1. **Спектры непериодических сигналов**

|  |
| --- |
|  |

     Пусть задан сигнал в виде ограниченной во времени функции s(t), отличной от нуля в промежутке t1t2. Выделим произвольный отрезок времени T, включающий промежуток t1t2, далее продолжим аналитически s(t) на всю бесконечную ось с периодом T. Тогда мы сможем разложить такую периодическую функцию s(t) в гармонический ряд Фурье. В комплексной форме будем иметь:

     Полученный ряд на участке t1t2 будет точно соответствовать нашей функции s(t). Однако, если нас интересуют моменты времени за участком t1t2, то необходимо увеличить период Т, т. е. отодвинуть повторные значения функции s(t). Производя замену переменных и переходя от суммирования к интегрированию, получим

где

 - спектральная плотность сигнала s(t).

Спектр непериодического сигнала сплошной (непрерывный) и распространяется на отрицательные частоты.

     Если , то  - модуль спектральной плотности – амплитудно-частотная характеристика.

 - фазово-частотная характеристика.

Необходимое условие существования спектральной плотности

Пример. *Спектр прямоугольного сигнала*

|  |
| --- |
|  |

Согласно формуле Эйлера



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

- площадь под импульсом.

 ***1.1 Свойства преобразования Фурье***

а) *Сдвиг сигнала во времени* *s2(t)=s1(t-t0).*

Сдвиг во времени функции *s(t)* на ±*t0* приводит к сдвигу фазы спектра на ±*wt0.* Это позволяет для удобства разложения в спектр сдвигать сигнал относительно начала координат.

б) *Сжатие и расширение сигнала* *s2(t)=s1(nt)*.

При сжатии сигнала в n раз на временной оси во столько же раз расширяется его спектр на оси частот при уменьшении модуля в n раз. Наоборот, при растяжении сигнала во времени имеет место сужение спектра и увеличение модуля спектральной плотности. Т. о. сжатие спектра импульса с целью повышения точности измерения частоты требует удлинения времени измерения. В то же время сжатие импульса по времени с целью, например, повышения точности измерения времени его появления заставляет расширять полосу пропускания измерительного устройства. В теории преобразования Фурье доказывается, что  где

.

В реальности это проявление принципа неопределенности:      При         при несреднеквадратичном определении  и .

в) *Дифференцирование и интегрирование сигнала*

Аналогично спектральная плотность интеграла  равна

г) *Сложение сигналов (линейность преобразования)*

 - из-за линейности операции интегрирования.

д) *Спектр произведения двух функций*

Изменяем порядок интегрирования:

Спектр произведения двух функций равен свертке их спектров (с множителем ).

     Аналогично можно показать, что свертке двух функций  соответствует спектр

 являющийся произведением исходных спектров.

е) *Взаимная обратимость s(t) и .*

;

Для четного сигнала *s(t)=s(-t),* и в связи с симметричностью пределов интегрирования в выражении для  можно поменять знак в экспоненте  Тогда, если по функциональной зависимости  то

***1.2 Распределение энергии в спектре непериодического сигнала***

     Найдем спектр квадрата функции *s(t).*

 - используем свойства преобразования Фурье для произведения двух функций.

В частном случае () будем иметь:

. Переходя от  к  и т. к. , комплексное сопряжение .

- равенство Парсеваля.

 - спектральная плотность энергии (энергия, приходящаяся на единицу полосы частот). *Е* - полная энергия сигнала.

Для энергии, приходящейся на конечную полосу частот, получим:

 - при симметричной

Примеры. *Спектр Гауссова (колокольного) импульса*

|  |
| --- |
|  |

,   -¥ < *t* < ¥,   *а* - условная половина длительности на уровне 0,606.

.

Произведем преобразование в показателях степени:

где d - определяется из условия:

откуда

.

При *d* - конечном  т. к. .

Тогда  т. е. спектр Гауссова импульса имеет Гауссову форму:  .

Можно показать, что Гауссов импульс обладает наименьшим  при среднеквадратичном их определении.

*Спектр d-функции*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

.

В качестве *d*-функции может выступать сигнал любой формы с бесконечно малой длительностью и единичной площадью.

***1.3 Свойства d-функции***

1)    - фильтрующее свойство.

2)   Четность

3)   Нормировка

*Спектральная плотность*

.

