**Министерство общего и профессионального образования РФ**

**Муниципальное образовательное учреждение**

**Гимназия № 12**

**сочинение**

**на тему: Уравнения и способы их решения**

Выполнил: ученик 10 "А" класса

Крутько Евгений

Проверила: учитель математики Исхакова Гульсум Акрамовна

**Тюмень 2001**

**Содержание**

План 1

Введение 2

Основная часть 3

Заключение 25

Приложение 26

Список использованной литературы 29

**План.**

Введение.

Историческая справка.

Уравнения. Алгебраически уравнения.

а) Основные определения.

б) Линейное уравненение и способ его решения.

в) Квадратные уравнения и способы его решения.

г) Двучленные уравнения способ их решения.

д) Кубические уравнения и способы его решения.

е) Биквадратное уравнение и способ его решения.

ё) Уравнения четвертой степени и способы его решения.

ж) Уравнения высоких степеней и способы из решения.

з) Рациональноное алгебраическое уравнение и способ его

решения.

и) Иррациональные уравнения и способы его решения.

к) Уравнения, содержащие неизвестное под знаком.

абсолютной величины и способ его решения.

Трансцендентные уравнения.

а) Показательные уравнения и способ их решения.

б) Логарифмические уравнения и способ их решения.

**Введение**

Математическое образование, получаемое в общеобразовательной школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека. Практически все, что окружает современного человека – это все так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Поэтому решение многих практических задач сводится к решению различных видов уравнений, которые необходимо научиться решать.

Данная работа является попыткой обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме. Я расположил материал по степени его сложности, начиная с самого простого. В него вошли как известные нам виды уравнений из школьного курс алгебры, так и дополнительный материал. При этом я попытался показать виды уравнений, которые не изучаются в школьном курсе, но знание которых может понадобиться при поступлении в высшее учебное заведение. В своей работе при решении уравнений я не стал ограничиваться только действительным решением, но и указал комплексное, так как считаю, что иначе уравнение просто недорешено. Ведь если в уравнении нет действительных корней, то это еще не значит, что оно не имеет решений. К сожалению, из-за нехватки времени я не смог изложить весь имеющийся у меня материал, но даже по тому материалу, который здесь изложен, может возникнуть множество вопросов. Я надеюсь, что моих знаний хватит для того, чтобы дать ответ на большинство вопросов. Итак, я приступаю к изложению материала.

Математика... выявляет порядок,

симметрию и определенность,

а это – важнейшие виды прекрасного.

Аристотель.

**Историческая справка**

В те далекие времена, когда мудрецы впервые стали задумываться о равенствах содержащих неизвестные величины, наверное, еще не было ни монет, ни кошельков. Но зато были кучи, а также горшки, корзины, которые прекрасно подходили на роль тайников-хранилищ, вмещающих неизвестное количество предметов. "Ищется куча, которая вместе с двумя третями ее, половиной и одной седьмой составляет 37...", - поучал во II тысячелетии до новой эры египетский писец Ахмес. В древних математических задачах Междуречья, Индии, Китая, Греции неизвестные величины выражали число павлинов в саду, количество быков в стаде, совокупность вещей, учитываемых при разделе имущества. Хорошо обученные науке счета писцы, чиновники и посвященные в тайные знания жрецы довольно успешно справлялись с такими задачами.

Дошедшие до нас источники свидетельствуют, что древние ученые владели какими-то общими приемами решения задач с неизвестными величинами. Однако ни в одном папирусе, ни в одной глиняной табличке не дано описания этих приемов. Авторы лишь изредка снабжали свои числовые выкладки скупыми комментариями типа: "Смотри!", "Делай так!", "Ты правильно нашел". В этом смысле исключением является "Арифметика" греческого математика Диофанта Александрийского (III в.) – собрание задач на составление уравнений с систематическим изложением их решений.

Однако первым руководством по решению задач, получившим широкую известность, стал труд багдадского ученого IX в. Мухаммеда бен Мусы аль-Хорезми. Слово "аль-джебр" из арабского названия этого трактата – "Китаб аль-джебер валь-мукабала" ("Книга о восстановлении и противопоставлении") – со временем превратилось в хорошо знакомое всем слово "алгебра", а само сочинение аль-Хорезми послужило отправной точкой в становлении науки о решении уравнений.

**уравнения. Алгебраические уравнения**

**Основные определения**

В алгебре рассматриваются два вида равенств – тождества и уравнения.

*Тождество* – это равенство, которое выполняется при всех (допустимых) значениях входящих в него букв [[1]](#footnote-1)). Для записи тождества наряду со знаком также используется знак .



