## Введение. Основные определения

Конструктивные формы современных машин и сооружений чрезвычайно разнообразны. Выбор формы детали, узла или сооружения определяется многими факторами: их назначением, условиями работы, технологией изготовления, стоимостью, а также методами расчета. Одним из самых распространенных типов современных и перспективных конструкций являются тонкостенные ***оболочки.*** Тонкие пластины и оболочки находят исключительно широкое применение в конструкции самых разнообразных инженерных сооружений. По этой причине создание надежных совершенных конструкций непосредственно зависит от уровня развития теории тонких пластин и оболочек.

**Тонкая оболочка** может быть определена как тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами. Таким образом, для оболочечных конструкций характерна ***тонкостенность*.**

К оболочкам относятся, в частности, тонкостенные пространственные системы, очерченные по криволинейным поверхностям. Оболочки способны выдерживать разнообразные виды нагрузок и обеспечивать изоляцию от окружающей среды. Им можно придать обтекаемую форму и на их основе получить относительно легкие конструкции, что имеет огромное значение в авиакосмической промышленности

Снижение материалоемкости конструкции - важный фактор для многих машин и агрегатов. Выгодно это и в строительных сооружениях. Оболочки позволяют эффективно решать проблему минимизации массы.

В настоящее время оболочки можно видеть повсюду. Высотные здания и телебашни, спортивно-концертные комплексы, крытые стадионы и рынки, цистерны и резервуары, трубопроводы и градирни, самолеты и ракеты, надводные и подводные корабли, автомобили в существенной части состоят из оболочек. Транспортные конструкции характеризуются не только возможностью достижения высоких скоростей, аэродинамическим совершенством форм, грузоподъемностью. Они воплощают также идеи оптимальности, экономичности, весового совершенства.

Оболочки как элементы конструкций известны давно. Это и паровой котел, и водопровод в древнем Риме. С давних времен известны емкости для хранения жидкостей и зерна, криволинейные своды перекрытий в строительстве. Но решающую роль в самых различных областях современной техники оболочки стали играть последние несколько десятилетий.

Термин "***оболочка"*** относится к числу перегруженных и в него можно вкладывать разный смысл. Далее под оболочками понимаются конструкции, способные выполнять ***силовые, эксплуатационные, технологические, архитектурные и эстетические функции.***

При математическом моделировании с понятием оболочки в первую очередь связывается представление о ***геометрической поверхности*.** В механике деформируемого твердого тела и строительной механике классификация объектов (тел) основана на особенностях их формы и соотношении характерных размеров.

Принято различать и выделять элементы конструкций, один размер которых намного больше двух других. Это стержни, кольца, арки. Тела, у которых один размер намного меньше остальных, образуют класс оболочек и пластин.

Основная проблема теории тонких упругих оболочек состоит в сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной задачи. Таким образом, развитие общей теории тонких упругих пластин и оболочек идет по пути сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным. Для решения этой проблемы предложено большое число методов, которые по классификации С.А. Амбарцумяна могут быть объединены в три группы: метод гипотез, метод разложения общих уравнений теории упругости по толщине оболочки и асимптотический метод. Все эти методы интенсивно развиваются, дополняя друг друга.

## Список обозначений

α1, α2 - криволинейные ортогональные координаты срединной поверхности So оболочки на линиях главных кривизн; для оболочки вращения α1 ─ продольная, α2-окружная координаты; z ─ координата по нормали к S;



А1, А2 -коэффициенты Лямэ; k1, k2 -главные кривизны;

U, V, W - компоненты вектора перемещений произвольной точки оболочки;

u, v, w - компоненты вектора перемещений точек поверхности So;

θ 1, θ2 - углы поворота нормали ;



εjk - компоненты тензора деформаций;

E11, E22, E12 - компоненты тангенциальной деформации на S: растяжения-сжатия по направлениям координат α1 и α2 и сдвиг;

K11, K22, K12 - компоненты изгибной деформации: изменения главных кривизн и кручение;

T11, T22, S - тангенциальные внутренние усилия, приведенные к So: усилия растяжения-сжатия и сдвига;

M11, M22, H - изгибающие и крутящий моменты;

Q11, Q22 - перерезывающие силы;

q1, q2, q3 - компоненты внешней поверхностной нагрузки, приведенные к S;

E, ν - модуль Юнга и коэффициенты Пуассона материала оболочки;

yj -унифицированные обозначения основных независимых переменных в разрешающих системах обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ);

fj - операторы правых частей канонических систем ОДУ;

Рассмотрим элемент произвольной тонкой оболочки, пусть в дальнейшем

h - толщина оболочки, принимаемая в дальнейшем постоянной.

