**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА**

***Степенные ряды***

***Содержание***

1. Определение степенного ряда. Теорема Абеля

2. Свойства степенных рядов

3. Ряды Тейлора, Маклорена для функций

4. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

5. Приложения степенных рядов

***1. Определение степенного ряда. Теорема Абеля***

Степенные ряды являются частным случаем *функциональных рядов.*

**Определение 1.1***.* ***Степенным рядом*** *называется функциональный ряд вида* .(1.1)

Здесь – постоянные вещественные числа, называемые **коэффициентами** степенного ряда; *а* – некоторое постоянное число, *х* – переменная, принимающая значения из множества действительных чисел.

При степенной ряд (1.1) принимает вид

. (1.2)

Степенной ряд (1.1) называют *рядом по степеням разности* , ряд (1.2) *– рядом по степеням* *х*.

Если переменной *х* придать какое-либо значение, то степенной ряд (1.1) (или (1.2)) превращается в числовой ряд, который может сходиться или расходиться.

**Определение 1.2**. ***Областью сходимости степенного ряда*** *называется множество тех значений х, при которых степенной ряд сходится.*

Ряд (1.1) с помощью подстановки приводится к более простому виду (1.2), поэтому вначале будем рассматривать степенные ряды вида (1.2).

Для нахождения области сходимости степенного ряда важную роль играет следующая теорема.

***Теорема 1.1 (Теорема Абеля)***:

*если степенной ряд (1.2) сходится при , то он абсолютно сходится при всех значениях х, удовлетворяющих неравенству ; если же ряд (1.2) расходится при , то он расходится при всех значениях х, удовлетворяющих неравенству .*

Теорема Абеля дает ясное представление о структуре области сходимости степенного ряда.

***Теорема 1.2:***

*область сходимости степенного ряда (1.2) совпадает с одним из следующих интервалов:*

1) ; 2) ; 3) ; 4) ,

*где R – некоторое неотрицательное действительное число или .*

Число *R* называется ***радиусом сходимости***, интервал – ***интервалом сходимости*** степенного ряда (1.2).

Если , то интервал сходимости представляет собой всю числовую ось .

Если , то интервал сходимости вырождается в точку .

***Замечание:*** если – интервал сходимости для степенного ряда (1.2), то – интервал сходимости для степенного ряда (1.1).

Из теоремы 1.2 следует, что для практического нахождения области сходимости степенного ряда (1.2) достаточно найти его радиус сходимости *R* и выяснить вопрос о сходимости этого ряда на концах интервала сходимости , т. е. при и .

Радиус сходимости *R* степенного ряда можно найти по одной из следующих формул:

***формула Даламбера:***

;(1.3)

***формула Коши:***

.(1.4)

Если в формуле Коши , то полагают , если , то полагают .

**Пример 1.1.** Найти радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенного ряда .

*Решение*

Найдем радиус сходимости данного ряда по формуле

В нашем случае

, .

Тогда .

Следовательно, интервал сходимости данного ряда имеет вид .

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При степенной ряд превращается в числовой ряд

 .

который расходится как гармонический ряд.

При степенной ряд превращается в числовой ряд

 .

Это – знакочередующийся ряд, члены которого убывают по абсолютной величине и . Следовательно, по признаку Лейбница этот числовой ряд сходится.

Таким образом, промежуток – область сходимости данного степенного ряда.

***2. Свойства степенных рядов***

Степенной ряд (1.2) представляет собой функцию , определенную в интервале сходимости , т. е.

.

Приведем несколько свойств функции .

**Свойство 1.** *Функция является непрерывной на любом отрезке , принадлежащем интервалу сходимости .*

**Свойство 2.** *Функция дифференцируема на интервале , и ее производная может быть найдена почленным дифференцированием ряда (1.2), т. е.*

,

*для всех* .

**Свойство 3.** *Неопределенный интеграл от функции*  *для всех*  *может быть получен почленным интегрированием ряда (1.2), т. е.*

*для всех* .

Следует отметить, что при почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда его радиус сходимости *R* не меняется, однако его сходимость на концах интервала может измениться.