*Уравнение* – это равенство, которое выполняется лишь при некоторых значениях входящих в него букв. Буквы, входящие в уравнение, по условию задачи могут быть неравноправны: одни могут принимать все свои допустимые значения (их называют *параметрами* или *коэффициентами* уравнения и обычно обозначают первыми буквами латинского алфавита:, , ... – или теми же буквами, снабженными индексами: , , ... или , , ...); другие, значения которых требуется отыскать, называют *неизвестными* (их обычно обозначают последними буквами латинского алфавита: , , , ... – или теми же буквами, снабженными индексами: , , ... или , , ...).



В общем виде уравнение может быть записано так:

(, , ..., ).



В зависимости от числа неизвестных уравнение называют уравнением с одним, двумя и т. д. неизвестными.

Значение неизвестных, обращающие уравнение в тождество, *называют решениями* уравнения.

Решить уравнение – это значит найти множество его решений или доказать, что решений нет. В зависимости от вида уравнения множество решений уравнения может быть бесконечным, конечным и пустым.

Если все решения уравнения являются решениями уравнения , то говорят, что уравнение есть следствие уравнения , и пишут



.



Два уравнения

и



называют *эквивалентными*, если каждое из них является следствие другого, и пишут

.



Таким образом, два уравнения считаются эквивалентными, если множество решений этих уравнений совпадают.

Уравнение считают эквивалентным двум (или нескольким) уравнениям , , если множество решений уравнения совпадает с объединением множеств решений уравнений , .



Н е к о т о р ы е э к в и в а л е н т н ы е у р а в н е н и я:

Уравнение эквивалентно уравнению , рассматриваемому на множестве допустимых значений искходного уравнения.



Уравнение эквивалентно уравнению , рассматриваемому на множестве допустимых значений искходного уравнения.



эквивалентно двум уравнениям и .



Уравнение эквивалентно уравнению .



Уравнение при нечетном n эквивалентно уравнению , а при четном n эквивалентно двум уравнениям и .



*Алгебраическим уравнением* называется уравнение вида

,



где – многочлен n-й степени от одной или нескольких переменных.



*Алгебраическим уравнением с одним неизвестным* называется уравнение, сводящееся к уравнению вида

++ ... ++,



где n – неотрицательное целое число; коэффициенты многочлена , , , ..., , называются *коэффициентами* (или *параметрами*) уравнения и считаются заданными; х называется *неизвестным* и является искомым. Число n называется *степенью* уравнения.



Значения неизвестного х, обращающие алгебраическое уравнение в тождество, называются *корнями* (реже *решениями*) алгебраического уравнения.

Есть несколько видов уравнений, которые решаются по готовым формулам. Это линейное и квадратное уравнения, а также уравнения вида F(х), где F – одна из стандартных функций (степенная или показательная функция, логарифм, синус, косинус, тангенс или котангенс). Такие уравнения считаются простейшими. Так же существуют формулы и для кубического уравнения, но его к простейшим не относят.



Так вот, главная задача при решении любого уравнения – свести его к простейшим.

Все ниже перечисленные уравнения имеют так же и свое графическое решение, которое заключается в том, чтобы представить левую и правую части уравнения как две одинаковые функции от неизвестного. Затем строится график сначала одной функции, а затем другой и точка(и) пересечения двух графиков даст решение(я) исходного уравнения. Примеры графического решения всех уравнений даны в приложении.

**Линейное уравнение**

*Линейным уравнением* называется уравнение первой степени.

, (1)



где a и b – некоторые действительные числа.

Линейное уравнение всегда имеет единственный корень , который находится следующим образом.



Прибавляя к обеим частям уравнения (1) число , получаем уравнение



, (2)



эквивалентное уравнению (1). Разделив обе части уравнения (2) на величину , получаем корень уравнения (1):



.



**Квадратное уравнение**

Алгебраическое уравнение второй степени.

, (3)



где , , – некоторые действительные числа, называется *квадратным уравнением*. Если , то квадратное уравнение (3) называется *приведенным*.



Корни квадратного уравнения вычисляются по формуле

,



Выражение называется *дискриминантом* квадратного уравнения.



При этом:

если , то уравнение имеет два различных действительных корня;



если , то уравнение имеет один действительный корень кратности 2;



если , то уравнение действительных корней не имеет, а имеет два комплексно сопряженных корня:



, ,



Частными видами квадратного уравнения (3) являются:

1) Приведенное квадратное уравнение (в случае, если ), которое обычно записывается в виде



.



Корни приведенного квадратного уравнения вычисляются по формуле

. (4)



Эту формулу называют формулой Виета – по имени французского математика конца XVI в., внесшего значительный вклад в становление алгебраической символики.

2) Квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом, которое обычно записывается в виде

( - целое число).



Корни этого квадратного уравнения удобно вычислять по формуле

. (5)



Формулы (4) и (5) являются частными видами формулы для вычисления корней полного квадратного уравнения.

Корни приведенного квадратного уравнения



связаны с его коэффициентами Формулами Виета

**,**



**.**



В случае, если приведенное квадратное уравнение имеет действительные корни, формулы Виета позволяют судить как о знаках, так и об относительной величине корней квадратного уравнения, а именно:

если , , то оба корня отрицательны;



если , , то оба корня положительны;



если , , то уравнение имеет корни разных знаков, причем отрицательный корень по абсолютной величине больше положительного;



если , , уравнение имеет корни разных знаков, причем отрицательный корень по абсолютной величине меньше положительного корня.



Перепишем еще раз квадратное уравнение

(6)



и покажем еще один способ как можно вывести корни квадратного уравнения (6) через его коэффициенты и свободный член. Если

++, (7)



то корни квадратного уравнения вычисляются по формуле

,



откуда

**, .**



которая может быть получена в результате следующих преобразований исходного уравнения, а так же с учетом формулы (7).

,



Заметим, что , поэтому



,



откуда

**.**



,



но , из формулы (7) поэтому окончательно



.



Если положить, что +, то



,



Заметим, что , поэтому



,



откуда

,



но , поэтому окончательно



.



и

.



**Двучленные уравнения**

Уравнения n-й степени вида

(8)



называется *двучленным уравнением*. При и заменой [[2]](#footnote-2))



,



где - арифметическое значение корня, уравнение (8) приводится к уравнению



,



которое и будет далее рассматриваться.

Двучленное уравнение при нечетном n имеет один действительный корень . В множестве комплексных чисел это уравнение имеет n корней (из которых один действительный и комплексных):



( 0, 1, 2, ..., ). (9)



Двучленное уравнение при четном n в множестве действительных чисел имеет два корня , а в множестве комплексных чисел n корней, вычисляемых по формуле (9).



Двучленное уравнение при четном n имеет один действительный корней , а в множестве комплексных чисел корней, вычисляемых по формуле



( 0, 1, 2, ..., ). (10)



Двучленное уравнение при четном n имеет действительный корней не имеет. В множестве комплексных чисел уравнение имеет корней, вычисляемых по формуле (10).



Приведем краткую сводку множеств корней двучленного уравнения для некоторых конкретных значений n.

1) ().



Уравнение имеет два действительных корня .



2) ().



Уравнение имеет один дествительный корень и два комплексных корня



.



3) ().



Уравнение имеет два действительных корния и два комплексных корня .



4) ().



Уравнение действительных корней не имеет. Комплексные корни: .



5) ().



Уравнение имеет один дествительный корень и два комплексных корня



.



6) ().



Уравнение действительных корней не имеет. Комплексные корни:

, .



**Кубические уравнения**

Если квадратные уравнения умели решать еще математики Вавилонии и Древней Индии, то кубические, т.е. уравнения вида

, где ,



оказались "крепким орешком". В конце XV в. профессор математики в университетах Рима и Милана Лука Пачоли в своем знаменитом учебнике "Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности" задачу о нахождении общего метода для решения кубических уравнений ставил в один ряд с задачей о квадратуре круга. И все же усилиями итальянских алгебраистов такой метод вскоре был найден.

**Начнем с упрощения**

Если кубическое уравнение общего вида

, где ,



разделить на , то коэффициент при станет равен 1. Поэтому в дальнейшем будем исходить из уравнения



. (11)



Так же как в основе решения квадратного уравнения лежит формула квадрата суммы, решение кубического уравнения опирается на формулу куба суммы:



Чтобы не путаться в коэффициентах, заменим здесь на и перегруппируем слагаемые:



. (12)



Мы видим, что надлежащим выбором , а именно взяв , можно добиться того, что правая часть этой формулы будет отличаться от левой части уравнения (11) только коэффициентом при и свободным членом. Сложим уравнения (11) и (12) и приведем подобные:



.



Если здесь сделать замену , получим кубическое уравнение относительно без члена с :



.



Итак, мы показали, что в кубическом уравнении (11) с помощью подходящей подстановки можно избавиться от члена, содержащего квадрат неизвестного. Поэтому теперь будем решать уравнение вида

. (13)



**Формула Кардано**

Давайте еще раз обратимся к формуле куба суммы, но запишем ее иначе:

.