Обозначим через R1, R2- главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки S. R=min {R1, R2}.

Основным геометрическим параметром оболочки является параметр тонкостенности или относительная толщина, определяемый отношением ε=h/R.

Принята достаточно условная классификация оболочек по ее толщине на тонкие, средней длины и толстые оболочки.

Будем считать оболочку тонкой, если ее относительная толщина значительно меньше единицы. Обычно оболочки считают тонкими при значении ε<1/20. Значения 1/20 < ε < 1/10 соответствуют оболочке средней толщины, а ε > 1/10 - толстой оболочке.

Для незамкнутых оболочек можно задать характерный размер размер a. Тогда параметр тонкостенности можно определить как ε = min (h/a, h/R).

Поверхность оболочки S, равноотстоящая от лицевых поверхностей S+ и S - называется ее срединной поверхностью.

## Криволинейные, ортогональные системы координат

Правило дифференцирования базисных векторов криволинейной ортогональной системы координат определяется следующим образом:

**e**s,t = - (Ht,s /Hs) **e**t - δst∇Ht

∇ = **e**m (…),m / Hm

Здесь Hm - параметры Ляме координатной системы, имеющие вид

**= (r, i) 2**; Hi **= ⏐r, i⏐.**



Здесь **r, I -** радиус - вектор произвольной точки тела оболочки. В частности:

**e**1,1 = (H1,1/H1) **e**1 - (H1,1/H1) **e**1 - (H1,2/H2) **e**2 - (H1,3/H3) **e**3

**e**1,2 = (H2,1/H1) **e**2; **e**3,2 = (H2,3/H3) **e**2; Hi (α1, α2, α3)

Запишем условие совместности, которое в принятых обозначениях имеет вид:

(**e**1,1),2 = (**e**1,2),1

(**e**1,2),1 = ( (H2,1/H1) **e**2),1 = (H2,1/H1),1 **e**2 + (H2,1/H1) (H1,2/H2) **e**1;

(**e**1,1),2 = - [ (H1,2/H2) **e**2 + (H1,3/H3) **e**3],2 =

= - (H1,2/H2),2 **e**2 + (H1,2/H2) ( (H2,1/H1) **e**1+ (H2,3/H3) **e**3) -

(H1,3/H3),2 **e**3 - (H1,3/H3) (H2,3/H3) **e**2

Тогда, приравнивая коэффициенты при базисных векторах, получим:

**e**1: (H2,1H1,2) / (H1H2) - (H2,1H1,2) / (H1H2) ≡ 0 - тождество

**e**2: (H2,1/H1),1 + (H1,2/H2),2 + (H1,3 ⋅ H2,3) / = 0



**e**3: (H1,2 ⋅ H2,3) / (H2H3) - (H1,3/H3),2 = 0

Круговая перестановка индексов приводит к шести уравнениям совместности параметров Ляме.

## Некоторые сведения из теории поверхностей

Рассмотрим произвольную гладкую поверхность и систему декартовых координат x, y, z.

Пусть **ρ** = **ρ** (α1, α2) - радиус-вектор произвольной точки срединной поверхности оболочки. Рассмотрим производные **ρ** по переменным α1 и α2

**ρ**,1 = **ρ**1; **ρ**,2 = **ρ**2

Введем в рассмотрение базис

**ρ**1 /⏐**ρ**1⏐= **e**1 **ρ**2 /⏐**ρ**2⏐= **e**2

и обозначим ⏐**ρ**α⏐ = Aα на срединной поверхности S (α3 =0). В этом случае **ρ**i = Ai **e**i

Составим скалярные произведения:

**ρ**α ⋅ **ρ**β =Gαβ; G11 =; G22 =



G12 = G21 = 0 для ортогональной системы координат

При этом образуется тензор второго ранга = Gαβ **ρ**α **ρ**β, который называется первым фундаментальным тензором поверхности.



