Статика

Статика-это раздел теор.мех., в которой изучаются условия равновесия матер.точек, тв.тел., мех.систем, при условии действия на них со стороны других тел сил и моментов сил.

Сила-это векторная величина, а ⇒ как для любой векторной вел-ны для силы важным явл-ся точка приложения, направление и величина силы.

[F]=1H=1(кг×м)/с2. Р=mg-сила тяжести.

Аксиомы статики:

1.Система 2х сил, равных по величине, противоположно направленных и лежащих на одной прямой эквивалентна 0. {F1, F2}~0 – это означает, что силы уравновешены.

Следствие: Если тело под действием 2х сил находится в равновесии, то обязательно эти силы = по величине , противоположны по направлению и лежат на одной прямой.

2.Если к системе сил добавить или отнять систему сил эквивалентных нулю, то состояние системы не изменится.

Следствие: сила-вектор скользящий. F1=F2=F2’=0, {F1, }~{F1=F2’=F2}~{F2’}, {F1;F2}~0.

3.Связи, наложенные на тело можно отбросить, заменив их действия реакциями.

Основные виды связи и их реакции.

Абсолютно гладкая поверхность.

Реакция абсолютно гладкой поверхности направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям.

Реакция в подвижном шарнире направлена ⊥ к направлению его возможного перемещения.

Жесткость заделки не дает двинуть ни по х, ни по у, ни повернуть.

4.Силы складываются по правилу параллелограмма.

Следствие: теорема косинусов.

5.Любое действие вызывает равное и противоположное по направлению противодействие (III Ньютона).

6.Принцып отвердевания. Равновесие тела от наложения на него дополнительных связей.

Некоторые понятия статики.

Равнодействующая систем сил мы будем называть силу, действие которой эквивалентно действию системы сил.

R\*~{F1;F2;F3;…;Fn} тогда мы можем сказать, что система сил вида ~{F1;F2;F3;…;Fn -R\*}эквивалентна нулю. Такая система сил наз-ся уравновешенной или равновесной.

Алгебраический момент силы относительно точки. Алг.моментом силы отн-но точки будем называть произведение силы на плечо, взятое со знаком + или -. Плечо-это кратчайшее растояние от моментной точки до линии действия силы, измеряемое перпендикуляром.

М(F)=±Fh. + берем в том случае, если сила вращает тело против часовой стрелки, - по ходу часовой стрелки.

Алгебраический момент силы относительно точки =0, если линия действия силы проходит через точку. М(F)=±Fh=2SΔOAB

Векторный момент силы относительно точки –наз-ся векторное произведение r на F.

М(F)=[r×F].

Векторн.момент направлен ⊥ плоскости, в которой лежат вектора r и F в ту сторону, что с конца этого вектора вращение, производимое силой кажется видно против часовой стрелки.

Численно векторный момент равен ⏐М0(F)⏐= ⏐F⏐× ⏐r⏐×sin(r; F); ⏐М0(F)⏐= ⏐F⏐× h=2SΔOAB .

Момент-вектор свободный, т.е.его можно переносить параллельно самому себе.

Сходящиеся силы –такие силы, линия действия которых пересекаются в одной точке (их всегда можно сложить и получить равнодействующую силу сходящихся сил). R\*=∑Fk.

Для того, чтобы система сход.сил находилась в рановесии необходимо и достаточно, чтобы R\*=0 (геометрическое условие равновесия сход.сил).

∑Fkх=0 – аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил.

∑Fkу=0

∑Fkz=0

Проекция силы на ось. По определению проекция силы на ось – это есть скалярная алгебраическая вел-на определяемая по ф-ле: Fx=Fcosα, где α-угол между направлением силы и осью.

Для равновесия системы сход.сил на плоскости необходимо и достаточно 2 ур-я: ∑Fkх=0 ; ∑Fkу=0 если все силы с плоскости хоу: F1,F2,…, Fn, ∈хоу.

Теорема о тех силах. Если тело под действием 3-х сил находится в равновесии, причем линии действия двух из них пересекаются, то линия действия 3-й силы пройдет через точку пересечения первых двух сил и все силы лежат в одной плоскости.

{F1;F2;F3 }~{R, F3}~0

Теорема об n силах. Если тело находится в равновесии под действием n сил, причем n-1 из них пересекаются в одной точке, то лииня действия n-ой силы обязательно пройдет через точку пересечения n-1 силы.

Момент силы отн-но оси. Моментом силы отн-но оси наз-ся алгебраический момент проекции силы на пл-ть, ⊥ оси относительно точки пересечения оси с пл-тью.

Мz(F)=±F’ h=±2SΔOA’B’

Момент силы относительно оси =0, если сила ⏐⏐ оси или линия действия силы пересекает ось. Момент силы относительно оси =0, если сила и ось в одной плоскости.

Мz(F)=⏐М0 ( F)⏐cosα

Момент силы отн-но оси – это есть проекция вектора момента силы отн-но любой точки оси на эту ось.

SΔOA’B’ =SΔOAB cosα.

Произведение площади проецир.фигуры на cos угла между фигурой и осью равно площади проекции фигуры.

