#### **РЕФЕРАТ**

# "Велика теорема Ферма"

**Зміст**

Біографія Ферма

Історія Великої теореми Ферма

Доказ леми 1 (Жермен)

Доказ леми 2 (допоміжною)

Доведення теореми Ферма для показника 4

Примітки до доказів

**Біографія Ферма**

### ***П'єр Ферма*** жив з 1601 по 1665 рік. Був він сином одного з численних торговців у Франції, здобув юридичну освіту і працював спочатку адвокатом, а згодом став навіть радником парламенту. Службові його обов'язки, далекі за змістом від математичних наук, залишали йому досить дозвілля, яке Ферма і присвячував заняттям математичними дослідженнями. Завдяки своїм природним здібностям і наполегливості, необхідній при роботі над питаннями математики, Ферма добився крупних результатів в самих різних її областях. Але не тільки математикою був він сильний: в області фізики, наприклад, їм сформульований основний принцип геометричної оптики, відомий під назвою «Принципу *Ферма»*.

***Ферма*** своїми роботами сприяв розвитку нових галузей в математиці: математичного аналізу, аналітичної геометрії (одночасно з ***Декартом***), теорії вірогідності.

Головним внеском ***Ферма*** в алгебру з'явилася розвинена ним теорія з'єднань або, як її ще називають, комбінаторика. Окремі завдання теорії з'єднань були вирішені вже в давнину греками і індійцями, але наукова постановка цих питань виникла лише в XVII столітті в роботах ***Ферма*** і його сучасника, знаменитого французького філософа, математика і фізика ***Блеза Паскаля***. Виходячи з основ комбінаторики, ці два учених і поклали початок новій математичній науці, званою теорією вірогідності, що отримала в XVIII столітті значну теоретичну базу, при цьому вона почала набувати всього більшого поширення і використовуватися в різних областях науки і практичної діяльності. Перш за все, вона була застосовна до питань страхування, а надалі область її застосування все розширювалася і розширювалася.

Багато уваги ***Ферма*** також приділяв і питанню про магічні квадрати. Ці квадрати спочатку сталі відомі індійцям і арабам, і вже тільки в епоху середніх століть вони з'явилися в Західній Європі. Різні математики зацікавилися дослідженнями їх властивостей, це сприяло розвитку деяких математичних теорій. Ще ***Мезіріак*** знайшов способи складання магічних квадратів з непарним числом кліток, а вже ***Ферма*** розповсюдив ідею складання магічних квадратів на простір, тобто поставило питання про складання кубів, що володіють властивостями, аналогічними властивостям магічних квадратів.

Хоча ***Ферма*** вніс великий внесок до розвитку теорії чисел алгебри, докази його доводів майже ні в одному випадку знайдені не були (доведення *Великої теореми Ферма* для **n=4** – виключення, оскільки в рукописах воно було). Деякі виводи, зроблені ***Ферма***, були і зовсім помилковими, але теореми, повні докази яких, як затверджував ***Ферма***, у нього були, всі згодом були доведені (основний внесок на доказ яких вніс ***Ейлер***). Але було і одне виключення – приємне виключення – це *Велика теорема Ферма*:

## Історія Великої теореми Ферма

Великою популярністю у всьому світі користується «Велика *теорема Ферма»* (вона ж – «Велика» або «Остання»).