ds2 = (d**ρ**) 2 = (**ρ**,1 dα1 + **ρ**,2 dα2) 2 =

= (**ρ**1dα1 + **ρ**2 dα2) 2 = G11d + 2G12 dα1dα2 +C22 d =



= d + d;



Коэффициенты А1 и А2 являются коэффициентами первой квадратичной формы и называются параметрами Ляме. Первая квадратичная форма определяет так называемую внутреннюю геометрию поверхности и определяет метрику поверхности. Введем в рассмотрение единичный вектор внешней нормали к поверхности **N.** Запишем очевидное соотношение **N** ⋅ **N** =1 и продифференцируем его по α1, α2:

2**N** ⋅ **N**, i = 0; очевидно, вектор **N**, I лежит в касательной плоскости к поверхности S и может быть представлен в виде разложения **N**, i = Bij **ρ**j.

При этом вводится в рассмотрение тензор второго ранга

= Bαβ ⋅ **ρ**α ⋅ **ρ**β,



являющийся вторым фундаментальным тензором поверхности, а его компоненты Bαβ - коэффициентами второй квадратичной формы поверхности, определяющей внешнюю геометрию поверхности.

В главных осях тензор может быть записан в виде:



= = k1**e**1**e**1 + k2**e**2**e**2



k1 = 1/R1; k2 = 1/R2 –

главные кривизны

В дальнейшем координатные линии выбираются вдоль главных осей кривизны. Пусть в дальнейшем

I1 = k1 + k2 - первый инвариант (средняя кривизна)



I2 = k1 ⋅ k2 - второй инвариант (гауссова кривизна)



## Специальная система координат в теории оболочек

**N** = **e**1 × **e**2

Для любой точки тела оболочки:

**r** (α1,α2,α3) = **ρ** (α1,α2) + α3**N**

**= (r**, i) 2 = (**ρ**, i + (α3**N**), i) 2 = (**ρ**i + α3Bij **ρ**j) 2 (B12 = B21 =0)



= (**ρ**1 + α3 **N**,1) 2 = (ρ1 + α3 ⋅ B11 **ρ**1) 2 = (1 + α3k1) 2



H1 = A1 (1 + α3k1); H2 = A2 (1 + α3k2); (⏐ρi⏐= Ai)

= **N** ⋅ **N** = 1 → H3 = 1 –



параметры Ляме в специальной системе координат

## Соотношения Гаусса и Кодацци

Уравнения совместности параметров Ляме:

(H2,1/H1),1 + (H1,2/H2),2 + (H1,3⋅ H2,3) /= 0



(H1,2 ⋅ H2,3) / (H2H3) - (H1,3/H3),2 = 0

В специальной системе координат

Hβ = Aβ (1 + α3kβ); H3 = 1 (β = 1,2)

Рассмотрим срединную поверхность α3 = 0

(A2,1/A1),1 + (A1,2/A2),2 + k1A1 k2A2 = 0 –

соотношение Гаусса.

A1,2 k2 - (A1k1),2 = 0, (A1k1),2 = A1,2 k2

при замене индексов получаем два соотношения Кодацци

(A2k2),1 = A2,1 k1

Вектор перемещений

**u** = **R** - **r** = u1**e**1 + u2**e**2 + u3**e**3

**R** - текущая конфигурация

**r** - отсчетная конфигурация

**u**, i = (uk**e**k), i = (uk), i**e**k + uk (**e**k), i

Дифференцирование ортов в специальной системе координат

**e**1,1 = - **e**2 (H1,2/H2) - **e**3 (H1,3/H3) = - **e**2 1/ (A2 (1 + α3k2)) ⋅ [A1 (1 + α3k1)],2 -

**e**3 ⋅ [A1 (1 + α3k1)],3 = - **e**2 1/ (A2 (1 + α3k2)) [A1,2 + α3 (A1k1),2] - **e**3 A1k1 =

**= - e**2 (A1,2 (1 + α3k2)) / (A2 (1 + α3k2)) - **e**3 A1k1 =

= - **e**2 (A1,2/A2) - **e**3 A1k1;

