**Реферат**

**Предмет: Теория автоматического управления**

**Тема: Устойчивость дискретных систем управления**

**1. Основные понятия устойчивости дискретных систем**

Основные определения устойчивости непрерывных систем справедливы и для дискретных систем с учетом некоторых особенностей.

Необходимым и достаточным условием устойчивости непрерывной линейной системы является расположение в левой полуплоскости всех корней ее характеристического уравнения. Сопоставим, как выглядят уравнения для непрерывных и для дискретных систем.

Для непрерывных систем передаточные функции представляют отношение дробно – рациональных функций и имеют вид

. (1)



Характеристическое уравнение представляет собой степенное уравнение, при этом число корней уравнения равно степени полинома - *n* .



Например, для передаточной функции



Для дискретных систем передаточные функции имеют вид

.(2)



Характеристическое уравнение представляет собой трансцендентное уравнение, при этом число корней уравнения бесконечно, так как они имеют периодический характер.



Например, для передаточной функции

(3)



корни определяются из соотношений

.



Каждому из *n* корней в плоскости *Р,* соответствует бесконечное множество периодических корней в плоскости *Р\**,отстоящих друг от друга на расстоянии частоты квантования и расположенных по группам в каждой полосе. Для анализа свойств системы достаточно анализировать расположение корней в одной, так называемой основной полосе, в качестве которой обычно считают полосу частот .



Расположение корней этого уравнения в комплексной плоскости приведено на рис. 1.

+j

3ωn

2

-3ωn

2

Доп. полоса

Доп. полоса

Осн. полоса

+

ωn

2

-ωn

2

pn

pn

pn

2ωn

2

-2ωn

2

+

Рис. 1

Дискретная система автоматического управления устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости в пределах основной полосы.

# Пример 1. Определить устойчивость дискретной системы с передаточной функцией

.



**Решение:** Характеристическое уравнение системы имеет вид



Определим корни характеристического уравнения

.



Система устойчива, так как все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости в пределах основной полосы.

# Пример 2. Определить устойчивость дискретной системы с передаточной функцией



Характеристическое уравнение имеет вид

.



Определим корни характеристического уравнения заданной системы

.



Система на границе устойчивости, так как один корень расположен на мнимой оси, а второй устойчивый.

**2. Определение устойчивости дискретных систем в форме** *z*-**преобразования**

Использование *z*-преобразования позволяет преобразовать трансцендентный полином в степенной, что позволяет упростить процесс исследования дискретных систем управления.

Применение *z*-преобразования (рис. 2.3) отображает основную полосу на плоскость *Z*, отрезок мнимой оси в окружность единичного радиуса, а левую часть полосы в круг единичного радиуса.



Следовательно, дискретная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости в пределах основной полосы (т. е. условие устойчивости ).



# Пример 3. Определить устойчивость дискретной системы с передаточной функцией

.



Характеристическое уравнение имеет вид

.



Определим корни характеристического уравнения



Определим модуль корней

.



Система не устойчива, так как модуль корней ее характеристического уравнения меньше единицы.

# Пример 4. Определить устойчивость дискретной системы, структурная схема которой представлена на рис. 2.

# x

# T

y

2

p+1

-

Рис. 2

**Решение:** Передаточная функция разомкнутой дискретной системы

.



Передаточная функция разомкнутой дискретной системы в форме *z*- преобразования

, где .



Передаточная функция замкнутой дискретной системы в форме *z*- преобразования

# .



Характеристическое уравнение имеет вид .



Определим корни характеристического уравнения



При этом модуль корня при любых допустимых *T*, следовательно, система устойчива.



**3. Определение устойчивости дискретных систем в форме *w*- преобразования**

Из теории функций комплексного переменного известно, что билинейное преобразование (*w*-преобразование, преобразование Мизеса) отображает круг единичного радиуса в плоскости *Z* во всю левую полуплоскость плоскости *W* , при использовании подстановки

или *.* (4)



Установим связь между плоскостями *Z* и *W* (см. рис. 3).

пл. Z

-1 +1-1 +1 -1+1

w

-1

1

+

+

Рис. 3

1. При⏐*z*⏐ = *1*,⏐*w+1*⏐ = ⏐*w-1*⏐, что соответствует оси *j.*

2. При⏐*z*⏐ < *1*,⏐*w+1*⏐ < ⏐*w-1*⏐ - соответствует левой полуплоскости пл. *W*.

3. При⏐*z*⏐ > *1*,⏐*w+1*⏐ > ⏐*w-1*⏐ - соответствует правой полуплоскости.

