**Теория пары снимков**

1. Формулы связи координат точек местности и их изображений на тереопаре снимков (прямая фотограмметрическая засечка)

На рис.1 показана стереопара снимков Р1 и Р2, на которых точка местности М изобразилась соответственно в точках m1 и m2. Будем считать, что элементы внутреннего и внешнего ориентирования снимков известны.

 Рис.1 .

Выведем формулы связи координат точек местности и координат их изображений на стереопаре снимков.

Из рис.1 следует, что векторы определяют соответственно положение точки местности М и центра проекции S1 снимка Р1 относительно начала системы координат объекта OXYZ. Вектор определяет положение центра проекции S2 снимка Р2 относительно центра проекции S1.

Векторы определяют положение точек m1 и М относительно центра проекции S1. Векторы определяют положение точек m2 и М относительно центра проекции S2.

Из рис.1 следует, что

 (1 )

Так как векторы коллинеарны, то

 ; ( 2)

где N – скаляр.

С учетом ( 2) выражение (1.8.1) будет иметь вид

. ( 3)

В координатной форме выражение (1.7.3) будет иметь вид

 ; ( 4)

где X1’,Y1’,Z1’ –координаты вектора в системе координат объекта OXYZ.

.

Найдем значение N, входящее в выражение ( 4). Из рис.1 следует, что

;

или с учетом (2)

. ( 5)

Так как векторы коллинеарны, то их векторное произведение

 . ( 6)

С учетом (5) выражение ( 6) можно представить в виде

;

Или

 . ( 7)

В координатной форме выражение (7) имеет вид

или

 , ( 8),

где:

- орты, совпадающие с осями координат X,Y,Z системы координат объекта OXYZ;

BX, BY, BZ, X1’, Y1’, Z1’, X1’, Y1’, Z1’ – координаты векторов в системе координат объекта OXYZ.

 ,

где i – номер снимка, а

. (9)

Так как векторы коллинеарны ( так как векторы компланарны), значение N можно найти как отношение их модулей, то есть

 ; (10)

В координатной форме выражение (10) с учетом (8) имеет вид

; (11)

У коллинеарных векторов отношение их координат равно отношению их модулей, поэтому можно записать, что:

Таким образом, если известны элементы внутреннего и внешнего ориентирования стереопары снимков и измерены на этих снимках координаты соответственных точек x1,y1 и x2,y2, то сначала надо определить по одной из формул ( 12)-( 14) значение скаляра N, а затем по формуле ( 4) вычислить координаты точки местности X,Y,Z.

**2.** **Формулы связи координат точек местности и координат их изображений на стереопаре снимков идеального случая съемки**

В идеальном случае съемки угловые элементы ориентирования снимков стереопары ω1=α1=ℵ1=ω2=α2=ℵ2=0, а базис фотографирования параллелен оси Х системы координат объекта OXYZ.

В этом случае координаты базиса будут равны BX=B, BY=BZ=O (B-модуль ).

Примем, что , то есть начало системы координат объекта OXYZ совмещено с точкой S1), f1=f2=f, a x0i=y0i=0.

Так как угловые элементы ориентирования снимков равны нулю, то

,

а ,

где i – номер снимка.

При этом выражение (1 .13) примет вид

 , (1)

а выражение (1 .4), которое мы представим в виде

будет иметь вид

, (2)

а с учетом ( 1)

 . (3)

Так как из третьего уравнения выражения (3) следует, что

,

то формулы связи координат (3) можно представить в виде

 (4)

**3.** **Определение координат точек местности по стереопаре снимков методом двойной обратной фотограмметрической засечки**

Для определения координат точек местности по стереопаре снимков методом прямой фотограмметрической засечки необходимо, чтобы были известны элементы внешнего ориентирования снимков. В большинстве случаев практики их значения не известны. В этом случае определение координат точек местности по стереопаре снимков выполняют методом двойной обратной фотограмметрической засечки.

Решение задачи по этому методу выполняется в следующей последовательности:

1. Определяют элементы взаимного ориентирования снимков. Пять элементов взаимного ориентирования снимков определяют взаимную угловую ориентацию стереопары снимков и базиса фотографирования. Для их определения необходимо измерить не менее пяти соответственных точек на стереопаре снимков;
2. Строят фотограмметрическую модель объекта по измеренным на стереопаре снимков координатам изображений соответственных точек и значениям элементов взаимного ориентирования снимков. Построенная модель подобна сфотографированному объекту, но имеет произвольный масштаб и произвольно расположена и ориентирована относительно системы координат объекта;
3. Определяют элементы внешнего ориентирования фотограмметрической модели по опорным точкам. Эти семь элементов определяют масштаб модели, ее положение и ориентацию относительно системы координат объекта. Для их определения достаточно трех опорных точек, не лежащих на одной прямой. По значениям элементов внешнего ориентирования фотограмметрической модели и элементов взаимного ориентирования можно определить элементы внешнего ориентирования стереопары снимков;
4. По координатам точек, определенных в системе координат модели, и элементам внешнего ориентирования модели определяют координаты точек в системе координат объекта.