1/2 Мz(F)=1/2⏐М0 ( F)⏐cosα⇒ Мz(F)=⏐М0 ( F)⏐cosα=⏐М01 ( F)⏐cosα1

М0 ( F)=[r×F]= i j k

 x y z

 Fx Fy Fz = (yFz – zFy )i+(zFx-xFz)j+(xFy-yFx)k

Мx ( F)= yFz – zFy; My(F)=zFx-xFz; Mz=xFy-yFx.

Мz(F)=±F’ h=±2SΔOA’B’

Пара сил.

Парой сил наз-ся 2 силы равные по вел-не, противоположно направленные и не лежащие на одной прямой.

F1=F1’=F, d-плечо пары . Пара сил эквивалентна моменту. Момент пары сил ⊥-ый плоскости пары направлен в ту сторону, что с конца этого вектора вращение, производимое парой кажется видным против часовой стрелки. Численно вектор момент равен произведению сил на плечо. пары .

⏐М1 ( F1, F1’)⏐=Fd=SOABC. Ммо(F1)=[r1 F1]; Ммо(F1’)=[r2 F1’]= Ммо(F1’)+ Ммо(F1)=[r1 F1]+[r2 F1]= [(r1- r2)F1]=[BO F1]; М1 ( F1, F1’) =[BO F1].

Пара сил не имеет равнодействующей, но она эквивалентна моменту.

Момент пары сил равен векторному моменту одной силы пары относительно любой точки, лежащей на линии действия другой силы пары.

Отонсительно любой точки сумма момента пары равна моменту пары.

Очевидно, что поскольку момент пары сил определяется вектором моментом, то 2 пары сил мы будем называть эквивалентными если у них одинаковы векторы моменты. Отсюда следует, что пару сил в плоскости действия пары можно поворачивать как угодно, изменять растояние между силами, сохраняя при этом величину вектора момента, оставаясь при этом в плоскости действия пары. Все это эквивалентные преобразования пар сил.

Пару сил можно переносить параллельно самой себе, при этом эквивалентные пары сил будут сохраняться.

Если на тело действует пара сил и тело находится в равновесии, то условие равновесия под действием пары сил имеет вид: ∑М( Fк, Fк’)=0.

Две пары сил можно сложить, при этом векторный момент пары сил эквивалентны двум складываемым парам, равен сумме моментов пары сил. М=М1+М2.

∑Мх ( Fк, Fк’)=0

∑Му ( Fк, Fк’)=0

∑Мz ( Fк, Fк’)=0 –аналитические условия равновесия для пар сил.

Приведение системы сил к заданному центру.

Вспомогательные теоремы:

При переносе силы в заданный центр возникает момент, равный векторному моменту силы относительно заданного центра.

F=F1=F1’

(F1;F1’)=Mo(F),

{F}~{F;F1;F1’}~{Lo;F1}

Основная теорема статики (теор. Пуансо):

При приведении системы сил к заданому центру возникает главный вектор R равный сумме всех сил и главный момент Мо, равный сумме моментов всех сил относительно центра приведения.

R=∑Fk

Lo=∑Mo(Fk)

Условия равновесия для произвольной простр.системы сил, а также следствия из этих уравнений.

R=0 и Lo=0 –ур-я равновесия. Им соотв-ют 6 скалярных алгебраических ур-1 равновесия для простр.системы сил:

∑Fkх=0 ∑Fkу=0 ∑Fkz=0 ∑Мх(Fk)=0 ∑Му(Fk)=0 ∑Мz(Fk)=0 – аналитическое условие равновесия для произвольной системы сил.

Пусть все силы ∈ пл-ти хоу, тогда: ∑Fkх=0 ∑Fkу=0 ∑Мо(Fk)=0 условие равновесия для произвольной плоской системы сил.

Условие равновесия для плоской системы параллельных сил.

Пустьсилы ⎮⎮ оси оу, тогда ∑Fkх=0 ∑Мо(Fk)=0

Условие равновесия для пространственной системы параллельных сил.

F1, F2, F3,…,Fn ⎮⎮ оси оz, тогда: ∑Fkz=0 ∑Мх(Fk)=0 ∑Му(Fk)=0

# Вторая форма условия равновесия для пороизвольной плоской системы сил:

∑МА(Fk)=0 ∑МВ(Fk)=0 ∑МС(Fk)=0 – причем т.А, т,В, т.С ∉ одной прямой.

- Докажем необходимость этих условий:

Допустим, система сил нах-ся в равновесии. Тогда очевидно, что ∑ моментов всех сил относительно любой точки пл-ти=0, т.е. выполняются эти 3 условия.

- Докажем достаточность этих условий:

Доказать достоточность – это значит доказать, что при выполнении этих усл-й система нах-ся в равновесии. Доказывать будем методом от противного, поэтому предположим, что эти усл-я выполняются, но система не нах-ся в равновесии, т.е. существует R\*≠0 эквив.данной сист.сил.

Рассмотрим усл-е первое и 2-е: для того, чтобы они выполнялись необходимо, чтобы R\* проходил через т.А и т.В. Согласно третьему условию hR=0. Поскольку т.С ∉ прямой АВ это может выполняться только в случае R\*=0, т.е. наше предположение не верно и система действительно нах-ся в равновесии.

Третья форма усл-я равновесия для произвольной плоской системы сил.

∑Fkz=0 ∑МА(Fk)=0 ∑МВ(Fk)=0 – причем ось ох не перпендикулярна АВ.

