной *D* отсчетов окно данных тождественно равно нулю, имеем:



**Приложениe I.**

**Список используемой литературы.**