**4. Условие, уравнения и элементы взаимного ориентирования снимков**

На рис. 1 представлена стереопара снимков Р1 и Р2 в положении, которое они занимали в момент фотографирования.

Любая пара соответственных лучей в этом случае пересекается в точке М местности и лежит в плоскости, проходящей через базис фотографирования (базисной плоскости).

Очевидно, что в этом случае векторы , лежащие в базисной плоскости, компланарны.

 Рис. 1

Как известно из аналитической геометрии, смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.

 . ( .1)

Условие компланарности в координатной форме имеет вид:

 . ( 2)

В уравнении ( 2) координаты векторов в системе координат фотограмметрической модели ОМХМYMZM, в общем случае произвольно расположенной и ориентированной.

В дальнейшем эту систему координат будем называть просто системой координат модели.

Условие ( 2) связывает между собой только направления векторов и выполняется при любых значениях их модулей. Поэтому значение модуля вектора можно выбрать произвольно. Направление вектора определяется двумя независимыми величинами. В качестве этих величин можно выбрать координаты bz и bу вектора , коллинеарного вектору , задав величину координаты bx произвольно.

В частном случае величину bx можно выбрать равной 1.

При этом направление вектора будут определять величины:

 и .

Выражение (2) в этом случае будет иметь вид:

 ( 3)

В уравнении (3)

,

где i – номер снимка, а А’1 – ортогональная матрица, элементы aij которой являются функциями угловых элементов ориентирования i-го снимка ωi’,αi’,ℵi’ относительно системы координат модели ОМХМYMZM.

В выражении (3), которое является уравнением взаимного ориентирования в общем виде, куда кроме координат соответственных точек, измеренных на стереопаре снимков, и элементов внутреннего ориентирования входят 8 параметров by, bz, ω1’, α1’, ℵ1’, ω2’, α2’, ℵ2’, которые определяют угловую ориентацию базиса фотографирования и стереопары снимков относительно системы координат модели ОМХМYMZM.

Причем параметры ω1’ и ω2’ определяют поворот снимков стерепары вокруг оси ХМ, параметры bz, α1’, α2‘ – поворот базиса фотографирования и стереопары снимков вокруг оси YM, а параметры by, ℵ1’, ℵ2 ‘– поворот базиса фотографирования и стереопары снимков вокруг оси ZM.

Однако, из этих 8 параметров только 5 определяют взаимную угловую ориентацию базиса фотографирования и стереопары снимков.

Условие (3) выполняется при любой ориентации системы координат модели ОМХМYMZM. Следовательно, ее можно ориентировать таким образом, чтобы 3 из 8 параметров стали равны нулю.

Очевидно, что в общем случае можно сделать равным нулю только один из параметров, входящих в три группы параметров:

* ω1’, ω2’;
* bz, α1’, α2‘;
* by, ℵ1’, ℵ2’.

Таким образом, в качестве элементов взаимного ориентирования можно выбрать любую комбинацию из восьми параметров by, bz, ω1’, α1’, ℵ1’, ω2’, α2’, ℵ2’, кроме комбинаций, в которые одновременно входят две тройки параметров bz, α1’, α2‘ и by, ℵ1’, ℵ2’, а также пара параметров ω1’ и ω2’.

Рассмотрим наиболее распространенные системы элементов взаимного ориентирования:

**Система α1’, ℵ1’, ω2’, α2’, ℵ2’**. Если принять при этом, что by=bz= ω1’=0, то уравнение (3) имеет вид:

 . ( 4)

Система by, bz, ω2’, α2’, ℵ2’. Если при этом принять, что ω1’= α1’= ℵ1’ =0, то уравнение (3) будет иметь вид:

 ; ( 5)

так как .

**Комментарий.** 3 оставшихся из 8 параметров после выбора 5 элементов взаимного ориентирования задают ориентацию системы координат модели ОМХМYMZM. Например, выбрав систему элементов взаимного ориентирования by, bz, ω2’, α2’, ℵ2’ и приняв, что ω1’= α1’= ℵ1’ =0, мы таким образом задаем систему координат модели ОМХМYMZM, которой параллельны осям x, y, z системы координат первого снимка стереопары S1x1y1z1. В общем случае значения трех параметров можно задавать произвольно.

5. Определение элементов взаимного ориентирования

Для определения элементов взаимного ориентирования в качестве исходного используют уравнения взаимного ориентирования ( 4.3)

.