- Необходимость этого усл-я очевидна, т.к.если система нах-ся в равновесии, то главный вектор и главный момент =0 относительно любой точки.

- Докажем достаточность этих условий:

Предположим, что система не нах-ся в равновесии и сущ-ет, т.е. сущ-ет R\* и R\* ≠0 является равнодействующей данной системы сил. Для того, чтобы выполнялось усл-е 2 и 3 необходимо, чтобы R\* проходил через АВ.

Потребуем выполнения усл-я R\*cosα=0, поскольку х не перпендикулярна АВ , то R\* должно быть равно 0, т.о. мы доказали, что эти усл-я достаточны для того чтобы система находилась в равновесии.

На основании двух изложенных форм ур-й равновесия для плоской системы параллельных сил можно записать еще один вид ур-я равновесия для плоской системы параллельных сил:

∑МА(Fk)=0 ∑МВ(Fk)=0, АВ не параллельна F1, F2, F3,…,Fn

Теорема Вариньона:

Момент равнодействующей отн-но кокой-либо точки равен сумме моментов, составляющих данную равнод.сил относит-но того же центра.

{F1,F2,…, Fn}~R\*, {F1,F2,…, Fn , -R\*}~0, ∑Мо(Fk)= Мо(R\*)

Произволь.плоская система сил. Частный случай приведения произволь.плоской сист.сил.

Плоск.сист.сил хар-ся тем, что гл.вектор и гл.момент перпендикулярны др.другу: Lo⊥R.

Частные случаи:

1.Гл.момент Lo=0; R≠0 – в этом случае система сил приводится к равнодействующей, причем R\*=R. Если центр приведения лежит на линии действия силы R, то ситуация не изменится и сист.сил опять будет приводится к равнодействующей.

2.Пусть Lo≠0; R≠0. Покажем, что в этом случае сист.сил можно привести к равнодействующей.

R=R1=R1’; [Lo] ~{R1;R1’}; {R1;R1’}~0; причем повернем эту пару сил так, чтобы R и R1 лежали на одной прямой, тогда видим, что сист.сил {R1;R1’}~0

{R;Lo}~ {R=R1=R1’}~{R1’}. D=Lo/R.

3.Пусть R=0, Lo≠0. В этом случае система сил приводится к паре. Причем вне зависимости от вцыбора центра приведения система сил будет приводится к одной и той же паре сил с моментом Lo. Т.к.главный вектор не зависит от выбора центра приведения.

Статически определимые и стат.неопределимые задачи.

Задачи наз-ся стат.определимыми и соответств.этой задаче мех.система наз-ся стат.определимой, если число неизвесных реакций связи не превышает числа ур-й статики, которые можно составить для решения этой задачи.

Задачи наз-ся стат.неопределимыми, если число неизвестных реакций связей превышает число ур-й статики. В теор.механике рассм-ся и решаются только статически определимые задачи.

Ужно заменить неподвижный шарнир на подвижный.

Составные конструкции.

1.ХА-F1cosα+XC=0

2.-XC’+F2+XB=0

ХА- F1cosα+ F2+XB=0

Rc=RC’; MC=MC’

В РГР: после составления 6 ур-й равновесия проверить правильность найденных реакций связи при помощи ур-я, которое не участвовало в решении.

# Распределенная нагрузка

Q=[н/м], l=[м]. Q=∫qdx=q∫dx=ql

Q(x)=(q/l)x, Q=∫q(x)dx=(q/l)∫xdx=(q/l)(x2/2)⏐= (ql)/2.

dQ=q(x)dx, [(ql)/2]b=∫q(x) xdx=(q/l) ∫ x2dx=(q/l)(x3/3)⏐= (ql)/3.

[(ql)/2]b= (ql)/3⇒b=(2/3)l.

Вывод: в общем случае вел-на сосредоточенной силы равна площади распределенной на оси и приложена она в центре тяжести.(Все это касается распределенной нагрузки параллельн.между собой силам).

Сила трения скольжения. Законы Кулона для Fтр.ск.:

1)Сила трения скольжения лежит в интервале 0≤ Fтр≤ Fмах;

2) Сила трения скольжения не зависит от площади соприкасающихся тел, а зависит лишь от силы давления этого тела на поверхность

3)Сила тр.скольжения опр-ся по ф-ле: Fтр=fN, N-сила реакции опоры =Р, f-коэф-т трения скольжения

4)Коэф-т трения скольжения завис.от шероховатостей пов-тей трущихся тел, от температуры, от физич.состояния материала.

Момент трения качения.

N=P.

Мтр.кач.=δN, δ-коэф.трения качения

В динамических ур-ях сила трения скольженич и момент трения качения входят в правые части ур-я. Правило со знаком -.

Конус трения.

Угол α образуется между силой R и N, причем сила R-это равнодействующая силы N и максимальной силы трения.

tgα= Fтр/N=f-коэф.трения

Конус, построенный на силе R с углом α наз-ся конусом трения.

Если сила RА оказывается внутри конуса, то тело нах-ся в равновесии.

Т.о. если какая-то активная сила нах-ся внутри конуса и лежит на его образующей, то тогда тело нахся в равновесии. Если сила RА нах-ся вне конуса трения, то тогда тело нге может находится в равновесии.