Сравните эту запись с уравнением (13) и попробуйте установить связь между ними. Даже с подсказкой это непросто. Надо отдать должное математикам эпохи Возрождения, решившим кубическое уравнение, не владея буквенной символикой. Подставим в нашу формулу :



, или



.



Теперь уже ясно: для того, чтобы найти корень уравнения (13), достаточно решить систему уравнений

или



и взять в качестве сумму и . Заменой , эта система приводится к совсем простому виду:



Дальше можно действовать по-разному, но все "дороги" приведут к одному и тому же квадратному уравнению. Например, согласно теореме Виета, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при со знаком минус, а произведение – свободному члену. Отсюда следует, что и - корни уравнения



.



Выпишем эти корни:



Переменные и равны кубическим корням из и , а искомое решение кубического уравнения (13) – сумма этих корней:



.



Эта формула известная как *формула Кардано*.

**Тригонометрическое решение**



подстановкой приводится к "неполному" виду



, , . (14)



Корни , , "неполного" кубичного уравнения (14) равны



, ,



где

, ,



.



Пусть "неполное" кубичное уравнение (14) действительно.

а) Если ("неприводимый" случай), то и



,



,



где

.



(b) Если , , то



, ,



где

, .



(с) Если , , то



, ,



где

, .



Во всех случаях берется действительное значение кубичного корня.

**Биквадратное уравнение**

Алгебраическое уравнение четвертой степени.

,



где a, b, c – некоторые действительные числа, называется *биквадратным уравнением*. Заменой уравнение сводится к квадратному уравнению с последующим решением двух двучленных уравнений и ( и - корни соответствующего квадратного уравнения).



Если и , то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня:



, .



Если , [[3]](#footnote-3)), то биквадратное уравнение имеет два действительных корня и мнимых сопряженных корня:



.



Если и , то биквадратное уравнение имеет четыре чисто мнимых попарно сопряженных корня:



, .



**Уравнения четвертой степени**

Метод решения уравнений четвертой степени нашел в XVI в. Лудовико Феррари, ученик Джероламо Кардано. Он так и называется – метод *Феррари*.

Как и при решении кубического и квадратного уравнений, в уравнении четвертой степени



можно избавиться от члена подстановкой . Поэтому будем считать, что коэффициент при кубе неизвестного равен нулю:



.



Идея Феррари состояла в том, чтобы представить уравнение в виде , где левая часть – квадрат выражения , а правая часть – квадрат линейного уравнения от , коэффициенты которого зависят от . После этого останется решить два квадратных уравнения: и . Конечно, такое представление возможно только при специальном выборе параметра . Удобно взять в виде , тогда уравнение перепишется так:



. (15)



Правая часть этого уравнения – квадратный трехчлен от . Полным квадратом он будет тогда, когда его дискриминант равен нулю, т.е.



, или



.



Это уравнение называется *резольвентным* (т.е. "разрешающим"). Относительно оно кубическое, и формула Кардано позволяет найти какой-нибудь его корень . При правая часть уравнения (15) принимает вид



,



а само уравнение сводится к двум квадратным:

.



Их корни и дают все решения исходного уравнения.

Решим для примера уравнение

.



Здесь удобнее будет воспользоваться не готовыми формулами, а самой идеей решения. Перепишем уравнение в виде



и добавим к обеим частям выражение , чтобы в левой части образовался полный квадрат:



.



Теперь приравняем к нулю дискриминант правой части уравнения:

,



или, после упрощения,

.



Один из корней полученного уравнения можно угадать, перебрав делители свободного члена: . После подстановки этого значения получим уравнение



,



откуда . Корни образовавшихся квадратных уравнений - и . Разумеется, в общем случае могут получиться и комплексные корни.



**Решение Декарта-Эйлера**



подстановкой приводится к "неполному" виду



. (16)



Корни , , , "неполного" уравнения четвертой степени (16) равны одному из выражений



,



в которых сочетания знаков выбираются так, чтобы удовлетворялось условие

,



причем , и - корни кубичного уравнения



.



**Уравнения высоких степеней**

**Разрешимость в радикалах**

Формула корней квадратного уравнения известна с незапамятных времен, а в XVI в. итальянские алгебраисты решили в радикалах уравнения третьей и четвертой степеней. Таким образом, было установлено, что корни любого уравнения не выше четвертой степени выражаются через коэффициенты уравнения формулой, в которой используются только четыре арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление) и извлечение корней степени, не превышающей степень уравнения. Более того, все уравнения данной степени () можно "обслужить" одной общей формулой. При подстановке в нее коэффициентов уравнения получим все корни – и действительные, и комплексные.