Дискретная система автоматического управления устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости плоскости *W*.

Следовательно, при использовании билинейного преобразования условия устойчивости непрерывных систем можно использовать для дискретных систем управления.

# Пример 5. Определить устойчивость дискретной системы с передаточной функцией

.



Характеристическое уравнение имеет вид

.



Определим корни характеристического уравнения



Система устойчива, так как корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости.

# Пример 6. Определить устойчивость дискретной системы, структурная схема которой представлена на рис. 4.

y

# x

# T

k

p(T1p+1)

-

Рис. 4

**Решение:** Передаточная функция разомкнутой дискретной системы в форме *z*– преобразования

, где .



# Передаточная функция замкнутой дискретной системы

.



Характеристическое уравнение системы имеет вид

.



Выполнив билинейное преобразование, получим



Условие устойчивости: *1 – b > 0, 1 + b +d > 0,* где *b = [k(1-d)-(1+d)].*

**4. Применение критериев устойчивости для дискретных систем**

Все критерии устойчивости, которые используются для анализа устойчивости непрерывных систем, могут быть использованы для дискретных систем с учетом некоторых особенностей.

**Критерий Гурвица**

Критерий устойчивости Гурвица можно использовать при применении билинейного преобразования. Рассмотри алгоритм его использования.

1. Записываем характеристическое уравнение *D(z) = 0*

.(5)



2. Выполняем подстановку , при этом получим характеристическое уравнение *D(w) = 0*, т. е. в форме билинейного преобразования



. (6)



3. Составляем определитель Гурвица

. (7)



4. Определяем устойчивость также как и для непрерывных систем.

Линейная дискретная система устойчива, если при определитель Гурвица и все его диагональные миноры положительны.



Рассмотрим частные случаи.

При *n = 1* характеристическое уравнение имеет вид



Условие устойчивости: *a0 > 0, a1 > 0,* а также: *a0 - a1 > 0.*

При *n = 2* характеристическое уравнение имеет вид



Условие устойчивости: *a0 > 0, a1 > 0, a2 > 0,* а также:

*a0 - a1 + a2 > 0, a0 - a2 > 0.*

**Пример** Определить устойчивость дискретной системы, если передаточная функция разомкнутой системы в форме *z* – преобразования, имеет вид

.



# Передаточная функция замкнутой дискретной системы в форме *z* – преобразования

.



Характеристическое уравнение имеет вид

.



Выполним билинейное преобразование



Система не устойчива.

**Критерий устойчивости Михайлова**

Доказательство частотных критериев устойчивости базируется на следствии из принципа аргумента. Рассмотрим, как он формулируется для дискретных систем.

Пусть задано характеристическое уравнение замкнутой системы

. (8)



Рассмотрим комплексную плоскость *Z* (рис. 7), пусть *z2* расположен внутри круга единичного радиуса, а *z1* вне него.

При этом

(9)



Если замкнутая система устойчива, то все корни расположены в пределах окружности единичного радиуса, а значит

(10)



Замкнутая дискретная система устойчива, если характеристическая кривая D\*(jω) при изменении частоты 0 ≤ ω ≤ π/T последовательно проходит 2n квадрантов.

Порядок построения характеристической кривой: определяем *D(z)*; выполняем подстановку ; определяем выражение



;



изменяя *0 ≤ ω ≤ π/T*строим *D\*(jω)*(рис. 5).

+j

z-z1

z1

+π/2

-π/2 z- z2

z2

+

+j

n=1

D\*(jω)

+

ω =π/Tω=0

а) б)

Рис. 5

**Пример 8.** Определить устойчивость по критерию Михайлова системы, схема которой приведена на рис. 6, если *T = 1* с*, kv = 2* c-1.

y

# x

1-e-pT

p

k v

p

# T

-

Рис.6

**Решение:** Передаточная функция разомкнутой системы

.



Передаточная функция разомкнутой дискретной системы

.



Передаточная функция разомкнутой дискретной системы в форме *z*– преобразования



Передаточная функция замкнутой дискретной системы в форме *z* – преобразования

.



Характеристический полином имеет вид

.



Определяем выражение



Изменяя частоту в пределах 0 ≤ ω ≤ π (0 ≤ ω ≤ π/T) строим годограф Михайлова (рис. 7).

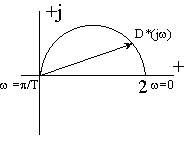


Таблица 1

\

Рис. 7

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ω | 0 | π/4 | π/2 | π3/4 | π |
| X\*(ω) | 2 | 1+√2/2 | 1 | 1-√2/2 | 0 |
| Y\*(ω) | 0 | √2/2 | 1 | √2/2 | 0 |

Как видно из рисунка система находится на границе устойчивости.

