Гомельская научно - практическая конференция учащихся

по естественно - научным направлениям

"Поиск"

ГУО "Гимназия имени Я. Купалы"

Учебно-исследовательская работа

**"Удивительные числа"**

ученицы 5 "Г" класса

Гимназии имени Я. Купалы

г. Мозыря

Панглиш Ангелины Валерьевны

Научный руководитель−

учитель математики

II квалификационная категория

Борисевич Татьяна Александровна

2010

***Содержание***

Введение

Глава 1. О числе

Глава 2. Простые числа

2.1 Простые числа. Решето Эратосфена

2.2 Числа – близнецы

2.3 Проблема Гольдбаха

Глава 3.Фигурные числа

3.1 Фигурные числа

3.2 Многоугольные числа

Глава 4. Дружественные, совершенные, компанейские числа

4.1 Дружественные числа

4.2 Совершенные числа

4.3 Компанейские числа

Глава 5. Числовые суеверия и мистические представления чисел

5.1 Число зверя 666

5.2 Число Шахиризады

5.3 Число на гробнице

Заключение

Литература

***Введение***

Возникновение чисел в нашей жизни не случайность. Невозможно представить себе общение без использования чисел. История чисел увлекательна и загадочна. Человечеству удалось установить целый ряд законов и закономерностей мира чисел, разгадать кое-какие тайны и использовать свои открытия в повседневной жизни. Без замечательной науки о числах – математики – немыслимо сегодня ни прошлое, ни будущее. А сколько ещё неразгаданного!

"Самые древние по происхождению числа – натуральные. "Ручейки" натуральных чисел, сливаясь, порождают безбрежный океан вещественных и разного рода особых специальных чисел", так писал о числах Б.А.Кордемский в своей книге "Удивительный мир чисел".

Предметом моего исследования являются натуральные удивительные числа и их свойства.

Цель работы: как можно больше отыскать удивительных натуральных чисел, установить их свойства и закономерности.

Предлагаемая работа является результатом поиска удивительных и необычных чисел, проведенного по литературным источникам.

Основными методами исследования видов чисел являются изучение и обработка литературных источников, систематизация данных.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть основные этапы развития натуральных чисел.
2. Выделить интересные виды удивительных натуральных чисел: простые, числа - близнецы, фигурные, совершенные, дружественные и другие.
3. Установить целый ряд свойств, законов и закономерностей этих чисел.
4. Раскрыть таинственную магию и суеверие о некоторых числах.

***Глава 1. О числе***

Число является одним из основных понятий математики. Понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин; эта связь сохраняется и теперь.

Существует большое количество определений понятию "число". О числах первый начал рассуждать Пифагор. Пифагору принадлежит высказывание "Всё прекрасно благодаря числу". По его учению число 2 означало гармонию, 5 – цвет, 6 –холод, 7 – разум, здоровье, 8 –любовь и дружбу. А число 10 называли "священной четверицей", так как 10 = 1 + 2 + 3 + 4. Оно считалось священным числом и олицетворяла всю Вселенную.

Первое научное определение числа дал Эвклид в своих "Началах": "Единица есть то, в соответствии, с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц". Так определял понятие числа и русский математик Магницкий в своей "Арифметике" (1703 г.).

Считается, что термин "натуральное число" впервые применил римский государственный деятель, философ, автор трудов по математике и теории музыки Боэций (480 – 524 гг.), но еще греческий математик Никомах из Геразы говорил о натуральном, то есть природном ряде чисел.

Понятием "натуральное число" в современном его понимании последовательно пользовался выдающийся французский математик, философ-просветитель Даламбер (1717-1783 гг.).

Первоначальные представления о числе появились в эпоху каменного века, при переходе от простого собирания пищи к ее активному производству, примерно 100 веков до н. э. Числовые термины тяжело зарождались и медленно входили в употребление. Древнему человеку было далеко до абстрактного мышления, хватило того, что он придумал числа: "один" и "два". Остальные количества для него оставались неопределенными и объединялись в понятии "много". Росло производство пищи, добавлялись объекты, которые требовалось учитывать в повседневной жизни, в связи, с чем придумывались новые числа: "три", "четыре"… Долгое время пределом познания было число "семь".

О непонятном говорили, что эта книжка "за семью печатями", знахарки в сказках давали больному "семь узелков с лекарственными травами, которые надо было настоять на семи водах в течение семи дней и принимать каждодневно по семь ложек".

