**Типовые динамические звенья и их характеристики**

***Динамическим звеном*** называется элемент системы, обладающий определенными динамическими свойствами.

Любую систему можно представить в виде ограниченного набора типовых элементарных звеньев, которые могут быть любой природы, конструкции и назначения. Передаточную функцию любой системы можно представить в виде дробно-рациональной функции:

 (1)

Таким образом, передаточную функцию любой системы можно представить как произведение простых множителей и простых дробей. Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или простых дробей, называют типовыми или элементарными звеньями. Типовые звенья различаются по виду их передаточной функции, определяющей их статические и динамические свойства.

Как видно из разложения, можно выделить следующие звенья:

1. Усилительное (безынерционное).
2. Дифференцирующее.
3. Форсирующее звено 1-го порядка.
4. Форсирующее звено 2-го порядка.
5. Интегрирующее.
6. Апериодическое (инерционное).
7. Колебательное.
8. Запаздывающее.

При исследовании систем автоматического управления она представляется в виде совокупности элементов не по их функциональному назначению или физической природе, а по их динамическим свойствам. Для построения систем управления необходимо знание характеристик типовых звеньев. Основными характеристиками звеньев являются дифференциальное уравнение и передаточная функция.

Рассмотрим основные звенья и их характеристики.

**Усилительное звено** (безынерционное, пропорциональное). Усилительным называют звено, которое описывается уравнением:

(2)

или передаточной функцией:

 (3)

При этом переходная функция усилительного звена (рис. 1а) и его фун-кция веса (рис. 1б) соответственно имеют вид:

t

t

0

h(t)

0

k.1(t)

k(t)

k.δ(t)

а) б)

Рис. 1

Частотные характеристики звена (рис. 2) можно получить по его передаточной функции, при этом АФХ, АЧХ и ФЧХ определяются следующими соотношениями:

.

+j

k +

АФХ

АЧХ

ФЧХ

0

0

k

0

ω0ω

ω0ω

ϕ(ω)

A(ω)

h(t)

Рис. 2

Логарифмическая частотная характеристика усилительного звена (рис. 3) определяются соотношением .

L(ω)

ω

k<1

0

k>1

k=1

ЛАЧХ

Рис. 3

**Примеры звена:**

1. Усилители, например, постоянного тока (рис. 4а).
2. Потенциометр (рис. 4б).

∅

∅

∅

∅

Uвых

Uвх

R

∅

Roc

∅

Rвх

Uвых

Uвх

а) б)

Рис. 4

3. Редуктор (рис. 5).

K(p)=i=ωвых /ωвх.

ωвых

ωвх

Рис. 5

**Апериодическое (инерционное) звено**. Апериодическим называют звено, которое описывается уравнением:

(4)

или передаточной функцией:

 (5)

где *Т* – постоянная времени звена, которая характеризует его инерционность, *k* – коэффициент передачи.

При этом переходная функция апериодического звена (рис. 6а) и его функция веса (рис. 6б) соответственно имеют вид:

 h(t)

k⋅1(t)

 0 t

 T а)

k(t)

k/T

0 t

 б)

Рис. 6

Частотные характеристики апериодического звена (рис. 7а-в) опреде-ляются соотношениями:

-π/4

-π/2

 k/2 k +

ФЧХ

0

ω0ω

ϕ(ω)

ωc=1/T

+j

АФХ

ωc = 1/T

 k

 k

√2

АЧХ

0

ω0ω

A(ω)

ωc =1/T

-k/2

h(t)

а) б) в)

Рис. 7

Логарифмические частотные характеристики звена (рис. 8) определяются по формуле

При

+20

 0

-20

ω

ЛАЧХ

L(ω)

-20 дБ/дек

ωс

0.1 1 10 100

Рис. 8

Это асимптотические логарифмические характеристики, истинная характеристика совпадает с ней в области больших и малых частот, а максимальная погрешность будет в точке, соответствующей сопряженной частоте, и равна около 3 дБ. На практике обычно используют асимптотические характеристики. Их основное преимущество в том, что при изменении параметров системы (*k* и *T*) характеристики перемещаются параллельно самим себе.

**Примеры звена:**

1. Апериодическое звено может быть реализовано на операционных усилителях (рис. 9).

Сoc

Rос

Rвх

Uвых

*K(p) = k/(Tp+1);*

*T = RосCос;*

*k = RосRвх.*

Uвх

∅ ∅

Рис. 9

2. Звенья на RLC-цепях (рис. 10).

L

∅ ∅ ∅ ∅

R

Uвх

С

Uвх

R

Uвых

Uвых

∅ ∅ ∅ ∅

Рис. 10

4. Механические демпферы (рис. 11).