**e**1,2 = **e**2 (H2,1/H1) = **e**2 1/ (A1 (1 + α3k1)) [A2,1 + α3 (A2k2),1] =

**= e**2 (A2,1 (1 + α3k1)) / (A1 (1 + α3k1)) = **e**2 (A2,1/A1);

**e**1,3 = **e**3 (H3,1/H1) = 0 (т.к H3 = 1)

**e**2,1 = **e**1 (A1,2/A2) - получаем из **e**1,2 заменой (1↔2)

**e**2,3 = **e**3 (H3,2/H2) = 0 **e**3,2 = **e**2 (H2,3/H3) = **e**2 A2k2

**e**3,1 = **e**1 (H1,3/H3) = **e**1 A1k1 **e**3,3 = 0 (H3 = 1)

## Удлинения, сдвиги и повороты элемента сплошной среды

а) Рассмотрим удлинения

d**r** - в отсчетной конфигурации, d**R** - в текущей конфигурации

d**R** = d**r ⋅** ; **R (**= **e**k (…),k **/** Hk)



**R** = **r** + **u**

(**r** + **u**) = **r** +**u** = **u**



Рассмотрим относительное удлинение

(⏐d**R**⏐-⏐d**r**⏐) /⏐d**r**⏐ = ε; ⏐d**R**⏐ = dS; ⏐d**r**⏐ = ds;

dS2 - ds2 = d**R** **⋅** d**R** - d**r** **⋅** d**r** = d**r** **⋅⋅** d**r ⋅ -** d**r** **⋅** d**r =**



=d**r** **⋅⋅⋅** d**r** - d**r** **⋅⋅** d**r =** d**r (⋅-⋅**) ⋅ d**r** =



= 2d**r ⋅ ⋅** d**r**; = 0,5 (**⋅** - ) - тензор деформаций Грина



= 0,5 [ ( **+u**) ( **+u**T) - ] = 0,5 (**u +u**T **+u⋅u**T)



d**r** = **e** ds → **e** = d**r** /⏐d**r**⏐ - единичный вектор

dS2 - ds2 = 2ds2 **e**⋅εG ⋅ **e**

**(**dS2 - ds2) /ds2= (dS/ds) 2 - 1 = 2**e**⋅εG⋅**e**

dS/ds = (1 + 2**e**⋅εG⋅**e**) 1/2;

εe = (dS - ds) /ds = (1 + 2**e**⋅εG⋅**e**) 1/2 - 1 - удлинение

Пусть **e** = **e**1; = (1+2) 1/2 - 1 = 1 + + … - 1 = ≈ **e**11



**e** = 0,5 (∇**u** +∇**u**T) - линейный тензор деформаций Коши.

## Деформации сдвига

Выделим два прямолинейных волокна, направление которых определяется единичными векторами **m**1 и **m**2

d**r**1 = **m**1ds1; d**r**2 = **m**2ds2;

dsi = ⏐d**r**i⏐ - длины элементов волокон до деформаций

Деформации сдвига характеризуется изменением угла θ12

cos θ12 - cos Θ12 = (d**r**1⋅ d**r**2) / (ds1⋅ ds2) - (d**R**1⋅ d**R**2) / (dS1⋅ dS2) =

= **m**1 ⋅ **m**2 - [ (d**r**1⋅⋅ d**r**2) / ds1 (1+εm1) ds2 (1+εm2)] =



= **m**1 ⋅ **m**2 - **m**1⋅⋅ **m**2 = **m**1⋅ ( - ) ⋅ **m**2 = - 2**m**1⋅⋅ **m**2;



Пусть **m**1 = **e**1; **m**2 = **e**2; **m**1 ⋅ **m**2 = 0

cos θ12 = 0 0 - cos Θ12 = -2



cos Θ12 = cos (π/2 - γ12) = 2 = sin γ12 = γ12



γ12 - угол сдвига; γ12 ≈ e12, если γ12 - небольшой

## Повороты

Рассмотрим материальное волокно d**r** = **e** ds

**ω** = (d**r** × d**R**) / (⏐d**r**⏐⋅⏐d**R**⏐) - вектор поворота материального волокна

⏐**ω**⏐= sin ϕ

**ω** - нормаль, относительно которой происходит поворот

**ω** = (d**r** × (d**r⋅**)) / (d**s**⋅d**s** (1 + εe)) = **e** × (**e**⋅**)** =



= **e** × [**e ⋅ (u**)] = **e** × **e** + **e** × (**e** **⋅** **u**) = **e** × (**e** **⋅u**)