Взаимодействие трения качения и трения скольжения.

Тело нах-ся в равновесии:

δР= Мтр.кач.=rQ,

fP= Fтр=Q

Если Q<(δ/r)P (1) , (2) то тоже тело нах-ся в равновесии

1 )Q<(δ/r)P,δ/r≤f тело нах-ся в равновесии

2) Q> (δ/r)P , Q>fP в этом случае происходит качение, но без скольжения

3) Q> (δ/r)P , Q<fP в этом случае происходит качение со скольжением

4) Q< (δ/r)P , Q>fP чистое скольжение

Поскольку в основном выполняется условие 1, то качение наступает быстрее, чем скольжение и поэтому подшипники намного эффективнее, чем скользящие приспособления.

Аналогично моменту трения качения можно ввести момент трения верчения, Коэф-т трения верчения меньше, чем коэя-т трения качения.

# Произвольная простр.система сил Частный случай приведения произвольной простр.системы сил. Инвариантная система сил.

Представим себе, что мы привели систему к какому-либо центру 0, что произойдет с сист.сил, если изменить центр приведения на некий новый центр О1.

Lo-векто свободный

{R’’, R’}~0

R=R’=R’’

MO1=[O1O ×R]

LO1=LO+[O1O ×R]= LO-[O1O ×R’]

При перемене центра приведения главный вектор сохраняется, а гл.момент меняется на вел-ну момента силы отн-но нового центра приведения.

Инвариантом наз-сятакая вел-на, кот-я не меняется при изменении центра приведения.

Т.о. мы обнаружили 1-й инвариант-это главный вектор.

(LO1×R)=(( LO+[O1O ×R] )R)

(LO1×R)=( LO×R)+( [O1O ×R] R)

(LO1×R)=( LO×R)

LO1×cosα1= LO× cosα -эта запись второго инварианта в др.форме: Проекция главного момента на направление главного вектора величина неизменная.

L1xRx+ L1yRy+ L1zRz= LxRx+ LyRy+ LzRz

Частный случай приведения произвольной плоской системы сил.

1)Приведение системы сил к паре сил

В этом случае LO≠0, R=0. При изменении центра приведения главный момент не меняется.

2)Система сил приводится к равнодействующей

а)R\*=R; LO=0

Относительно любой точки, лежащей на линии действия равнодействующей система сил всегда будет приводится к равнодействующей R, но отн-но какого-либо др.центра приведения сист.сил уже не будет приводиться к равнодействующей.

Б) LO≠0 R≠0, LO⊥ R.

Покажем, что в этом случае сист.сил приводится к равнодействующей.

R=R’=R\*

{R, LO }~{ R=R’=R\*}~{R\*}

LO=Rd

{R, R’}~0

В этом случае сист.приводится к равнодействующей, кот.лежит на растоянии d от линии дей-я силы R , определяемое по ф-ле: d=Lo/R

3)Система сил приводится к Динамо. Это когда гл.вектор и гл.момент лежат на одной прямой.

Случай, когда сист.сил приводится к Динамо

LO≠0 R≠0, причем LO не⊥ R.

LO1=LOcosα;

LO2=LOsinα; d=LO2/R

Уравнение динамической оси.

LО1x/Rx= LО1y/Ry= LО1z/Rz-ур-е прямой в простанств.сист.координат

LО1= LО +[O1O ×R]

LО1= LО +[OO1 ×R’]

[LОx+(y Rz -z Rx]/ Rx=[LОy+(z Rx -x Rz]/ Ry=[LОz+(x Ry -y Rx]/ Rz –уравнение динамической линии(ур-е прямой на которой выполняется динамо)

[LОx+(y Rz -z Ry]/ Rx=[LОy+(-x Rz +z Rx]/ Ry=[LОz+(x Ry -y Rx]/ Rz

i j k

x y z

Rx Ry Rz

[LОx -(y Rz’ -z Ry’]/ Rx=[LОy -(z Rx’ -x Rz’]/ Ry=[LОz -(x Ry’ -y Rx’]/ Rz

# Равнодействующая 2-х параллельных сил,направл-х в одну сторону

R\*=F1+F2

F1/F2 =а/в, F1×а= F2×в

МR\*(F1)=- МR\*(F2); LO-гл.момент

При пирведении сист.сил к какому-либо центру у нас появляется гл.вектор = сумме всех сил и гл.момент = сумме моментов всех сил отн-но того же центра. Поэтому равнодействующая 2-х параллельных сил, напр-х в одну сторону (лежит) и проходит между этими силами, по вел-не равна сумме этих сил и приложена в точке, которая делит растояние между этими силами на части обратно пропорциональные силам.

Равнодействующая 2-х параллельныхсил, напр-х в разные стороны

F2> F1 , R\*= F2- F1, F1/F2 = а/в, F1/а= F2/в=( F2- F) /в-а, F1×в= F2×а, Мс (F2)= Мс(F1);

Равнод-я 2-х парал-х сил, напр-х в разные стороны, лежит за линией действия большей силы, равна по модулю разности двух этих сил и приложена в точке, которая делит растояние между этими силами на части, обратно пропорциональные силам внешним образом.

Очень важно, что силы не равны между собой.

Центр параллельных сил.

Т.С –центр парал-х сил.