После этого естественно возник вопрос: а есть ли похожие общие формулы для решения уравнений пятой степени и выше Ответ на него смог найти норвежский математик Нильс Хенрик Абель в начале XIX в. Чуть раньше этот результат был указан, но недостаточно обоснован итальянцем Паоло Руффини. Теорема Абеля-Руффини звучит так:

**Общее уравнение степени при неразрешимо в радикалах.**



Таким образом, общей формулы, применимой ко всем уравнениям данной степени , не существует. Однако это не значит, что невозможно решить в радикалах те или иные частные виды уравнений высоких степеней. Сам Абель нашел такое решение для широкого класса уравнений произвольно высокой степени – так называемых абелевых уравнений. Теорема Абеля-Руффини не исключает даже и того, что корни каждого конкретного алгебраического уравнения можно записать через его коэффициенты с помощью знаков арифметических операций и радикалов, в частности, что любое алгебраическое число, т.е. корень уравнения вида



, ,



с целыми коэффициентами, можно выразить в радикалах через рациональные числа. На самом деле такое выражение существует далеко не всегда. Это следует из теоремы разрешимости алгебраических уравнений, построенной выдающимся французским математиком Эваристом Галуа в его "Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах" (1832 г.; опубликован в 1846 г.).

Подчеркнем, что в прикладных задачах нас интересует только приближенные значения корней уравнения. Поэтому его разрешимость в радикалах здесь обычно роли не играет. Имеются специальные вычислительные методы, позволяющие найти корни любого уравнения с любой наперед заданной точностью, ничуть не меньшей, чем дают вычисления по готовым формулам.

**Уравнения, которые решаются**

Хотят уравнения высоких степеней в общем случае неразрешимы в радикалах, да и формулы Кардано и Феррари для уравнений третьей и четвертой степеней в школе не проходят, в учебниках по алгебре, на вступительных экзаменах в институты иногда встречаются задачи, где требуется решить уравнения выше второй степени. Обычно их специально подбирают так, чтобы корни уравнений можно было найти с помощью некоторых элементарных приемов.

В основе одного из таких приемов лежит теорема о рациональных корнях многочлена:

**Если несократимая дробь является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то ее числитель является делителем свободного члена , а знаменатель - делителем старшего коэффициента .**



Для доказательства достаточно подставить в уравнение и умножить уравнение на . Получим



.



Все слагаемые в левой части, кроме последнего, делятся на , поэтому и делится на , а поскольку и - взаимно простые числа, является делителем . Доказательство для аналогично.



С помощью этой теоремы можно найти все рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами испытанием конечного числа "кандидатов". Например, для уравнения

,



старший коэффициент которого равен 1, "кандидатами" будут делители числа –2. Их всего четыре: 1, -1, 2 и –2. Проверка показывает, что корнем является только одно из этих чисел: .



Если один корень найден, можно понизить степень уравнения. Согласно теореме Безу,

**остаток от деления многочлена на двучлен равен , т. е. .**



Из теоремы непосредственно следует, что

**Если - корень многочлена , то многочлен делится на , т. е. , где - многочлен степени, на 1 меньшей, чем .**



Продолжая наш пример, вынесем из многочлена



множитель . Чтобы найти частное , можно выполнить деление "уголком":



0

Но есть и более простой способ. Он станет понятен из примера:

Теперь остается решить квадратное уравнение . Его корни:



.



**Метод неопределенных коэффициентов**

Если у многочлена с целыми коэффициентами рациональных корней не оказалось, можно попробовать разложить его на множители меньшей степени с целыми коэффициентами. Рассмотрим, например, уравнение

.



Представим левую часть в виде произведения двух квадратных трехчленов с неизвестными (неопределенными) коэффициентами:

.



Раскроем скобки в правой части и приведем подобные:

.



Теперь, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях, получим систему уравнений



Попытка решить эту систему в общем виде вернула бы нас назад, к решению исходного уравнения. Но целые корни, если они существуют, нетрудно найти и подбором. Не ограничивая общности, можно считать, что , тогда последнее уравнение показывает, что надо рассмотреть лишь два варианта: , и . Подставляя эти пары значений в остальные уравнения, убеждаемся, что первая из них дает искомое разложение: . Этот способ решения называется *методом неопределенных коэффициентов*.



Если уравнение имеет вид , где и - многочлены, то замена сводит его решение к решению двух уравнений меньших степеней: и .



**Возвратные уравнения**

Возвратным алгебраическим уравнением называется уравнение четной степени вида

,



в которых коэффициенты, одинаково отстоят от концов, равны: , и т. д. Такое уравнение сводится к уравнению вдвое меньшей степени делением на и последующей заменой .