При *t0 = 0,*  ,

при *t0 ¹ 0,* .



|  |
| --- |
|  |

 - это спектральное определение *d*-функции.

Аналогично  - определение *d*-функции в частотной области.

*Спектральная плотность гармонического колебания*

|  |  |
| --- | --- |
|  |      Одним из условий применения интегрального преобразования Фурье функции *s(t)* является ее абсолютная интегрируемость  Применение*d-*функции позволяет получить спектральную плотность и для неинтегрируемых функций. |

     Пусть  Найдем спектральную плотность, формально не обращая внимания, что сигнал абсолютно не интегрируем.

Произведем замену .

Но  тогда

.

     Гармоническому колебанию с конечной амплитудой соответствует бесконечно большая спектральная плотность на дискретных частотах ±*w0*.

     В частности, для постоянного напряжения *w0* = 0,

**Задание 2**

В соответствии с номером варианта (последняя цифра в номере списка группы) определить энтропию источника сообщений.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 0,15 | 0,01 | 0,09 | 0,25 | 0,01 | 0,04 | 0,1 | 0,18 | 0,02 | 0,15 |

**Задание 3**

Для источника сообщений предыдущего задания построить эффективный код Хаффмена.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x4 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | 0,25 | **0,32** | **0,43** | **0,57** | **1** |
| x8 | 0,18 | 0,18 | 0,18 | 0,18 | 0,18 | **0,25** | 0,25 | 0,32 | 0,43 |  |
| x6 | 0,15 | 0,15 | 0,15 | 0,15 | **0,17** | 0,18 | 0,25 | 0,25 |  |  |
| x9 | 0,15 | 0,15 | 0,15 | 0,15 | 0,15 | 0,17 | 0,18 |  |  |  |
| x3 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,15 | 0,15 |  |  |  |  |
| x7 | 0,09 | 0,09 | 0,09 | 0,03 | 0,10 |  |  |  |  |  |
| x10 | 0,04 | 0,04 | 0,04 | **0,08** |  |  |  |  |  |  |
| x1 | 0,02 | 0,02 | **0,04** |  |  |  |  |  |  |  |
| x2 | 0,01 | **0,02** |  |  |  |  |  |  |  |  |
| x5 | 0,01 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

0

x1-110 X8

0

0

1

1

1

1

x2-1110001

x3-1111

x4-10

0

x5-1110000

x6-11101

x7-010

x8-00

X8

1

0

x9-111001

x10-011

X4

X7

X10

1

X2

0

X5

X9

1

X7

X6

1

0

X1

0

X3

1

0

**Задание 4**

Построить двоичный групповой помехоустойчивый код Хэмминга для исправления одиночных ошибок. Количество передаваемых сообщений – 45.

Дать описание построенного кода в виде проверочных равенств и матрицы.

k=3

m=3

n=m+k

n=6

(6,3)

Исходный код:

k1k2k3

Код Хэмминга:

m1m2k1m3k2k3

a1a2a3a4a5a6

Варианты разрядов в которых может возникнуть ошибка

Номера разрядов в которых может возникнуть ошибка

Значения проверочных битов

Проверочные равенства:

 – проверочный синдром, указывающий номер бита с ошибкой

Проверочная матрица:

Пример:

Закодируем сообщение 101

Исходный код

Закодированный код

Найдем проверочные разряды

Получаем код

Смоделируем ошибку при передаче сообщения. Инвертируем 5 бит сообщения 101101 и получим 1011**1**1.

Представим принятый код в виде

Используя проверочные равенства найдем

Получаем проверочный синдром S(101), который указывает на ошибку в 5 бите. Для исправления ошибки необходимо проинвертировать указанный бит 1011**0**1. В результате получаем исходный закодированный код. Для его декодирования необходимо исключить из сообщения биты 1,2, и 4 биты. Получаем исходный код 101.

Литература

1. Блейтхут Р. Для теории и практики кодов, контролирующих ошибки. / Под общей редакцией К. Ш. Зигангирова . -г. Москва.: Мир, 2003.
2. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. – М.: Высшая школа, 1989.
3. Мсхаля Ж. Основы современных информационных технологий. Учебное пособие для вузов. М.: АСВ, 2003.
4. Методические указания к лабораторным работам по курсу "Элементы теории информации" для студентов специальности "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем" / Составители: В.Н. Ярмолик, А.В. Литвиненко, А.И. Янушкевич. – Мн.: БГУИР, 1996.