R\*=l∑Fi,

На основании теоремы Вариньона запишем: момент равнодействующей относит.какого-либо центра равен сумме моментов всех сил относит.того же центра

Мо (R\*)= ∑Мо Fк,

[rc×R\*]= ∑[rк ×Fк]

[rc×(∑Fi)l] - ∑[rк ×Fкl]=0

[(∑Firc - ∑Fkrk) ×l]=0

Т.к. вектор l отличен от 0, то из этого соотношения следует, поскольку вектор l выбирают произвольно, то rc∑Fк- ∑Fkrk=0 ⇒ rc=(∑Fkrk)/ ∑Fк формула нахождения центра тяжести.

# Нахождение центров тяжести

rc=(∑Рkrk)/ ∑Рк –ф-ла нах-я ц.т.

Р1=m1g; Pk=mkg; Pn=mng.

rc=(∑mkrk)/ M–ф-ла нах-я ц.т.

M=∑mk

xc=(∑mkxk)/ M; yc=(∑mkyk)/ M; zc=(∑mkzk)/ M

Для сплошного однородного тела имеем след.ф-лу для нах-я центра масс.

xc=(∫хdV)/V; yc=(∫уdV)/V; zc=(∫zdV)/V; V=∫dV

Для тел, масса кот-х распределена по пов-ти небольшой толщины имеем след-е ф-лы:

xc=(∫хds)/S; yc=(∫уds)/S; zc=(∫zds)/S; S=∫ds

Для тел, масса кот-х распределена по длине (типа проволоки):

xc=(∫хdl)/L; yc=(∫уdl)/L; zc=(∫zdl)/L; L=∫dl

# Свойства центров масс

Если тело имеет ось симметрии, плоскость симметрии, то центр масс обязательно располагается на них.

Метод отрицательных масс.

S1-вся площадь

S2- площадь выреза

С –центр масс тела без выреза площади S2

xc=[(S1-S2)xc\*+ S2xc2]/S1

xc\*= (xc S1- xc2 S2)/( S1- S2)

c\*-центр масс тела с вырезом

Из этой ф-лы следует, что если надо опр-ть центр масс тела, у кот-х есть вырез, то надо считать, что в вырезе сосредоточена отрицательная масса.

Цент тяжести некоторых простейших тел.

Разбиение на ∞

ВД-медиана

ВС\*/С\*Д=2/1

Центр тяжести в точке пересечения медиан.

Центр тяжести дуги.

Ус=0, хс=∫хdl/L

L=2αr

х=rcosϕ; dl=rdϕ;

хc=(1/2αr) ∫r2cosϕ dϕ =(r/2α)sinϕ ⏐= (r/2α)2sinα= (r sinα)/α;

# Ц.т.кругового сектора

хс=(2/3) (r sinα)/α);

# Ц.т.кругового сегмента

хс=[S2xc2 – S1xc1]/(S2 – S1)

S2=α r2

S1=(1/2)r2 sin 2α

2π - π r2, 2α - x, x=(2α/2π)π r2,

xc={[(α r2)(2/3)r (sin α/α)]-[(1/2) r2 sin 2α][(2/3) rcosα]} /[(α r2)-[(1/2) r2 sin 2α]

=(2/3)r[sin3α /(2α- sin2α]

# Кинематика

Это раздел механики, в котором изучается движение материальной точки, твердых тел, механических систем, без учета сил, вызывающих это движение

# Кинематика точки

Сущ-ет 3 способа задания дв-я точки: векторный, координатный, естественный.

При векторном способе задания точки откладываются векторы из одной точки.

Задается r, как ф-ция от времени r=r(t)

Кривая, которую вычерчивает конец вектора, отложенный из одной общей точки наз-ся гадографом.

Гадограф радиуса вектора точки – это траектория точки.

V=lim(Δr/Δt)=dr/dt –скорость

Отсюда вывод-скорость направлена по касательной к траектории точки.

W= lim(Δv/Δt)=dv/dt – ускорение

При коорд.способе задания точки берем коорд.сетку: оси x, y, z

x=f1(t)

y= f2(t)

z= f3(t)

Vx=x=d f1/Δt Wx=x=

Vy=y=d f2/Δt Wy=y=

Vz=z=d f3/Δt Wz=z=

V=√Vx2 + Vy2 + Vz2

W=√Wx2 + Wy2 + Wz2

cos(V,x)= Vx/V

cos(V,y)= Vy/V

cos(V,z)= Vz/V

Естественный способ задания дв-я точки.

При естеств.способе задания дв-я точки д.б.задано: 1)траектория дв-я точки, 2)начало отсчета на траектории, 3)положительное и отрицательное направление отсчета, 4)дуговая абсцисса д.б.задана как ф-ция от времени S=f(t)

Введем единичный орт касательный τ. Вектор τ направлен в сторону возрастания дуговой абсциссы, модуль ⎢τ⎢=1

Вектор скорости V опр-ся: V=s τ.

Если s>0, то скорость направлена в сторону возрастания дуговой абсциссы по вектору τ, а если s<0, то вектор скорости напрвлен в сторону убывания дуговой абсциссы.

V=s- алгебраическое зн-е скорости.

Введем элементы диф.геометрии.

Предельное положение пл-ти τ1М1τ2’ при стремлении М2 к М1 наз-ся соприкасающейся пл-тью.