Пусть **e** = **e**t - базисные вектора t = 1,2,3

**ω**t - вектор поворота материального волокна t

**ω**t = **e**t × (**e**t **⋅** **u**) = **e**t × (**e**t ⋅ ukj **e**k **e**j) =



**u** = ukj **e**k **e**j = **e**t × (ukj δtk **e**j) = **e**t × utj **e**j =



= utj ∍tjk **e**k = ωtk **e**k = **ω**t, где ωtk = utj ∍tjk

∍tjk - символы Леви-Чивита, которые определяются:

СЛЧ = 0, если среди r,s,t есть одинаковые

=+1, если индексы r,s,t - различные → 123, 231, 312

= -1, если этот порядок нарушается

∍rst = **e**r **⋅** (**e**s × **e**t)

**ω**tk характеризует поворот орта t относительно орта k.

Введем тензор второго ранга = ωtk **e**t **e**k - тензор поворота



ω11 = 0; ω12 = u1j ∍1j2 = - u13; ω13 = u1j ∍1j3 = u12

ω21 = u2j ∍2j1 = u23; ω22 = 0; ω23 = - u21

ω31 = u3j ∍3j1 = - u32; ω32 = u3j ∍3j2 = u31;

ω33 = 0;

Определим компоненты градиента вектора перемещений в специальной системе координат:

(= **e**s (…),s / Hs; Hi = Ai (1 + α3ki) i = 1,2 H3 = 1



“o” - в дальнейшем опускаем

∇**u** = **e**s (u1**e**1 + u2**e**2 + u3**e**3),s / Hs = **e**1 (u1,1/H1) **e**1 + **e**1 (**e**1,1 /H1) u1 + **e**2 (u1,2/H2) **e**1 +

+ **e**2 (**e**1,2 /H2 ) u1 + **e**3 (u1,3/H3) **e**1 + **e**3 (**e**1,3 /H3) u1 + **e**1 (u2,1/H1) **e**2 + **e**1 (**e**2,1 /H1) u2 +

+ **e**2 (u2,2/H2) **e**2 + **e**2 (**e**2,2 /H2) u2 + **e**3 (u2,3/H3) **e**2 + **e**3 (**e**2,3 /H3) u2 + **e**1 (u3,1/H1) **e**3 +

+ **e**1 (**e**3,1 /H1) u3 + **e**2 (u3,2/H2) **e**3 + **e**2 (**e**3,2 /H2) u3 + **e**3 (u3,3/H3) **e**3

После подстановки выражений ek,j (j,k = 1,2,3)

Hi = Ai (1 + α3ki) i = 1,2; H3 = 1

h/2 ≤ α3 ≤ h/2; учитывая, что h/Ri " 1, т.е. оболочка тонкая, получим:

u11 = u1,1/A1 + (A1,2 / (A1A2)) u2 + u3k1

u12 = u2,1/A1 - (A1,2 / (A1A2)) u1

u13 = u3,1/A1 - u1k1

u21 = u1,2/A2 - (A2,1 / (A1A2)) u2

u22 = u2,2/A2 + (A2,1 / (A1A2)) u1 + u3k2

u23 = u3,2/A2 - u2k2

u31 = u1,3 u32 = u2,3 u33 = u3,3

= 0,5 (∇**u** + ∇**u**T) ⇒ eii = uii



Для удлинений имеем:

e11 = u11; e22 = u22; e33 = u33;

Для деформаций сдвига соответственно:

e12 = 0,5 (u12 + u21) = 0,5 [ (A2/A1) (u2/A2),1 + (A1/A2) (u1/A1),2]

e13 = 0,5 (u13 + u31) = 0,5 (u3,1/A1 + u1,3 - u1k1)

e23 = 0,5 (u23 + u32) = 0,5 (u3,2/A2 + u2,3 - u2k2)

Углы поворота определяются через перемещения следующим образом: ωii = 0

ω12 = - u13 = - u3,1/A1 + u1k1

ω21 = u23 = u3,2/A2 - u2k2; ω13 = u12

ω23 = - u21 ω31 = - u32 = - u2,3; ω32 = u31 = u1,3.