Рассмотрим, например, уравнение

.



Поделив его на (что законно, так как не является корнем), получаем



.



Заметим, что

.



Поэтому величина удовлетворяет квадратному уравнению



,



решив которое можно найти из уравнения .



При решении возвратных уравнений более высоких степеней обычно используют тот факт, что выражение при любом можно представить как многочлен степени от .



**Рациональные алгебраические уравнения**

*Рациональным* алгебраическим уравнением называется уравнение вида

, (17)



где и - многочлены. Далее для определенности будем полагать, что - многочлен m-й степени, а - многочлен n-й степени.



Множество допустимых значений рационального алгебраического уравнения (17)

задается условием , т. е. , , ..., где , , ..., - корни многочлена .



Метод решения уравнения (17) заключается в следующем. Решаем уравнение

,



корни которого обозначим через

.



Сравниваем множества корней многочленов и . Если никакой корень многочлена не является корнем многочлена , то все корни многочлена являются корнями уравнения (17). Если какой-нибудь корень многочлена является корнем многочлена, то необходимо сравнить из кратности: если кратность корня многочлена больше кратности корня многочлена , то этот корень является корнем (17) с кратностью, равной разности кратностей корней делимого и делителя; в противном случае корень многочлена не является корнем рационального уравнения (17).



П р и м е р. Найдем действительные корни уравнения

,



где , .



Многочлен имеет два действительных корня (оба простые):



, .



Многочлен имеет один простой корень . Следовательно, уравнение имеет один действительный корень .



Решая то же самое уравнение в множестве комплексных чисел, получим, что уравнение имеет, кроме указанного действительного корня, два комплексно сопряженных корня:



, .



**Иррациональные уравнения**

Уравнение, содержащее неизвестное (либо рациональное алгебраическое выражение от неизвестного) под знаком радикала, называют *иррациональным уравнением*. В элементарной математике решения иррациональных уравнений отыскивается в множестве действительных чисел.

Всякое иррациональное уравнение с помощью элементарных алгебраических операций (умножение, деление, возведение в целую степень обеих частей уравнения) может быть сведено к рациональному алгебраическому уравнению. При этом следует иметь в виду, что полученное рациональное алгебраическое уравнение может оказаться неэквивалентным исходному иррациональному уравнению, а именно может содержать "лишние" корни, которые не будут корнями исходного иррационального уравнения. Поэтому, найдя корни полученного рационального алгебраического уравнения, необходимо проверить, а будут ли все корни рационального уравнения корнями иррационального уравнения.

В общем случае трудно указать какой-либо универсальный метод решения любого иррационального уравнения, так как желательно, чтобы в результате преобразований исходного иррационального уравнения получилось не просто какое-то рациональное алгебраическое уравнение, среди корней которого будут и корни данного иррационального уравнения, а рациональное алгебраическое уравнение образованное из многочленов как можно меньшей степени. Желание получить то рациональное алгебраическое уравнение, образованное из многочленов как можно меньшей степени, вполне естественно, так как нахождение всех корней рационального алгебраического уравнения само по себе может оказаться довольно трудной задачей, решить которую полностью мы можем лишь в весьма ограниченном числе случаев.

Приведем некоторые стандартные, наиболее часто применяемые методы решения иррациональных алгебраических уравнений.

1) Одним из самых простых приемов решения иррациональных уравнений является метод освобождения от радикалов путем последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую натуральную степень. При этом следует иметь в виду, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень полученное уравнение, эквивалентное исходному, а при возведении обеих частей уравнения в четную степень полученное уравнение будет, вообще говоря, неэквивалентным исходному уравнению. В этом легко убедиться, возведя обе части уравнения



в любую четную степень. В результате этой операции получается уравнение



множество решений которого представляет собой объединение множеств решений:

и .



Однако, несмотря на этот недостаток, именно процедура возведения обеих частей уравнения в некоторую (часто четную) степень является самой распространенной процедурой сведения иррационального уравнения к рациональному уравнению.

П р и м е р 1. Решить уравнение

, (18)



где , , - некоторые многочлены.



В силу определения операции извлечения корня в множестве действительных чисел допустимые значения неизвестного определяются условиями



, .



Возведя обе части уравнения (18) в квадрат, получим уравнение

.



После повторного возведения в квадрат уравнение превращается в алгебраическое уравнение

. (19)



Так как обе части уравнения (18) возводились в квадрат, может оказаться, что не все корни уравнения (19) будет являться решениями исходного уравнения, необходима проверка корней.