Познаваемый мир усложнялся, требовались новые числа. Так дошли до нового предела. Им стало число 40. Запредельные количества моделировались громадным по тем временам числом "сорок сороков", равным 1600.

Большой интерес вызывает история числа "шестьдесят", которое часто фигурирует в вавилонских, персидских и греческих легендах как синоним большого числа. Вавилоняне считали его Божьим числом: шестьдесят локтей в высоту имел золотой идол из храма вавилонского царя Навуходоносора. Позже с тем же самым значением (неисчислимое множество) возникли числа, кратные 60: 300, 360. Со временем число 60 в Вавилоне легло в основу шестидесятеричной системы исчисления, следы которой сохранились до наших дней при измерении времени и углов.

Следующим пределом у славянского народа было число "тьма", (у древних греков – мириада), равное 10 000, а запределом – "тьма тьмущая", равное 100 миллионам. У славян применяли также и иную систему исчисления (так называемое "большое число" или "большой счет").

В Античном мире дальше всех продвинулись Архимед (III в. до н.э.) в "исчислении песчинок" - до числа 10, возведенного в степень 8⋅1016 , и Зенон Элейский (IV в. до н. э.) в своих парадоксах – до бесконечности ∞.

Долго и трудно человечество добиралось до 1-го уровня обобщения чисел. Сто веков понадобилось, чтобы выстроить ряд самых коротких натуральных чисел от единицы до бесконечности:1, 2, … ∞ . Натуральных потому, что ими обозначались реальные неделимые объекты: люди, животные, вещи… Самое трудное было придумать нуль. Его придумали на много веков позже, чем другие цифры. Первая точно датированная запись, в которой встречается знак нуля, относится к 876 г.

***Глава 2. Простые числа***

**2.1 Простые числа. Решето Эратосфена**

Каждое натуральное число, большее единицы, делится, по крайней мере, на два числа: на 1 и на само себя. Если ни на какое другое натуральное число оно нацело не делится, то называется простым, а если у него имеются ещё какие-то целые делители, то составным. Единичка же не считается ни простым числом, ни составным.

Небольшую "коллекцию" простых чисел можно составить старинным способом, придуманный ещё в 3 в. до н. э. Эратосфеном Киренским, хранителем знаменитой Александрийской библиотеки.

Выпишем несколько подряд идущих чисел, начиная с 2. Двойку отберём в свою коллекцию, а остальные числа, кратные 2, зачеркнем. Ближайшим незачёркнутым числом будет 3. Возьмём в коллекцию и его, а все остальные числа, кратные 3, зачеркнем. При этом окажется, что некоторые числа уже были вычеркнуты раньше, как, например, 6, 12 и др. Следующее наименьшее незачёркнутое число – это 5. Берем пятерку, а остальные числа, кратные 5,зачеркиваем. Повторяя эту процедуру снова и снова, в конце концов добьемся того, что незачеркнутыми останутся одни лишь простые числа – они словно просеялись сквозь решето. Поэтому такой способ и получил название "решето Эратосфена".

Простых чисел бесконечное множество.

**2.2 Числа – близнецы**

Два простых числа, которые отличаются на 2, как 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, получили название "близнецы". В натуральном ряду имеется даже "тройня" - это числа 3, 5, 7. Ну а сколько всего существует близнецов - современной науке неизвестно.

В пределах первой сотни близнецы – это следующие пары чисел: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71,73). По мере удаления от нуля близнецов становится все меньше и меньше. Близнецы могут собираться в скопления, образуя четверки, например, (5, 7, 11, 13) или (11, 13, 17, 19). Как много таких скоплений – тоже пока неизвестно.

**2.3 Проблема Гольдбаха**

В 1742 г. член Петербургской Академии наук Гольдбах в письме к Эйлеру высказал предложение, что любое целое положительное число, большее пяти, представляет собой сумму не более чем трех простых чисел.

50 = 47 + 3, 46 = 43 + 3, 32 = 29 + 3.

Гольдбах испытал очень много чисел и ни разу не встретил такого числа, которое нельзя было бы разложить на сумму двух или трех простых слагаемых. Но будет ли так всегда, он не доказал. Долго ученые занимались этой задачей, которая названа "проблемой Гольдбаха" и сформулирована так, требуется доказать или опровергнуть предложение:

Всякое число, большее единицы, является суммой не более трех простых чисел.