В каждой точке кривой введем нормальную пл-ть, как пл-ть ⊥ вектору τ.

Пересечение нормальной пл-ти с соприкасающейся пл-тью дает направление главной нормали. Поэтому введем едиинчный орт направления главной нормали n направлена по напр-ю гл.нормали., т.е.по отношению к кривой мы имеем:

Введем 3-й вектор –вектор бинормали в, так что вектора τ, n и в составляли правую тройку векторов. Эти три вектора определяют оси естественного трехгранника. С каждой точкой кривой связаны 3 взаимно ⊥ оси τ, n, в

V=dr/dt=(dr/ds)/(ds/dt)=sτ

⎪dr/ds⎪=⎪dr⎪/⎪ds⎪=1

τ направлен в сторону возрастания дуговой абсциссы

# Определение ускорения при естественном способе задания дв-я точки

Ускорение W=dv/dt=d(sτ)/dt=sτ+s(ds/dt)

Кривизна кривой в данной точке

К=lim(Δϕ/Δs)=dϕ/ds

ρ=1/k=ds/dϕ-радиус кривизны в пределах при Δ s→0, вектор dτ направлен по направлению нормали.

(ττ) =1. Произв.по времени: 2[τ (dτ/dt)]=0 ⇒ ⊥ dτ/dt

Вектор dτ/dt направлен по нап-ю нормали

⎜dτ/dt⎜=⎜dτ⎜/⎜dt⎜= dϕ/ dt= (dϕ/ ds)( ds/ dt)= s(1/ρ)

вектор dτ/dt= s/ρ

s(dτ/dt)= s 2/ρ= v2/ρ

W= sτ+ (s 2/ρ), где sτ= Wτ -касат.составляющая ускорения

s 2/ρ= Wn –норм.сост.ускорения

W=Wτ + Wn

W=√Wτ2 + Wn2

Wτ -хар-ет изменение скорости по вел-не,

Wn-хар-ет изменение скорости по направлению

Wτ направлена по вектору τ если s>0 и противоположно вектору τ если s<0

Численное зн-е нормального ускорения Wn всегда >0, и оно всегда направлено внутрь области кривой в каждой ее точке.

Если точка движется по прямой, то норм.ускорение точки =0.

Пусть точка движется по окружности с пост.по величине скоростью, чему равно ускорение точки?

V=const

Wτ =dv/dt=0

Wn =v2/R

Любую кривую можно представлять в виде совокупности дуг различного радиуса.

Связь между естеств.и коорд.способами задания дв-я.

Ds=√x2+y2+z2 dt

S=∫√x2+y2+z2 dt

Wτ=dv/dt=d(√x2+y2+z2)/dt=[VxWx+VyWy+VzWz]/V/

x=f1(t)

y= f2(t)

z= f3(t)

t=ϕ1(x) –цилиндр.пов-ть образ.параллель.оси у

y=f2(ϕ1(x)) - цилиндр.пов-ть образ.кот параллель.оси z.

z=f3(ϕ1(x))

# Частный случай дв-я точки

1.Равномерное дв-е

v=const, S=So+vt

2.равноускоренное дв-е

Wτ =const, V=Vo+ Wτ t, S=Vot+ Wτ (t2/2)

V2 –Vo2=2 WτS

dV/dt= Wτ,

∫dV=∫ Wτ dt, V –Vo= Wτt

# Кинематика твердого тела

В теор.механике рассм.только тверд.тела

Абс.тв.тела-это такие тела, раст.между двумя любыми точками не меняются за все время движения

# Поступательное дв-е твердого тела

Поступательн.дв-ем тв.тела наз-ся такое дв-е

Тела, при кот.любая прямая, проведенная в нем остается параллельной самой себе за все время дв-я (самолет, летящий прямолинейно, дв-е поршня в двигателе автомоб., дв-е колеса обозрения)

Теорема: При поступ.движении тв.тела траектории дв-я всех точек тела конгруэнтны, а скорость и ускорение равны.

rв= rА+АВ

Поскольку это вып-ся в люб.момент времени, то получается, что траектория т.В можно определить смещением вектора АВ в каждой точке из траектории т.А возм.произв.по времени (АВ=const)

drв/dt= drA/dt+d(AB)/dt

VB=VA. WB=WA.

Вращат.дв-е твердого тела.

Вращат.наз-ся такое дв-е тв.тела, при кот-м хотя бы 2 точки тела остаются неподвижными за все время вращенияя, через эти 2 точки проходит ось вращения, все остальные точки движутся по окружностям в плоскостях перпендик-х оси вращения.

# Фермы

Начинаем искать усилия стержней, рассматривая узлы.

Метод Риттера(проверка)

При нахождении усилий стержней плоской фермы методом выфрезания узлов полезно знать:

1)если в незагруженном узле плоск.фермы сходятся 2 стержня. То усилие в этих стержнях =0

2)если в незагруженном узле плоск.фермы сходятся 3 стержня, из кот-х 2 расоложены на одной прямой, то усилие в 3-м стержне =0, а усилие в первых 2-х равны между собой.