2) Другим примером решения иррациональных уравнений является способ введения новых неизвестных, относительно которых получается либо более простое иррациональное уравнение, либо рациональное уравнение.

П р и м е р 2. Решить иррациональное уравнение

.



Множество допустимых значений этого уравнения:

.



Положив , после подстановки получим уравнение



или эквивалентное ему уравнение

,



которое можно рассматривать как квадратное уравнение относительно . Решая это уравнение, получим



, .



Следовательно, множество решений исходного иррационального уравнения представляет собой объединение множеств решений следующих двух уравнений:

, .



Возведя обе части каждого из этих уравнений в куб, получим два рациональных алгебраических уравнения:

, .



Решая эти уравнения, находим, что данное иррациональное уравнение имеет единственный корень .



В заключение заметим, что при решении иррациональных уравнений не следует начинать решение уравнение с возведения обеих частей уравнений в натуральную степень, пытаясь свести решение иррационального уравнения к решению рационального алгебраического уравнения. Сначала необходимо посмотреть, нельзя ли сделать какое-нибудь тождественное преобразование уравнения, которое может существенно упростить его решение.

П р и м е р 3. Решить уравнение

. (20)



Множество допустимых значений данного уравнения: . Сделаем следующие преобразования данного уравнения:



.



Далее, записывая уравнение в виде

,



получим:

при уравнение решений иметь не будет;



при уравнение может быть записано в виде



.



При данное уравнение решений не имеет, так как при любом , принадлежащем множеству допустимых значений уравнения, выражение, стоящее в левой части уравнения, положительно.



При уравнение имеет решение



.



Принимая во внимание, что множество допустимых решений уравнения определяется условием , получаем окончательно:



При решением иррационального уравнения (20) будет



.



При всех остальных значениях уравнение решений не имеет, т. е. множество его решений – пустое множество.



**Уравнения, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины**

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины, можно свести к уравнениям, не содержащим знака абсолютной величины, используя определение модуля. Так, например, решение уравнения

(21)



сводится к решению двух уравнений с дополнительными условиями.

1) Если , то уравнение (21) приводится к виду



. (22)



Решения этого уравнения: , . Условию удовлетворяет второй корень квадратного уравнения (22), и число 3 является корнем уравнения (21).



2) Если , уравнение (21) приводится к виду



.



Корнями этого уравнения будут числа и . Первый корень не удовлетворяет условию и поэтому не является решением данного уравнения (21).



Таким образом, решениями уравнения (21) будут числа 3 и .



Заметим, что коэффициенты уравнения, содержащего неизвестное под знаком абсолютной величины, можно подобрать таким образом, что решениями уравнения будут все значения неизвестного, принадлежащие некоторому промежутку числовой оси. Например, решим уравнение

. (23)



Рассмотрим числовую ось Ох и отметим на ней точки 0 и 3 (ноли функций, стоящих под знаком абсолютной величины). Эти точки разобьют числовую ось на три промежутка (рис. 1):

, , .



0 3 x

рис. 1.

1) При уравнение (23) приводится к виду



.



В промежутке последнее уравнение решений не имеет.



Аналогично, при уравнение (23) приводится к виду



и в промежутке решений не имеет.



2) При уравнение (23) приводится к виду



,



т. е. обращается в тождество. Следовательно, любое значение является решением уравнения (23).



**Трансцендентные уравнения**

Уравнение, не сводящееся к алгебраическому уравнению с помощью алгебраических преобразований, называется *трансцендентным уравнением* [[4]](#footnote-4)).

Простешими трансцендентными уравнениями являются показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения.



**Показательные уравнения**

*Показательным уравнением* называется уравнение, в котором неизвестное входит только в показатели степеней при некоторых постоянных основаниях.

Простейшим показательным уравнением, решение которого сводится к решению алгебраического уравнения, является уравнение вида

, (24)



где и - некоторые положительные числа . Показательное уравнение (24) эквивалентно алгебраическому уравнению



.



В простейшем случае, когда , показательное уравнение (24) имеет решение



Множество решений показательного уравнения вида

, (25)



где - некоторый многочлен, находится следующим образом.



Вводится новая переменная , и уравнение (25) решается как алгебраическое относительно неизвестного . После этого решение исходного уравнения (25) сводится к решению простейших показательных уравнений вида (24).



П р и м е р 1. Решить уравнение

.



Записывая уравнение в виде



и вводя новую переменную , получаем кубическое уравнение относительно переменной :



.



Нетрудно убедиться, что данное кубическое уравнение имеет единственный рациональный корень и два иррациональных корня: и .



Таким образом, решение исходного уравнения сведено к решению простейших показательных уравнений:

, , .