Л. Эйлер ответил Х. Гольдбаху, что он высказывает (без доказательства) еще более интересную догадку: "Всякое четное натуральное число, большее двух, представляет собой сумму двух простых чисел".

12 = 5+ 7; 64 = 59 + 5 = 41 +23 = 47 +17; 28 = 11 + 17 = 23 + 5;

162 = 157 + 5 = 151 + 11 = 139 + 23 = 131 + 31.

Почти 200 лет выдающиеся ученые пытались разрешить проблему Гольдбаха – Эйлера, но безуспешно.

***Глава 3. Фигурные числа***

**3.1 Фигурные числа**

Давным-давно, помогая себе при счете камушками, люди обращали внимание на правильные фигуры, которые можно выложить из камушков. Можно просто класть камушки в ряд: один, два, три. Если класть их в два ряда, чтобы получались прямоугольники, то получаются все четные числа. Можно выкладывать камни в три ряда: получатся числа, делящиеся на три.

*Фигурные числа* — общее название чисел, связанных с той или иной геометрической фигурой.

Различают следующие виды фигурных чисел:

*Линейные числа* — числа, не разлагающиеся на множители, то есть их ряд совпадает с рядом простых чисел, дополненным единицей: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

*Плоские числа* — числа, представимые в виде произведения двух сомножителей, то есть составные: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, …

*Телесные числа* — числа, представимые произведением трёх сомножителей: 8, 12, 16, 18, 20, 24, 27, 28, …

**3.2 Многоугольные числа**

Выкладывая различные правильные многоугольники, можно получить разные классы *многоугольных чисел*. Предположительно от фигурных чисел возникло выражение: "Возвести число в квадрат или в куб".

Последовательность *треугольных чисел*: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 4 и т.д. (1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 1+2+3+4+5=15 и т. д.)

*Квадратные числа* представляют собой произведение двух одинаковых натуральных чисел, то есть являются полными квадратами: 1, 4, 9, 16, 25, 36, и т.д. (1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16).

*Пятиугольные числа* 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145

*Пирамидальные числа* возникают при складывании круглых камушков горкой так, чтобы они не раскатывались. Получается пирамида. Каждый слой в такой пирамиде - треугольное число. Наверху один камушек, под ним - 3, под теми - 6 и т.д.: 1, 1+3=4, 1+3+6=10, 1+3+6+10=20, ...

*Кубические числа* возникают при складывании кубиков: 1, 2·2·2=8, 3·3·3=27, 4·4·4=64, 5·5·5=125... и так далее.

***Глава 4. Дружественные, совершенные, компанейские числа***

**4.1 Дружественные числа**

Дружественные числа – это два натуральных числа, для которых сумма всех делителей первого числа (кроме него самого) равна второму числу и сумма всех делителей второго числа (кроме него самого) равна первому числу. По свидетельству античного философа Ямвлиха, великий Пифагор на вопрос, кого считать своим другом, ответил: "Того, кто является моим вторым Я, как числа 220 и 284".

История дружественных чисел теряется в глубине веков. Эти удивительные числа были открыты последователями Пифагора. Правда пифагорейцы знали только одну пару дружественных чисел – 220 и 284. Проверим эту пару чисел на свойство дружественных чисел:

1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284,

1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.

Долго считалось, что следующую пару дружественных чисел 17296 и 18416 открыл в 1636 году знаменитый французский математик Пьер Ферма. Но недавно в одном из трактатов арабского ученого Ибн аль-Банны (1256-1321) были найдены строки: "Числа 17296 и 18416 являются дружественными. Аллах всеведущ".

А задолго до Ибн аль-Банны другой арабский математик абу-Хасан Сабит ибн Курра (836-901) сформулировал правило, по которому можно получить некоторые дружественные числа:

если для некоторого n числа p=3·2n-1-1, q=3·2n-1 и r=9·22n-1-1 простые, то числа A=2npq и B=2nr - дружественные.

При n=2, числа p=5, q=11, r=71 простые, и получается пара чисел Пифагора: 220 и 284.

При n=4, числа p=23, q=47, r=1151 простые, и получается пара чисел Ибн аль-Банны и Ферма 17296 и 18416.

При n=7 получается пара чисел, найденная в 1638 году французским математиком и философом Рене Декартом.