Вращат.дв-е-это такое дв-е, при кот-м ось остается неподвижной, а все др..тела движутся в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Введем угол поворота ϕ -как угол между неподв.пл-тью и плоскостью, связанной с телом

[ϕ]=рад

ϕ=2πn

[N]- число оборотов

Угловая скорость ω=dϕ/dt, [ωϕ]=рад/c=c-1

ϕ=f(t)

Вектор угл.скорости ω лежит на оси вращения и направлен в сторону, что с конца этого вектора вращение кажется видимым против часовой стрелки.

Угловое ускорение ε опр-ся по ф-ле:

ε=dW/dt=d2ϕ/dt2, [**Помилка! Помилка зв'язку.**]= рад/c2=c-2.

Вектор углового ускорения ε также лежит на оси вращения и направлен по вектору ω, если вращение ускорено и противоположен ему, если вращение замедлено.

[n]-число оборотов в мин.=об/мин, тогда ω=πn/30/

Частный случай вращат.дв-я:

1)равномерное вращение.. ϕ=ωt

2)равнопеременное вращение: ε=const. ϕ=ωо t+εt2/2;

ω=ωо+εt

dω/dt=ε

dω=ε dt

∫ dω=∫ε dt

ω-ωо=ε∫ dt

ω2 -ωо2=2εϕ

dϕ/dt=ωо+εt

∫ dϕ=∫ωоdt+∫εtdt

ϕ-ϕo=ωо∫dt+ε∫tdt

ϕ-ϕo=ω оt+ε(t2/2)

Определение линейной скорости и лин.ускорения при вращат.движении твердого тела

S=hϕ

ds/dt=h(dϕ/dt)

V=hω, dv/dt=h(dω/dt)

Wτ=hε

Wn=v2/h=(ω2h2)/h=ω2h

Полное ускорение W=√ Wn2+ Wτ2=h√ω2+ε2

tgα=⎪Wτ⎪/ Wn=⎪ε⎪/ω2

Вывод: при вращ.дв-ии тв.тела линейная скорость касательная нормальной и полное ускорение пропорциональны растоянию точки от оси вращения.

Векторные ф-лы для опр-я скорости и ускорения при вращат.движении.

v=[ω×r]-ф-ла Эйлера

v=ω×r×sin(ω,r)

v=ω×h

Wτ=[ε×r], Wτ=ε×r×sin[ε×r]=hε,

Wn=[ω[ω× r]]=[ ω×v]

Wn=ω×v× sin(ω×v)= ω×v=ω2h

Производ.от вектора пост.по модулю под скалярным аргументом

⎪в⎪=const=в

dв/dt, (вв)=в2, 2[в(dв/dt)]=0 ⇒ dв/dt ⊥в.

⎪dв/dt⎪=⎪dв⎪/dt=в(dϕ/dt)=ω в.

dв/dt=[ω в]

Производная от времени, причем ⎪в⎪=const, равна векторному произведению угловой скорости вращения этого вектора на сам этот вектор.

dτ/dt= (dτ ds)/(ds dt)= (dτ/dφ)( dφ/dt)

⎪dτ/dφ⎪=1

dτ/dt=ω n

dτ/dt=[ωτ]

# Теорема о проекциях скоростей

При любом движении твердого тела проекция скоростей 2-х точек этого тела на прямую их соединяющих равны.

VAcosα= VBcosβ

Поскольку точки выбираем произвольно, то проекции скоростей любой точки прямой на эту прямую равны.

rв=rA+AB

rв-rA=AB

(rв-rA)2=(AB)2=R2=const (l=│AB│)

2(rв-rA)[(d rв/dt)- (d rA/dt)]=0

(VB-VA)AB=0, AB= VA AB

VBcosβ AB= VAcosα AB

VBcosβ = VAcosα –смысл этой теоремы заключ.в том, что рассм.дв-е абсол.тв.тела, мы не можем допустить, чтобы т.А доганяла т.В или чтобы т.А отставала от т.В.

# Мгновенный центр ускорений

Α=arctg(ε/ω2)

WQ=0

WAτ= εAQ, WAn= ω2 AQ,

WA=√( WAτ)2+( WAn)2= AQ√ε2+ ω2

tgα= WAτ/ WAn= ε/ ω2

Частный случай:

1)ε=0, тогда α=0

2)ω=0, тогда α=π/2 (дв-е мгновенно поступательное)

Сложное дв-е точки.

Сложным наз-ся токое дв-е точки, при котором сущ-ет относительное дв-е точки(это дв-е отн-но подвижной сист.координат) и переносное движение (это дв-е точки в момент в подвижной сист.коор-т отн-но неподвижной). Причем в принципе подв.сист.коор-т м.б.одно, а переносных много.

Определение скорости точки в сложном движении.

ρм=ρо+r

# Ф-ла Бура Производная от вектора относит.неподвижной сист.координат

r=xi+yj+zk

dr/dt=(dx/dt)/i+(dy/dt)j+(dz/dt)k+ x(di/dt)+y(dj/dt)+z(dk/dt)

di/dt=[ωi], dj/dt=[ωj], dk/dt=[ωk],

dr/dt=´dr/dt+[ωr], где ´dr/dt=(dx/dt)/i+(dy/dt)j+(dz/dt)k

причем dr/dt это частная локальная производная или производная от вектора r отн-но подвиж.системы координат.