Y

X

Рис. 11

**Интегрирующее звено.** Интегрирующим звеном называют звено, которое описывается уравнением:

(6)

или передаточной функцией:

 (7)

При этом переходная функция интегрирующего звена (рис. 12а) и его функция веса (рис. 12б) соответственно имеют вид:

1. t

 а)

h(t)

1/Т

1/T

k(t)

1. t

##  6)

Рис. 12

Частотные характеристики интегрирующего звена (рис. 13) определяются соотношениями:

0 ω

-π/2

АЧХ

A(ω)

 0 ω

ФЧХ

ϕ(ω)

+j

 +

АФХ

ω=∞

h(t)

Рис. 13

Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена (рис. 14) определяются по формуле:

ω

0

ЛАЧХ

L(ω)

-20 дБ/дек

ωс

+20

-20

0.1 1 10 100

Рис. 14

**Пример звена.** Интегрирующее звено может быть реализовано на операционных усилителях (рис. 15).

Rвх

Uвых

Uвх

Сoc

*K(p) = 1/Tp;*

*T = RвхCос.*

∅ ∅

Рис. 15

**Дифференцирующее звено.** Дифференцирующим называют звено, которое описывается уравнением:

(8)

или передаточной функцией:

 (9)

При этом переходная функция звена (рис. 16а) и его функция веса (рис. 16б) соответственно имеют вид:

k(t)= Tδ(t)

 0 t

 б)

h(t)=Tδ(t)

1. t

 а)

Рис. 16

Частотные характеристики звена (рис. 17а-в) определяются соотношениями:

 +

АЧХ

0

ω0ω

A(ω)

Tω0ω

ФЧХ

0

ω0ω

ϕ(ω)

π/2

+j

АФХ

ω=∞

а) б) б)

Рис. 17

Идеальное дифференцирующее звено является физически не реализуемым. В реальных звеньях такой вид характеристики могут иметь только в ограниченном диапазоне частот.

Логарифмические частотные характеристики звена (рис. 18) определяются по формуле:

ω

0

ЛАЧХ

L(ω)

20 дБ/дек

ωс

+20

-20

0.1 1 10 100

Рис. 18

**Примеры звена:**

1. Дифференцирующее звено может быть реализовано на операционных усилителях (рис. 19).

Cвх

Uвых

Uвх

Roc

*K(p)=Tp;*

*T=CвхRос*.

∅ ∅

Рис. 19

2. Тахогенератор (рис. 20).

∅

x = α

y = U

∅

Рис. 20

**Колебательное звено.** Колебательным называют звено, которое описывается уравнением:

(10)

или передаточной функцией:

 (11)

где ξ – демпфирование (0 ≤ ξ ≤ 1).

Если ξ = 0, то демпфирование отсутствует (консервативное звено – без потерь), если ξ = 1, то имеем два апериодических звена.

При этом переходная функция звена и его функция веса (рис. 21) соответственно имеют вид:

 (12)

а) б)

Рис. 21

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФХ) имеет вид (рис. 22а) и определяется соотношением

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для различных значений ξ имеет вид (рис. 22б) и определяется соотношением

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) имеет вид (рис. 22в) и определяется соотношением

Частотные характеристики колебательного звена имеют вид

ω=∞

K(jω)

+j

 k +

АФХ

ФЧХ

0

ω0ω

ϕ(ω)

 -π

ωc=1/T

-π/2

АЧХ

0

ω0ω

A(ω)

k

а) б) в)

Рис. 22

Логарифмические частотные характеристики звена (рис. 23) определяются по формуле:

При *k = 1*

ω

0

ЛАЧХ

L(ω)

-40 дБ/дек

ωс

+20

-20

0.1 1 10 100

+40

-40

Рис. 23

**Примеры звена.** Колебательное звено может быть реализовано на операционных усилителях (рис. 24).

 Сос Сос Rос

Uвх Uвых

 Rвх Rвх Rвх

∅

∅

Рис. 24

Колебательное звено на RLC-цепи (рис. 25).

R

L

∅

∅

Uвых

Uвх

С

∅

∅

Рис. 25

В приведенной схеме:

С – накапливает энергию электрического поля;

L – накапливает энергию электромагнитного поля;

R – на сопротивлении происходит потеря энергии.

Запишем передаточную функцию цепи:

 – затухание (демпфирование).

4. Механические демпферы (рис. 26).

Y

X

С

m

Рис. 26

**Форсирующее звено.** Форсирующим называют звено, которое описывается уравнением:

 (13)

или передаточной функцией

 (14)

где *k* – коэффициент передачи звена.

При этом переходная функция звена и его функция веса соответственно определяются соотношениями:

Частотные характеристики звена (рис. 27а-в) определяются соотношениями:

A(ω)

 +

АЧХ

0

ω0ω

ФЧХ

0

ω0ω

ϕ(ω)

π/2

π/4

ω = ωс

+j

АФХ

 1

1

а) б) в)

Рис. 27

Логарифмические частотные характеристики звена (рис. 28) определяются по формуле:

+20

 0

-20

ω

ЛАЧХ

L(ω)

+20 дБ/дек

ωс

0.1 1 10 100

Рис. 28

**Форсирующее звено 2-го порядка.** Передаточная функция форсирующего звена 2-го порядка имеет вид:

 (15)

Логарифмические частотные характеристики звена имеют вид:

Рис. 29

ω

L(ω)

+40 дБ/дек

ωс

+40

+20

 0

-20

-40

0.1 1 10 100

**Запаздывающее звено.** Дифференциальное уравнение и передаточная функция запаздывающего звена имеют вид:

(16)

 (17)

где τ – время запаздывания.