Последнее из перечисленных, уравнений решений не имеет. Множество решений первого и второго уравнений:

и .



Н е к о т о р ы е п р о с т е й ш и е п о к а з а т е л ь н ы е у р а в н е н и я:

1) Уравнение вида



заменой сводится к квадратному уравнению



.



2) Уравнение вида



заменой сводится к квадратному уравнению



.



3) Уравнение вида



заменой сводится к квадратному уравнению



.



**Логарифмические уравнения**

*Логарифмическим* уравнением называется уравнение, в котором неизвестное входит в виде аргумента логарифмической функции.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

, (26)



где - некоторое положительно число, отличное от единицы, - любое действительное число. Логарифмическое уравнение (26) эквивалентно алгебраическому уравнению



.



В простейшем случае, когда , логарифмическое уравнение (26) имеет решение



.



Множество решений логарифмического уравнения вида , где - некоторый многочлен указанного неизвестного, находится следующим образом.



Вводится новая переменная , и уравнение (25) решается как алгебраическое уравнение относительно . После этого решаются простейшие логарифмические уравнения вида (25).



П р и м е р 1. Решить уравнение

. (27)



Относительно неизвестного данное уравнение – квадратное:



.



Корни этого уравнения: , .



Решая логарифмические уравнения

, ,



получаем решения логарифмического уравнения (27): , .



В некоторых случаях, для того чтобы свести решение логарифмического уравнения к последовательному решению алгебраического и простейших логарифмических уравнений, необходимо предварительно сделать подходящие преобразования логарифмов, входящих в уравнение. Такими преобразованиями могут быть преобразование суммы логарифмов двух величин в логарифм произведения этих величин, переход от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием и т. д.

П р и м е р 2. Решить уравнение

. (28)



Для того чтобы свести решение данного уравнения к последовательному решению алгебраического и простейших логарифмических уравнений, необходимо прежде всего привести все логарифмы к одному основанию (здесь, например, к основанию 2). Для этого воспользуемся формулой

,



в силу которой . Подставив в уравнение (28) вместо равную ему величину, получаем уравнение



.



Заменой это уравнение сводится к квадратному уравнению относительно неизвестного :



.



Корни этого квадратного уравнения: , . Решаем уравнения и :



,



,



П р и м е р 3. Решить уравнение

.



Преобразуя разность логарифмов двух величин в логарифм частного этих величин:

,



сводим данное уравнение к простейшему логарифмическому уравнению

.



**Заключение**

Математика, как и любая другая наука не стоит на месте, вместе с развитием общества меняются и взгляды людей, возникают новые мысли и идеи. И XX век не стал в этом смысле исключением. Появление компьютеров внесло свои корректировки в способы решения уравнений и значительно их облегчило. Но компьютер не всегда может быть под рукой (экзамен, контрольная), поэтому знание хотя бы самых главных способов решения уравнений необходимо знать. Использование уравнений в повседневной жизни – редкость. Они нашли свое применение во многих отраслях хозяйства и практически во всех новейших технологиях.

В данной работе были представлены далеко не все, способы решения уравнений и даже не все их виды, а только самые основные. Я надеюсь, что мое сочинение может послужить неплохим справочным материалом при решении тех или иных уравнений. В заключении хотелось бы отметить, что при написании данного сочинения я не ставил себе цели показать все виды уравнений, а излагал лишь имеющийся у меня материал.

**Список использованной литературы**

Глав. ред. М. Д. Аксенова. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. – М.: Аванта+, 1998. – 688 с.

Цыпкин А. Г. Под ред. С. А. Степанова. Справочник по математике для средней школы. – М.: Наука, 1980.- 400 с.

Г. Корн и Т. Корн. Справаочник по математике для начуных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970.- 720 с.

1. ) Под *допустимыми* понимаются те численные значения букв, при которых выполнимы все операции, совершаемые над буквами, входящими в равенство. Например, допустимыми значениями букв, входящих в равенство

   

   будут следующие; для ; для , для

   

   [↑](#footnote-ref-1)
2. ) Если a и b имеют разные знаки, то .

   

   [↑](#footnote-ref-2)
3. ) Случай , аналогичен разобранному.

   

   [↑](#footnote-ref-3)
4. ) Под *алгебраическими преобразованиями* уравнения

   

   Понимают следующие преобразования:

   1) прибавление к обеим частям уравнения одного и того же алгебраического выражения;

   2) умножение обеих частей уравнения на одно и то же алгебраическое выражение;

   3) возведение обеих частей уравнения в рациональную степень. [↑](#footnote-ref-4)