*Великою теоремою Ферма* називається той висновок, який було зроблено ним при читанні виданої ***Мезіріаком «****Арифметики»* ***Діофанту***. На полях цієї книги, проти того місця, де йде мова про вирішення рівняння виду **x2 + y2 = z2**, ***Ферма*** написав*: «Тим часом, абсолютно неможливо розкласти повний куб на суму кубів, четвертую ступінь – на суму четвертих ступенів, взагалі який-небудь ступінь – на суму ступенів з тим же показником. Я знайшов справді дивовижний доказ цього припущення, але тут дуже мало місце, щоб його помістити*». Це положення ***Ферма*** тепер формулюється як теорема в наступному вигляді: «*Рівняння* ***xn + yn = zn*** *не може бути вирішене в раціональних числах відносно* ***x****,* ***у*** *і* ***z*** *при цілих значеннях показника n, великих 2»* (загальновідомо, що при **n=2** такі числа існують, наприклад, 3, 4, 5 – числа, які, якщо є довжинами сторін, утворюють знаменитий трикутник ***Піфагора***). Справедливість цієї теореми підтверджується для багатьох окремих випадків (при цьому ще не знайдено жодного спростування), проте до цих пір вона не доведена в загальному вигляді, хоча їй цікавилися і її намагалися довести багато крупних математиків (у «*Історії теорії чисел»* ***Діксону*** прореферировано більше трьохсот робіт на цю тему). У 1907 році в місті ***Дармштадте*** в Германії помер математик ***Вольфськель***, який заповідав 100000 мазкий тому, хто дасть повне доведення теореми. Негайно сотні і тисячі людей, рухомих одним лише прагненням до наживи, почали бомбардувати наукові суспільства і журнали своїми рукописами, нібито що містять доведення *теореми Ферма*. Тільки у ***Геттингенське*** математичне суспільство за перші три роки після оголошення заповіту ***Вольфськеля*** прийшла більше тисячі «рішень». Але премія ця до цих пір нікому не видана за відсутністю справжнього доведення *Великої теореми Ферма*.

Елементарного доведення *Великої теореми Ферма* немає ні для одного показника **n ≠ 4.**

Випадок, коли **n = 3**, був доведений ***Ейлером*** ще в 1768 році. І той зажадав ще багато років, щоб теорія, якою необгрунтовано користувався ***Ейлер*** при своєму доказі, була доведена ***Гаусом***.

Доведення *теореми Ферма* для випадку, коли **n = 5**, запропонували в 1825 році майже одночасно ***Лежен Дирихле*** і ***Лежандр***. Свій доказ ***Дирихле*** опублікував в 1828 році, але воно було дуже складним, і в 1912 році його спростив ***Племель***.

Для наступного простого показника **n = 7** теорема Ферма була доведена лише в 1839 році ***Ламі***. Доказ ***Ламі*** був майже відразу ж вдосконалений ***Лебегом***.

У 1847 році ***Ламі*** оголосив, що йому вдалося знайти доведення теореми Ферма для всіх простих показників **n ≥ 3**. Метод ***Ламі*** був вельми далеким розвитком ідей ***Ейлера*** і грунтувався на арифметичних властивостях чисел. Проте відразу ж ***Ліувіль*** виявив в міркуваннях ***Ламі*** серйозний пропуск, чим спростував цей доказ. ***Ламі*** був вимушений визнати свою помилку.

На ЕОМ, користуючись ідеями ***Куммера*** і ***Вандівера*** довели справедливість теореми Ферма для всіх простих показників n < 100000.

**Доказ леми 1 (Жермен)**

*Якщо твір два взаємно простих натуральних чисел є* ***n-ой*** *ступенем, то кожен із співмножників також буде* ***n-ой*** *ступенем:*

**ab = cn; НОД (а; b)= 1; а, b ∈ N**

***Довести***: **а = xn; b = yn**

***Доказ***: Якщо розкласти **cn** на прості множники, то: **cn = d1 \*. \* d1 \* d2 \*. \* d2 \*. \* dm \*. \* dm**, де кожного множника по **n.** Якщо ж розкласти на прості множники числа **а** і **b**, то якісь з чисел **d1. dm** підуть до **а,** якісь – до **b,** причому однакові піти і туди, і туди не можуть внаслідок того, що **НОД (а; b)= 1**, тобто а є твір n-х ступенів якихось простих чисел, і b також – твір n-х ступенів якихось чисел, отже: а **= xn; b = yn.**