Каждая точка, измеренная на стереопаре снимков, позволяет составить одно уравнение (4.3), в которое, помимо измеренных координат точек на стереопаре снимков, элементов внутреннего ориентирования и трех параметров, задающих ориентацию системы координат модели, входят 5 неизвестных элементов взаимного ориентирования.

Очевидно, что для определения элементов взаимного ориентирования необходимо измерить на стереопаре снимков не менее 5 точек.

В качестве примера рассмотрим определение элементов взаимного ориентирования by, bz, ω2’, α2’, ℵ2’.

В связи с тем, что уравнения ( 4.3) не линейны, их предварительно приводят к линейному виду и переходят к уравнению поправок:

 . ( 1)

В уравнении поправок коэффициенты ai частные производные от функции ( 4.3) по соответствующим аргументам, а ℓ– свободный член.

Значения коэффициентов аi в уравнении ( 1) вычисляют по следующим известным значениям:

* измеренным координатам точек на стереопаре снимков – хi, yi;
* элементам внутреннего ориентирования снимков fi, x0i, y0i;
* 3 параметрам, задающим ориентацию системы координат модели (в нашем случае ω1’, α1’, ℵ1’) и приближенным значениям элементов взаимного ориентирования.

Свободный член ℓ вычисляется по формуле ( 4.3) таким же образом.

Полученную систему уравнений поправок решают методом приближений, а в случае, если измерено более 5 точек по методу наименьших квадратов (под условием VTPV=min). В результате решения находят значения элементов взаимного ориентирования.

Критерием, по которому принимается решение о завершении итерраций, могут являться величины поправок к определяемым неизвестным или величины остаточных поперечных параллаксов, которые для каждой измеренной точки вычисляются по формулам:

 ; ( 2)

где .

Величина **qост** представляет собой разность ординат измеренных точек на стереопаре снимков, приведенных к идеальному случаю съемки, то есть q=y1-y2.

Необходимо отметить, что при отсутствии ошибок построения снимка и ошибок измерений величина q должна быть равна 0.

При определении элементов взаимного ориентирования оптимальным вариантом считается измерение 12-18 точек на стереопаре снимков, расположенных парами или тройками в 6 стандартных зонах (рис. 1).

Рис. 1

 - главная точка снимка

 - стандартно расположенная зона

В этом случае получается наиболее точное и надежное определение элементов взаимного ориентирования и появляется возможность локализации грубых измерений.

**6. Построение фотограмметрической модели**

Построение фотограмметрической модели заключается в определении координат точек объекта по измеренным на стереопаре снимков координатам их изображений в системе координат модели ОМХМYMZM.

Определение координат точек модели производится по формулам прямой фотограмметрической засечки (см. раздел 1).

При этом координаты центра проекции S принимаются произвольными (обычно 0). Также произвольно (но не равной 0) выбирается величина ВХ. В большинстве случаев практики величину ВХ принимают равной:

;

где b – базис фотографирования в масштабе снимка,

 m – знаменатель масштаба снимка.

Остальные значения элементов внешнего ориентирования определяют по 8 параметрам by, bz, ω1’, α1’, ℵ1’, ω2’, α2’, ℵ2’, 5 из которых являются элементами взаимного ориентирования, а 3 определяют ориентацию системы координат модели.

При этом

.

Например, если были определены элементы взаимного ориентирования α1’, ℵ1’, ω2’, α2’, ℵ2’ и при этом величины параметров by, bz, ω1’ были приняты равными нулю (by=bz=ω1’=0), то BY=BZ=0, ω1=0, α1=α1’, ℵ1=ℵ1’, ω2=ω2’, α2=α2’, ℵ2=ℵ2’.

Если были определены элементы взаимного ориентирования by, bz, ω2’, α2’, ℵ2’, а величины параметров ω1’, α1’, ℵ1’ были приняты равными нулю (ω1’= α1’= ℵ1’=0), то

.

7. **Внешнее ориентирование модели. Элементы внешнего ориентирования модели**

Рис. 1

На рис.1: OXYZ - система координат объекта, ОМХМYMZM - система координат фотограмметрической модели , А – точка объекта ,АМ -точка фотограмметрической модели, соответствующая точке А объекта .

Векторы определяют положение начала системы координат модели ОМХМYMZM и точки А местности относительно начала системы координат объекта OXYZ.

Векторы определяют соответственно положение точек АМ и А относительно системы координат фотограмметрической модели.

Из рис. 1 следует, что

 . ( 1)

Векторы коллинеарны, поэтому

 ; ( 2)

где t – знаменатель масштаба модели.