После Декарта первым получил новые дружественные числа Леонард Эйлер. Он открыл 59 пар дружественных чисел, среди которых были и нечетные числа, например, 9773505 и 11791935. Он предложил пять способов отыскания дружественных чисел. Эту работу продолжили математики следующих поколений. В настоящее время известно около 1100 пар дружественных чисел. В 1867 году шестнадцатилетний итальянец Никколо Паганини потряс математический мир сообщением о том, что числа 1184 и 1210 дружественные! Эту пару, ближайшую к 220 и 284, проглядели все знаменитые математики, изучавшие дружественные числа.

Пару чисел 220 и 284 стали считать символом дружбы. В Средние века имели хождение талисманы с выгравированными на них числами 220 и 284, якобы способствующими укреплению любви.

Дружественные числа продолжают скрывать множество тайн. Например, есть ли пары, в которых одно число четное, а другое - нечетное? Конечно или бесконечно число пар дружественных чисел? Существует ли общая формула, позволяющая описать все пары дружественных чисел?

**4.2 Совершенные числа**

Иногда частным случаем дружественных чисел считаются совершенные числа: каждое совершенное число дружественно себе. Никомах Герасский, знаменитый философ и математик, писал: " Совершенные числа красивы. Но известно, что вещи редки и немногочисленны, безобразные встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными являются почти все числа, в то время как совершенных чисел немного" Но, сколько их, Никомах, живший в первом столетии нашей эры не знал.

Совершенным называется число, равное сумме всех своих делителей (включая 1, но исключая само число).

Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число "6". На шестом месте на званном пиру возлежал самый уважаемый, самый почетный гость. В библейских преданиях утверждается, что мир был создан в шесть дней, ведь более совершенного числа, среди совершенных чисел, чем "6", нет, поскольку оно первое среди них.

Рассмотрим число 6. Число имеет делители 1, 2, 3 и само число 6. Если сложить делители, отличные от самого числа 1 + 2 + 3 то мы получим 6. Значит, число 6 дружественно самому себе и является первым совершенным числом.

Следующим совершенным числом, известным древним, было "28". Мартин Гарднер усматривал в этом числе особый смысл. По его мнению, Луна обновляется за 28 суток, потому что число "28" – совершенное. В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала расположены двадцать восемь келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было двадцать восемь членов. До последнего времени столько же членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах. До Евклида были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли другие совершенные числа и сколько таких чисел вообще может быть.

Благодаря своей формуле, Евклид сумел найти еще два совершенных числа: 496 и 8128.

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа, и никто не знал, могут ли существовать еще числа, которые можно представить в евклидовской формуле, и никто не мог сказать, возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие формуле Евклида.

Формула Евклида позволяет без труда доказывать многочисленные свойства совершенных чисел.

– Все совершенные числа треугольные. Это значит, что, взяв совершенные число шаров, мы всегда сможем сложить из них равносторонний треугольник.

– Все совершенные числа, кроме 6, можно представить в виде частичных сумм ряда кубов последовательных нечетных чисел 13 + 33 + 53…

– Сумма обратных всем делителям совершенного числа, включая его самого, всегда равна 2.

Кроме того, совершенство чисел тесно связано с двоичностью. Числа: 4=2⋅2, 8 = 2· 2· 2, 16 = 2 · 2 · 2 · 2 и т.д. называются степенями числа 2 и могут быть представлены в виде 2n, где n – число перемноженных двоек. Все степени числа 2 чуть-чуть "не достают" до того, чтобы стать совершенными, так как сумма их делителей всегда на единицу меньше самого числа.

– Все совершенные числа (кроме 6) заканчиваются в десятичной записи на 16, 28, 36, 56, 76 или 96.

**4.3 Компанейские числа**

Понятия совершенных и дружественных чисел часто упоминаются в литературе по занимательной математике. Однако почему-то мало говорится о том, что числа могут дружить и компаниями. Понятие компанейских чисел хорошо раскрывается в англоязычных источниках.

Компанейскими называется такая группа из k чисел, в которых сумма собственных делителей первого числа равна второму, сумма собственных делителей второго – третьему и т.д. А первое число равно сумме собственных делителей k-го числа.

Есть компании по 4, 5, 6, 8, 9 и даже 28 участников, а вот по три не найдено. Пример пятёрки, пока единственной известной: 12496, 14288, 15472, 14536, 14264.