## Теория малых удлинений и малых квадратов углов поворота

Рассмотрим тензор нелинейных деформаций Грина:

= 0,5 (∇**u** + ∇**u**T + ∇**u** ⋅ ∇**u**T) = + 0,5∇**u** ⋅ ∇**u**T



Его нелинейная часть определяется следующим образом:

∇**u** ⋅ ∇**u**T = umn **e**m ⋅ **e**n ⋅ uij **e**j **e**i = umn uij δnj **e**m⋅**e**i =

= umn uin **e**m **e**i; ⇒ εmi = emi + 0,5umn uin

Таким образом, компоненты тензора деформаций можно записать в виде:

ε11 = e11 + 0,5 ()



ε12 = e12 + 0,5 (u11u21 + u12u22 + u13u23)

ε13 = e13 + 0,5 (u11u31 + u12u32 + u13u33)

ε21 = e21 + 0,5 (u21u11 + u22u12 + u23u13)

ε22 = e22 + 0,5 ()



ε31 = e31 + 0,5 (u31u11 + u32u12 + u33u13)

ε32 = e32 + 0,5 (u31u21 + u32u22 + u33u23)

ε33 = e33 + 0,5 ()



ε23 = e23 + 0,5 (u21u31 + u22u32 + u23u33)

или, подставляя выражения для углов поворота:

ε11 = e11 + 0,5 ()



ε22 = e22 + 0,5 ()



ε33 = e33 + 0,5 ()



ε12= e12 + 0,5 (-e11ω23 + e22ω13 - ω12ω21)

ε13= e13 + 0,5 (e11ω32 - ω13ω31 - ω12ω33)

ε23= e23 + 0,5 (- ω32ω23 -e22ω31 + e33ω21)

(u21 = -ω23; u23 = ω21; u31 = ω32; u12 = ω13; u32 = -ω31;

u31 = ω32; u11 = e11; u22 = e22; u33 = e33)

Введем следующие предположения:

eii << 1 - деформации растяжения -сжатия малы

предполагаем, что величины поворотов ω13 << 1; ω23 << 1, а в отношении остальных величин можно принять, что << 1



ωij - угол поворота i-го орта относительно j-го орта. Таким образом из соотношений (…) следует:

ε11 = e11 + 0,5



ε22 = e22 + 0,5



ε33 = e33 + 0,5 ()



ε12= e12 - 0,5ω12 ω21

ε13= e13 + 0,5 (e11ω32 - ω13ω31 - ω12ω33)

ε23= e23 + 0,5 (- ω32ω23 -e22ω31 + e33ω21)

## Гипотезы Кирхгофа-Лява

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, основаны на геометрических и статических соображениях. Однако их недостаточно для полного построения теории оболочек. При выборе соотношений, связывающих компоненты деформаций с перемещениями и усилия и моменты с компонентами деформаций приходится принимать некоторые упрощающие подходы. Первый заключается в том, что оболочку рассматривают как трехмерное упругое тело. Решение соответствующих уравнений теории упругости разыскиваются путем разложения всех величин в ряды по степеням точки оболочки от срединной поверхности. Этот подход, предложенный в теории пластин А. Коши, позволяет при удержании достаточного числа членов (при условии сходимости рядов) получить решение близкое к точному. Этот метод весьма громоздок, поэтому в большинстве случаев идут по другому пути. Во втором подходе предложенном также при построении теории пластин Г. Кирхгоффом принимаются гипотезы, аналогичные тем, которые используются в теории балок:

прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна недеформированной оболочки остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности и не меняют своей длины;

нормальные напряжения на площадках, параллельных площадкам срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими напряжениями.

Первая гипотеза имеет геометрический характер, вторая - статический. Теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгоффа, была построена, в основном А. Лявом, поэтому в теории оболочек гипотезы 1 и 2 принято называть гипотезами Кирхгоффа-Лява. Иногда их называют гипотезой жесткой (недеформированной) нормали или гипотезой сохранения нормали.