С учетом ( 2) выражение ( 1) имеет вид:

 ; ( .3)

В координатной форме выражение ( 3) имеет вид:

 ; ( 4)

Или

 . ( .5)

В выражениях ( 4) и ( 5):

X, Y, Z – координаты точки объекта в системе координат объекта;

ХМ,YM,ZM - координаты соответствующей точки модели в системе координат фотограмметрической модели;

АМ – матрица преобразования координат, элементы aij которой являются функциями углов ωМ, αМ, ℵМ, определяющих ориентацию системы координат модели относительно системы координат объекта;

t – знаменатель масштаба модели.

7 параметров: - называют элементами внешнего ориентирования модели.

8. Определение элементов внешнего ориентирования модели по опорным точкам

Для определения элементов внешнего ориентирования модели по опорным точкам в качестве исходных используют уравнения ( 7.5), которые представим в виде:

 . ( 1)

Каждая планово-высотная опорная точка (X,Y,Z) позволяет составить 3 уравнения ( 1), в которых неизвестными являются 7 элементов внешнего ориентирования модели. Каждая плановая опорная точка (X,Y) позволяет составить два первых уравнения из выражения ( 1), а каждая высотная опорная точка (Z) – третье уравнение из выражения ( 1).

Для определения элементов внешнего ориентирования модели необходимо составить систему не менее чем из 7 уравнений. Очевидно, что для этого необходимо иметь не менее двух планово-высотных и одной высотной опорной точки. Задачу можно также решить, если иметь две плановые и три высотные опорные точки.

Так как уравнения ( 1) не линейны, их приводят к линейному виду и переходят к уравнениям поправок.

 . ( 2)

В уравнении поправок:

ai, bi, ci – частные производные от уравнений ( 1) по соответствующим переменным ;

ℓX, ℓY, ℓZ – свободные члены.

Значения коэффициентов уравнений поправок ai, bi, ci вычисляют по известным значениям координат ХМ,YM,ZM и X, Y, Z и приближенным значениям неизвестных. Значения свободных членов ℓX, ℓY, ℓZ вычисляют таким же образом по формулам ( .1).

Полученную таким образом систему уравнений поправок решают методом последовательных приближений. Если количество уравнений поправок в системе больше семи, то ее решают по методу наименьших квадратов (под условием VTPV=min).

9. Определение элементов внешнего ориентирования снимков стереопары

По элементам внешнего ориентирования модели и элементам взаимного ориентирования можно определить элементы внешнего ориентирования снимков стереопары.

Линейные элементы внешнего ориентирования снимков определяют по формулам:

 ; ( 1)

в которых - координаты центра проекции i-го снимка стереопары в системе координат модели.

Угловые элементы внешнего ориентирования снимков ωi, αi, ℵi определяют в следующей последовательности:

1. Сначала получают матрицу преобразования координат i-го снимка

 ; ( 2)

АМ – матрица, в которой элементы aij вычисляют по угловым элементам внешнего ориентирования модели ωМ, αМ, ℵМ ;

Ai’ – матрица, в которой элементы aij вычисляют по угловым элементам взаимного ориентирования i-го снимка ωi’, αi’, ℵi’.

1. Затем по элементам aij матрицы Ai вычисляют угловые элементы внешнего ориентирования i-го снимка стереопары:

 .

**10. Точность определения координат точек объекта по стереопаре снимков**

Для предрасчета точности определения координат точек местности по стереопаре аэрофотоснимков, учитывая, что углы наклона снимков не превышают 1°- 3°, а базис фотографирования практически горизонтален, воспользуемся формулами связи координат точек местности и координат их изображений на стереопаре снимков идеального случая съемки ( 2.4):

 . ( 2.4)

Сначала получим среднюю квадратическую ошибку определения высоты точки Z местности. Для этого продифференцируем третью формулу выражения (1.8.4) по аргументу р.

 .

Заменим величину р на b – базис в масштабе снимка.

Рис.1

На рис.1 О1и О2 – главные точки снимка.

В результате получим

 .

Перейдя к средним квадратическим ошибкам получим формулу:

 . ( 1)

Для получения средних квадратических ошибок определения координат Х и Y точки местности продифференцируем первые две формулы выражения (1.8.4) по аргументам x, y, Z и перейдем к средним квадратическим ошибкам.

В результате получим

 . ( 2)

В качестве примера вычислим величины mX, mY и mZ точек местности, определенных по стереопаре снимков масштаба 1:5000, полученной АФА с f =150 мм и форматом кадра 23х23 см, с продольным перекрытием 60%.

Будем считать, что на стереопаре снимков точки были измерены с ошибками

 .

В этом случае высота фотографирования

;

а базис фотографирования в масштабе снимка

 .

Средние квадратические ошибки определения координат точки местности, вычисленные по формулам ( 1) и ( 2) будут равны:

.