Приведенные свойства справедливы также и для степенных рядов (1.1).

**Пример 2.1.** Рассмотрим степенной ряд

.

Область сходимости этого ряда, как показано в примере 1.1, есть промежуток .

Почленно продифференцируем этот ряд:

.(2.1)

По свойству 2 интервал сходимости полученного степенного ряда (2.1) есть интервал .

Исследуем поведение этого ряда на концах интервала сходимости, т. е. при и при .

При степенной ряд (2.1) превращается в числовой ряд

 .

Этот числовой ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости : , который не существует.

При степенной ряд (2.1) превращается в числовой ряд

 ,

который также расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Следовательно, область сходимости степенного ряда, полученного при почленном дифференцировании исходного степенного ряда, изменилась и совпадает с интервалом .

***3. Ряды Тейлора, Маклорена для функций***

Пусть – дифференцируемая бесконечное число раз функция в окрестности точки , т. е. имеет производные любых порядков.

**Определение 3.1.** ***Рядом Тейлора*** *функции в точке называется степенной ряд*

. (3.1)

В частном случае при ряд (3.1) называется ***рядом Маклорена***:

. (3.2)

Возникает вопрос: в каких случаях ряд Тейлора для дифференцированной бесконечное число раз функции в окрестности точки совпадает с функцией ?

Возможны случаи, когда ряд Тейлора функции сходится, однако его сумма не равна .

Приведем достаточное условие сходимости ряда Тейлора функции к этой функции.

***Теорема 3.1:***

*если в интервале функция имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом, т. е. , то ряд Тейлора этой функции сходится к для любого х из этого интервала , т. е. имеет место равенство*

*.*

Для выяснения выполнения этого равенства на концах интервала сходимости требуются отдельные исследования.

Следует отметить, что если функция разлагается в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора (Маклорена) этой функции, причем это разложение единственно.

***4. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена***

1. . Для этой функции , .

По формуле (3.2) составим ряд Маклорена данной функции:

. (3.3)

Найдем радиус сходимости ряда (3.3) по формуле (1.3):

.

Следовательно, ряд (3.3) сходится при любом значении .

Все производные функции на любом отрезке ограничены, т. е.

 *.*

Поэтому, согласно теореме 3.1, имеет место разложение

. (3.4)

2. . Для этой функции , , .

Отсюда следует, что при производные четного порядка равны нулю, а производные нечетного порядка чередуют знак с плюса на минус.

По формуле (3.2) составим ряд Маклорена:

 .

При любом фиксированном значении этот ряд сходится как знакочередующийся по признаку Лейбница. При этом

.

Поэтому, согласно теореме 3.1, имеет место разложение

. (3.5)

3. . Воспользуемся разложением (3.5) в ряд Маклорена функции и свойством 2 о дифференцировании степенного ряда. Имеем



|  |  |
| --- | --- |
|  . | (3.6) |

Поскольку при почленном дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не изменяется, то разложение (3.6) имеет место при любом .

Приведем без доказательства разложения других элементарных функций в ряды Маклорена.

4.

 – *биномиальный ряд* ( – любое действительное число).

Если – положительное целое число, то получаем *бином Ньютона*:

.

 – *логарифмический ряд*.

.

***5. Приложения степенных рядов***

Степенные ряды находят применение в таких задачах, как приближенное вычисление функций с заданной степенью точности, определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений и др.

Приближенное значение функции вычисляют, заменяя ряд Маклорена этой функции конечным числом его членов.

Приведем приближенные формулы для вычисления некоторых наиболее часто встречающихся функций при достаточно малых значениях *х*:

; ; ; ;

; .

***Литература***

1. Высшая математика: Общий курс: Учебник – 2-е изд., перераб. / А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И. Шилкина и др.; Под общ. ред. С.А. Самаля. – Мн.: Выш. шк., 2000.– 351 с.

2. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч. 2. Основы математического анализа и элементы дифференциальных уравнений. – Мн.: Амалфея, 2003. – 352 с.