Ф-ла Бура: производная от вектора отн-но неподв.системы коор-т, которая изменяется отн-но подвижной системы коор-т складывается из частной (локальной) производной плюс векторное произведение угловой скорости вращения подвижной сист.коор-т на этот вектор.

Частный случай ф-лы Бура: 1)Если ε=0 (подв.сист.коор-т движ-ся поступательно), то полная производная = частной, т.е. dr/dt=´dr/dt,

2)Если вектор r не изменяется относительно подвижной сист.коорд., т.е. ´dr/dt=0, то тогда dr/dt=[ωr] (производ.от вектора пост.по Н)

3)Пусть полная произв.от r по времени =0, т.е. dr/dt=0, тогда ‘dr/dt+ [ωr]=0,

´dr/dt+ [ωr]=0, ´dr/dt= - [ωr]

Пусть r=ω, тогда получим dω/dt=´dω/dt= ε

Производная от вектора ω по времени не зависит от того, относительно какой сист.ккор-т мы берем.

dρм/dt= dρo/dt+dr/dt/

VM=VO+[ ωr]+ ´dr/dt

VM=VL+ Vr

VL- переносная скорость (скор.точки в морож.в неподв.сист.коор-т отн-но подвижной)

Vr- относительная скорость(скор.точкт отн-но неподв.сист.коор-т)

Абсолютная скорость точки при сложном движении складывается из векторной суммы переносной и относительной скоростей

Опр-е ускорения точки в сложном движении

VM=VO+[ ωr]+ Vr

WM=d VM/dt=(d VO/dt)+[ εr]+[ ω(dr/dt)]+d Vr/dt

dr/dt=[ ωr]+ Vr

WM=Wo+[ εr]+ [ω[ωr]]+[ ω Vr]+ [ ωVr]+Wr

d Vr/dt=[ ω Vr]+ Wr

Wk=2[ω Vr]

WM=WL+Wr+WK – кинематическая теорема Кариолиса

Абсолютное ускорение точки –это есть сумма переносного ускорения, относительного ускорения и ускорения Кариолиса

Переносное ускорение хар-ет измен-е переносной скорости в переносном движении.

Относительное ускорение хар-ет изм-е относительной скоростив в относительном движении. Ускорение Кариолиса хар-ет изм-е относительной скорости в переносном движении

Ускорение Кариолиса.

Согласно правилу векторного произведения, вектор ускорения Кариолиса ┴ пл-ти, в кот-й лежат вектора ω и Vr и направлена в ту сторону,что с конца этого вектора кратчайшее совмещение первого вектора ко второму ω к Vr кажется видным против хода часовой стрелки.

# Методы нахождения мгновенных центров скоростей

Суть (классич.метод закл-ся в след.): Мгновенный центр скоростей нах-ся на пересечении перпендикуляров к скоростям в 2-х точках тела.

ω = VА/АР= VВ/ВР= VС/СР

Если скорости 2-х точек | |-ны не равны др.другу, а прямая их соединяющая ⊥-на, то тогда:

ω = VА/АР= VВ/ВР= VС/СР

Пусть скорости | |-ны, направлены в разные стороны, а прямая их соединяющая им ⊥-на.

ω = VА/АР= VВ/ВР

Пусть скорости 2-х точек тела| |-ны , направлены в одну сторону, а прямая их соединяющая не ⊥-на, то имеем: (в этом случае мгновенный центр скоростей нах-ся в бесконечности, ω =0, тело совершает мгновенно поступательное движение) VА = VВ= VС=…

Примером явл-ся кривошипно-шатунный механизм. ωАВ =0

Способ нахождения опред-я мгн.скоростей из механич.соображений

Ωколеса= VД/ДР= VВ/ВР= VА/АР

Поскольку мгн.центр скоростей –это понятие геометрическое, то может оказаться, что он нах-ся вне пределов тела.

Определение ускорения при плоскопараллельном движени.

VВ=VА+[ ω АВ]

dVВ /dt= dVА /dt+[ ε АВ]+ [ω (d АВ/dt) ]

WВ= WА +WВАτ+ WВАn

WВАn=[ω[ωAB]]= [ωVBА]

WВАτ=ε AB; WВАτ= ω2AB

При плоско параллельн.движении ускорение любой точки складывается из ускорения полюса плюс касательная к нормальной составляющей при вращении точки относительно полюса.

Сферическое дв-е тв.тела.

Сферическим наз-ся такое дв-е, при коротом это тело имеет только одну неподвижную точку. Все остальные точки тела располагаются на сферах разного радиуса. Н-р!гороскоп.

Сферич.тело имеет 3 степени свободы, n=3N-k, где n-число степеней свободы, N-число точек, к-число связей. n =6-для свободного тв.тела

Для тела, кот-е совершает сферич.дв-е достаточно 3 коор-ты, поскольку оно имеет 3 степени свободы.

х1, y1, z1-неподв.сист.коор-т

х, y, z-подв.сист.коор-т

ок-линия узлов-это прямая, по которой пересекаются плоскости х1оу1 и хоу

ψ-угол прецессии(между х1 и ок)

θ-угол нутации(между z1 и z)

ϕ-угол собственного вращения(<(ok; ox))

ψ, θ,ϕ-углы Эллера.

ϕ=ϕ(t)

θ=θ(t)

ψ=ψ(t)-будем иметь положение тела в пространстве(ккор-ты)