Проверим по критерию Гурвица при

*kvT = 2*; *z+1 = 0; z1 = -1; 1 z11=1.*

Корень находится на окружности единичного радиуса, следовательно, система находится на границе устойчивости.

**Критерий устойчивости Михайлова с использованием билинейного преобразования**

При этом исходным является характеристический полином в форме *z*-преобразования. Выполним подстановку

*z = (1+w)/(1-w)* .

(11)



Пусть: *w = jλ*, где *λ*–фиктивная частота (*0 ≤ λ ≤ ∞*).

При этом критерий Михайлова для дискретных систем применяется в таком же виде, как и для непрерывных систем.

**Пример 9.** Определить условие устойчивости по критерию Михайлова дискретной системы, схема которой приведена на рис. 6.

**Решение:**

Характеристический полином имеет вид

.



Выполнив подстановку *z = (1+w)/(1-w)*, в характеристический полином получим

.



Выполнив подстановку *w = jλ*, в характеристический полином получим



Строим график рис. 8. Система устойчива при *kvT > 2.* Критический коэффициент усиления равен *kv кр = 2/T.*

+j

kvT>2

kvT=2+

kvT<2

Рис. 8

**Критерий устойчивости Найквиста**

Рассмотрим функцию, которая связывает характеристики разомкнутых и замкнутых дискретных систем

(12)



где *D\*(p)* – характеристический полином замкнутой системы;

*A\*(p)* – характеристический полином разомкнутой системы.

В соответствии со следствием из принципа аргумента

(13)



Рассмотрим разные случаи.

**Система, устойчивая в разомкнутом состоянии**

Так как разомкнутая дискретная система устойчива, то она не содержит корней в правой полуплоскости (т. е. *m* = 0), для того чтобы и замкнутая дискретная система была устойчива, должно выполняться условие

(14)



Формулировка критерия Найквиста:

## Замкнутая дискретная система устойчива, если амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой устойчивой системы не охватывает току с координатами (–1,j0).

Графически это обозначает, что годограф вектора *W\*(jω)* не охватывает начала координат, а вектора *K\*(jω)* -точку с координатами (-*1, j0*).

**Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии**

Так как разомкнутая система неустойчива, то она содержит *m* корней в правой полуплоскости, для того чтобы замкнутая система была устойчива, должно выполняться условие:



Графически это обозначает, что годограф вектора *K(jω)* охватывает точку с координатами (*-1, j0*) *m* –раз.

Формулировка критерия Найквиста: Замкнутая дискретная система устойчива, если амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой неустойчивой системы, имеющей m корней в правой полуплоскости, охватывает току с координатами (–1 , j0) m раз.

**Пример 10.** Определить условия устойчивости и величину критического коэффициента усиления по критерию Найквиста дискретной системы, схема которой приведена на рис. 6.

**Решение:** Передаточная функция разомкнутой дискретной системы в форме *z*– преобразования



При этом выражение для частотной характеристики имеет вид



Строим частотную характеристику дискретной системы в соответствии с таблицами 2 и 3 (рис. 9).

Характеристику строим на интервале частот *0 ≤ ω ≤ π/T* в дальнейшем характеристики повторяются, так как они носят периодический характер.

Условие устойчивости данной дискретной системы определяется соотношением *kvT/2 = 1*. 0 ≤ ω ≤ π/T

Таблица 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ω | 0 | π/2T | π/T |
| P\*(ω) | -kvT/2 | -kvT/2 | -kvT/2 |
| Q\*(ω) | -∞ | -kvT/2 | 0 |

+j

-kvT/2+

K\*(jω)

Рис. 9

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
| ctgα | -∞ | √3 | 1 | 1/√3 | 0 |

Критический коэффициент усиления системы равен *kv кр = 2/Т*.

**Литература**

1. Дорф Р., Бишоп Р. Автоматика. Современные системы управления. 2002г. – 832с.
2. Харазов В. Г. Интегрированные системы управления технологическими процессами: Справочник. Издательство: ПРОФЕССИЯ, ИЗДАТЕЛЬСТВО, 2009. – 550с.
3. Чебурахин И. Синтез дискретных управляющих систем и математическое моделирование: теория, алгоритмы, программы. Изд-во: НИЦ РХД, ФИЗМАТЛИТ®, 2004. – 248c.