В соответствии с теоремой запаздывания . При этом переходная функция звена и его функция веса (рис. 30а, б) соответственно определяются соотношениями:



h(t)

k(t)

Рис. 30

Частотные характеристики звена (рис. 31а-в) определяются соотношениями:

 +

ω0ω

АЧХ

0

ω0ω

A(ω)

1

АФХ

+j

+

1

K(jω)

ФЧХ

0

ϕ(ω)

а) б) в)

Рис. 31

**Устойчивые и неустойчивые звенья.** В устойчивых звеньях переходный процесс является сходящимся, а в неустойчивых он расходится. Устойчивые звенья называются минимально – фазовыми. Эти звенья не содержат нулей и полюсов в правой полуплоскости корней. Неустойчивые звенья называются не минимально – фазовыми. Т. е. изменению амплитуды на ±20 дБ/дек соответствует изменение фазы на ±π/2, а ±40 дБ/дек – на ±π.

**Пример 1.** Построить частотные характеристики для звеньев

Для заданных передаточных функций звеньев, характеристики имеют вид (рис. 32):

h(t)

0 t

1(t)

0 t

h(t)

1(t)

ω=0 ω=∞ + t

K(jω)

+j

 ω=∞ ω=0 + t

K(jω)

+j

 ωc ω t

L(ω),ϕ(ω)

 0

-π/2

 -π

-3π/2

 ωc ω t

L(ω),ϕ(ω)

 0

-π/2

 -π

-3π/2

Рис. 32

**Идеальные и реальные звенья.** Идеальные звенья физически не реализуемы, реальные звенья содержат инерционности.

реальное интегрирующее звено;

 реальное дифференцирующее звено;

 реальное форсирующее звено.

АФХ этих звеньев имеют вид (рис. 33а-в):

K(jω)

+

K(jω)

ω=0 ω=∞ +

+j

+j

ω=0 ω=∞ +

K(jω)

а) б) в)

Рис. 33

+j

**Рассмотрим характеристики соединений звеньев и порядок построения логарифмических частотных характеристик соединений звеньев.**

1. Определяем, из каких элементарных звеньев состоит соединение.

2. Определяем сопрягающие частоты отдельных звеньев и откладываем их по оси частот в порядке возрастания.

3. Определяем наклон низкочастотной асимптоты, используя формулу [(λ-μ) 20] дБ/дек (где λ – количество дифференцирующих, а μ- интегрирующих звеньев) и проводим ее через соответствующую сопряженную частоту.

4. Последовательно сопрягая звенья, строим характеристику соединения.

**Пример 2.** Построить логарифмическую частотную характеристику соединения:

 0,1 1 10 ω [1/c]

+60

+40

+20

 0

-20

-40

-60

Рис. 34

-20

 0

 -20

L [дБ]

 **Решение:** Определяем со-прягающие частоты отде-льных звеньев и отклады-ваем их по оси частот в по-рядке возрастания.

Tинт = 0,01 с; ωинт = 100 с-1;

Tфор = 1 с; ωфор = 1 с-1;

Tап = 0,1 с; ωап = 10 с-1;

 Строим характеристику (рис. 34).

###### Пример 3. Построить логарифмическую частотную характеристику соединения

L [дБ]

 **Решение:** Определяем соп-рягающие частоты отдель-ных звеньев и откладываем их по оси частот в порядке возрастания.

Tинт = 0,1 с; ωинт = 10 с-1;

Tфор = 10 с; ωфор = 0,1 с-1;

Tк = 1 с;  ωк =1 с-1;

Tфор = 0,1 с; ωфор = 10 с-1;

Tфор = 0,01 с; ωфор= 100 с-1;

Строим характеристику рис. 35

-20

 0

 -20

 0 -20

+60

+40

+20

 0

-20

-40

-60

 0,1 1 10 ω [1/c]

Рис. 35

**Пример 4.** Построить АФХ соединения звеньев, передаточная функция которого имеет вид

**Решение:** Выполнив подстановку *p = jω* и умножив на комплексно сопряженное выражение, получим

Строим характеристику рис. 36.

##  АФХ

 +j

K(jω)

+

Рис. 36

**Литература**

1. Автоматизированное проектирование систем автоматического управления. / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1990. -332 с.
2. Бойко Н.П., Стеклов В.К. Системы автоматического управления на базе микро-ЭВМ. – К.: Тэхника, 1989. –182 с.
3. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов «Теория систем автоматического управления». Профессия, 2003 г. – 752 с.
4. Гринченко А.Г. Теория автоматического управления: Учебн. пособие. – Харьков: ХГПУ, 2000. –272 с.
5. Справочник по теории автоматического управления. /Под ред. А.А. Красовского – М.: Наука, 1987. – 712 с.