**Глава 5. Числовые суеверия и мистические представления чисел**

**5.1 Число зверя 666**

Число зверя 666— число Смита, сумма его цифр равна сумме цифр его простых сомножителей: 2 + 3 + 3 + (3 + 7) = 6 + 6 + 6 = 18.

666 является суммой квадратов первых семи простых чисел:

22 + 32 + 52 + 72 + 112 + 132 + 172 = 666.

666 равно разности и сумме шестых степеней первых трёх натуральных: 16 − 26 + 36 = 666.

666 равно сумме своих цифр и кубов своих цифр:

6 + 6 + 6 + 63 + 63 + 63 = 666.

666 можно записать девятью различными цифрами двумя способами в их возрастающем порядке и одним в убывающем:

1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 666

123 + 456 + 78 + 9 = 666

9 + 87 + 6 + 543 + 21 = 666

Сумма всех целых от 1 до 36 включительно — 666. Это означает, что 666 — это 36-е треугольное число.

**5.2 Число Шахиризады**

Число Шахиризады - число 1001, которое фигурирует в заглавии бессмертных сказок "Тысяча и одна ночь". С точки зрения математики число 1001 обладает целым рядом интереснейших свойств: это самое маленькое натуральное четырёхзначное число, которое можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел:1001=103+13; число 1001 состоит из 77 злополучных чертовых дюжин (1001=13· 77); или из 91 числа 11, или из 143 семёрок; далее, если будем считать, что год равняется 52 неделям, то 1001 - количество ночей в течение 1+ 1+ + года или по- другому: 1001= 52 · 7 +26 . 7+13· 7. В числе Шахиризады литература переплетается с математикой.

**5.3 Число на гробнице**

В одной из египетских пирамид ученые обнаружили на каменной плите гробницы выгравированное иероглифами число 2520. трудно точно сказать, за что выпала такая честь на долю этого числа. Может быть, за то, что оно без остатка делится на все без исключения целые числа от 1 до 10. действительно, нет числа, меньшего, чем 2520, обладающего указанным свойством. Нетрудно убедится в том, что это число является наименьшим общим кратным целых чисел первого десятка. Это минимальное число, которое делится без остатка на 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

**Заключение**

Среди всех интересных натуральных чисел, издавна изучаемых математиками, особое место занимают совершенные и близко связанные с ними дружественные числа.

Из огромного многообразия натуральных чисел ученые выделили дружественные и совершенные числа, обладающие рядом очень интересных свойств.

Анализируя научно-популярную литературу о совершенных и дружественных чисел, можно убедиться, что формулы общего вида для нахождения всех пар дружественных, совершенных чисел не существует. Вопрос о существовании: бесконечности множества четных совершенных чисел, нечетного совершенного числа, четно-нечетной пары дружественных чисел и взаимно простых дружественных чисел открыт до сих пор.

Причем нередко одно и тоже открытие происходило в разных точках земного шара, довольно часто повторялось несколько раз, совершенствовалось, а позже распространялось и становилось достоянием всех народов. Математика невольно связывает единой нитью народы мира. Она заставляет их сотрудничать и общаться между собой.

Мир полон тайн и загадок. Но разгадать их могут только пытливые.

Современная наука встречается с величинами такой сложной природы, что для их изучения приходится изобретать все новые виды чисел. И мне бы хотелось продолжить изучение чисел, ведь я только знаю натуральные числа.

**Литература**

1. Я. Познаю мир. Детская энциклопедия: Математика/ Я 11 Авт.-сост. А.П. Савин и др.: - М.: ООО "Издательство АСТ", 2001.

2. Г.И.Гейзер. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.

3. Г.Н.Берман Число и наука о нем. Общедоступные очерки. Москва: Гос. издание технико – технической литературы 1984.

4. И. Депман. Мир чисел. Рассказы о математике. Ленинград "Детская литература" 1988.

5. Я.И. Перельман. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. М: Триада – литера 1994.

6. И.Я.Депман. Н.Я.Виленкин. За страницами учебника математики. Пособие для учащихся 5-6 классов. Издательство"Просвещение" 1989.

7. Е.Карпеченко Тайны чисел .Математика /Прил. К газете "Первое сентября" №13 2007.

8. А.Н.Крылов.Числа и меры. Математика/ Прил. К газете "Первое сентября"№7 1994

9. Internet ресурсы