Гипотеза 1 используется только для записи зависимостей деформации оболочки от перемещений, гипотеза 2 - для записи зависимостей деформаций от напряжений. В первом случае предполагается, что в нормальных сечениях отсутствуют сдвиги e13 = e23 = 0, и поперечные деформации e33 = 0. Во втором случае допускается, что нормальное напряжение σ33 незначительно влияет на деформации ε11 и ε22, так что эти деформации выражаются через нормальные напряжения σ11, σ22 и σ33 << {σ11, σ12, σ22}. Таким образом гипотезу 1 нельзя понимать в буквальном смысле, поскольку в действительности в оболочках имеют место поперечные сдвиги - поперечные или как их иногда называют перерезывающие силы не равны нулю.

Гипотезы Кирхгоффа-Лява просты и физичны. Они позволяют свести трехмерную задачу определения напряженно-деформированного состояния оболочки к двумерной. Исследование поведения элемента оболочки в рамках этих гипотез сводится к исследованию поведения ее срединной поверхности. Следует отметить, что теория, построенная на гипотезах Кирхгоффа-Лява, является существенно приближенной. Принятие этих гипотез вносит погрешность порядка h/R, где h - толщина оболочки, R - минимальный линейный размер срединной поверхности.

Рассмотрим элемент тонкой оболочки со срединной поверхностью S. До деформирования в исходной конфигурации радиус-вектор произвольной точки оболочки, не лежащей на срединной поверхности может быть представлен в виде:

**r** (α1, α2, α3) = **ρ** (α1, α2) + α3**n**

**ρ** (α1, α2) - радиус-вектор проекции точки на S до деформации.

После деформирования (в актуальной конфигурации)

**R** (α1, α2, α3) = **P** (α1, α2) + α3**N**

**P** (α1, α2) - радиус-вектор проекции точки на S после деформации

Тогда вектор перемещений запишется в виде:

**u** = **R** - **r** = **P** - **ρ** + α3 (**N** - **n**) = = **u**° (α1, α2) + α3**u**1 (α1, α2)

**u**° - вектор перемещений точек, лежащих на S

В координатной форме соответственно:

u1 = (α1, α2) + α3 (α1, α2)



u2 = (α1, α2) + α3 (α1, α2)



u3 = (α1, α2)



При этом компоненты вектора перемещений u1 и u2 линейным образом зависят от координаты α3, а функция поперечногопрогиба постоянна по толщине в силу недеформируемости нормали.

Рассмотрим детальнее геометрическую гипотезу Кирхгоффа-Лява. Тот факт, что нормаль к срединной поверхности S в процессе деформирования остается нормалью приводит к соотношениям:

e13 = 0, e23 = 0

Таким образом

u3,1/A1 + u1,3 - u1k1 = 0

/A1 + - ( + α3) k1 = 0



(1 - α3k1) - k1 + /A1 = 0



считая оболочку достаточно тонкой, пренебрегаем членом α3k1 << 1

(α1, α2) = -/A1 + k1



(α1, α2) = -/A2 + k2



ω12 = - u3,1/A1 + u1k1 = -/A1 + k1 + α3k1=



= - /A1 + k1 + α3k1 (-/A1 + k1) =



= (-/A1 + k1) (1 + α3k1) = (1 + α3k1) ≈ =



= -/A1 + k1 = θ1 (α1, α2) - угол поворота на поверхности S.



Аналогично:

ω21 = u3,2/A2 - u2k2 ≈ = /A2 - k2 = - = - θ2 (α1, α2)



Обозначим: = u; = v; = w тогда можно записать:



u1 = u + α3θ1, u2 = v + α3θ2, u3 = w

Введем в рассмотрение плоский вектор перемещений и поворотов:

**u** = u**e**1 + v**e**2

**θ** = θ1**e**1 + θ2**e**2

Тензор кривизны в главных осях можно представить в виде:

= k1**e**1**e**1 + k2**e**2**e**2; ki = 1/Ri



Окончательно кинематические соотношения, соответствующие теории Кирхгоффа-Лява запишутся в виде:

**θ** = -∇w + ⋅ **u** ∇ = **e**s (1/As) (∂/∂s) (s = 1,2)



**u** (α1, α2, α3) = u1**e**1 + u2**e**2 = **u** (α1, α2) + α3**θ** (α1, α2)

u3 = w (α1, α2)

С учетом проведенных выкладок для компонентов тензора деформаций имеем:

ε11 = e11 + 0,5 = + α3



= /A1 + A1,1 / (A1A2) + k1 + 0,5



= θ1,1/A1 + A1,1 / (A1A2) θ2 (ω12 = θ1)



ε22 = e22 + 0,5



= /A2 + A2,1 / (A1A2) + k2 + 0,5



= θ2,2/A2 + A2,1 / (A1A2) θ1



ε12= e12 - 0,5ω12ω21 = e12 + 0,5θ1θ2 = (ω21 = -θ2)



= 0,5 [ (A2/A1) (/A2),1 + (A1/A2) (/A1),2] + 0,5θ1θ2



= 0,5 [ (A2/A1) (θ2 /A2),1 + (A1/A2) (θ1/A1),2]



Введем в рассмотрение плоский тензор деформаций

= ε11**e**1**e**1 + ε12 (**e**1**e**2 + **e**2**e**1) + ε22**e**2**e**2



Он может быть записан в другой форме:

= + α3, где



= **e**1**e**1 + (**e**1**e**2 + **e**2**e**1) + **e**2**e**2 (β = 0,1)



Таким образом использование геометрической гипотезы Кирхгоффа-Лява приводит к линейному распределению перемещений и деформаций по толщине оболочки. В компактной форме можно записать:

= 0,5 (∇**u**+ ∇**u**T) + **w** + 0,5**θθ**



= 0,5 (∇**θ** + ∇**θ**T)



характеризует деформации растяжения-сжатия срединной поверхности S, - изменение кривизн и кручение срединной поверхности.



## Определение напряженного состояния оболочки

dS = H2 dα2dα3 = A2 (1 + α3k2) dα2dα3

S11 = A2 (1 + α3k2) dα3dα2= A2dα2**⋅**



**⋅**  (1 + α3k2) dα3, A2dα2 –



длина средней линии.

Введем усилия на единицу длины:

T11 = S11/ (A2dα2) (1 + α3k2) dα3



Аналогично:

T12 = (1 + α3k2) dα3;



T22 = (1 + α3k1) dα3;



T21 = (1 + α3k1) dα3



Tαβ - усилия растяжения-сжатия в срединной поверхности оболочки. В дальнейшем:

Tαβ = dα3 (α, β) = 1,2, = Tαβ**e**α**e**β = T11**e**1**e**1 + T22**e**2**e**2 + T12 (**e**1**e**2 + **e**2**e**1)



Введем изгибающие моменты

Мαβ = α3dα3



= M11**e**1**e**1 + M22**e**2**e**2 + M12 (**e**1**e**2 + **e**2**e**1)



Qβ = dα3, β = 1,2 σβ - перерезывающие силы



**Q** = Q1**e**1 + Q2**e**2

Свяжем напряженное состояние с ее деформир.:

Замечание о возможности использования линейных физич. соотношений

Материал: однородный, изотропный

Обобщенный закон Гука:

ε11 = (1/E) [σ11 - ν (σ22 + σ33)] ε12 = (1/2μ) σ12

ε22 = (1/E) [σ22 - ν (σ11 + σ33)] ε23 = (1/2μ) σ23

ε33 = (1/E) [σ33 - ν (σ11 + σ22)] ε13 = (1/2μ) σ13

E = 2μ (1 + ν)

Теория - геометр. нелинейная, но физич. - линейная.

По 2-ой гипотезе Кирхгофа-Лява:

σ33 = 0

σ11 - νσ22 = Eε11 ⇒ σ11 = E / (1-ν2) (ε11 + νε22)

σ22 - νσ11 = Eε22 σ22 = E / (1-ν2) (ε22 + νε11)

σ12 = 2μ ε12 E / (1 + ν) ε12

T11 = dα3 = / (1-ν2) (ε11 + νε22) dα3 =



= E / (1-ν2)



= (Eh) / (1-ν2) - т.к материал - однород.



B = (Eh) / (1-ν2) - жесткость на растяж. - cжатие

T11 = B; T22 = B;



T12 = (Eh) (1+ν) = B (1-ν)



M11 = =



= E / (1-ν2)



= (E) / (1-ν2) =



= (Eh3) / (12 (1-ν2))



M11 = D, D = (Eh3) / (12 (1-ν2)) - жесткость на изгиб (цилиндрическая жесткость)



M22 = D; M12 = D (1-ν) .