**Доказ леми 2 (допоміжною)**

**x2 + y2 = z2 (1)**

Якщо **(x; у; z)** – рішення, то **(у; x; z)** також буде рішенням, тому що **x** і **у** симетричні в даному рівнянні. Припустимо, що **z = 2k**, тоді **z2 = 4k**, якщо ж **z = 2k – 1**, то **z2 = (2k – 1)2 = 4k2 – 4k + 1 = 4 (k2 – до)+ 1**, отже, хоч би одне з чисел x і у парно, оскільки якби обидва вони були непарними, то **x2+ y2= (2k – 1) 2+ (2d – 1) 2= 4k2 – 4k + 1 + 4d2 – 4d + 1 = 4 (k2+ d2 – до – d)+ 2,** чого бути не може, оскільки x2 **+ y2 = z2.**Крім того (x**;± у; z) також** є вирішенням рівняння, оскільки x2 **=(-х) 2; y2 =(-у) 2; z2 =(-z) 2.**

З цих зауважень безпосередньо виходить, що нам досить знайти примітивні вирішення **(x; у; z)** рівняння (1), що лише складаються з позитивних чисел, тобто виключимо всі наступні рішення: (**x±; у±; z),** окрім (**x; у; z),** (**у, x, z),** для яких x **= 2a.**

***Лема 2***: «*Будь-яке примітивне вирішення* ***(x, у, z)*** *рівняння (1), що складається з позитивних чисел, для якого* ***x = 2a****, виражається формулами:*

***x = 2mn; у = m2 – n2; z = m2 + n2***

*де* ***n < m****,* ***НОД (m; n)= 1****,* ***m*** *і* ***n*** *– числа різної парності».*

***Доказ:*** Хай **(x; у; z)** – довільне примітивне вирішення рівняння (1), що складається з позитивних чисел, **де x = 2a**. З рівняння **4a2 + y2 = z2** слідує **(z – у) (z + у) = 4k2**. Парність чисел **z – у** і **z + у** співпадають і твір їх рівне **4k2**, отже, **z – у** і **z + у** парні. Хай **z + у = 2b; z – у = 2c**, де **b** і **з** позитивні, оскільки у **< z,** виходячи з рівняння (1). Кожен загальний дільник **λ**чисел b і з є також загальним дільником **z = b + з** і у **= b – с.**

**НОД (у; z)= 1**, оскільки (**x; у; z)** – примітивне вирішення рівняння (1)**,** отже, НОД (**b; з) = 1.** З другого боку **4a2= x2= z2 – y2= (z – у) (z + у) = 4bc,** тобто a2 **= bc.** Отже, згідно **лемі 1,** застосованою до випадку, коли n **= 2,** існують такі взаємно прості позитивні числа різної парності m **і** n, що b **= m2;з = n2.**Тоді a2 **= (mn) 2,** тобто а = **mn і**

**x = 2a = 2mn; у = b – з = m2 – n2; z = b + з = m2 + n2.**

Для завершення доказу залишається лише додати, **що n < m**, оскільки x**, у > 0.**

Доведення теореми Ферма для показника 4

**x4 + y4 = z4**

Доведемо ще більш загальний випадок:

«*Рівняння*

***x4 + y4 = z2*** *(2)*

*не має рішень в цілих відмінних від нуля числах*».

***Доказ***: Припустимо, що існує вирішення рівняння (2) в цілих відмінних від нуля числах. Ясно, що, не втрачаючи спільності, ми можемо вважати, що воно складається з попарно взаємно простих позитивних чисел (якщо **(x; у; z)** є вирішенням рівняння (2), то, відразу ж видно, що **(λx; λу; λz)** також є його рішенням). Оскільки в будь-якій безлічі натуральних чисел існує найменше з них, то серед всіх таких рішень знайдеться рішення **(x; у; z)** з найменшим **z**. Розглянемо саме це рішення:

Так само, як і при **доказі леми 2** негайно доводиться, що одне з чисел **x** і **у** повинно бути парним. Припустимо, що парне число **x**. Це припущення також спільності не обмежує.

Оскільки числа **x2**, **y2** і **z** позитивні і взаємно прості, а число **x2** парно, то, згідно **лемі 2**, існують такі взаємно прості числа **m** і **n < m** різної парності, що **x2 = 2mn; y2 = m2 – n2; z2 = m2 + n2**. Якщо **m = 2k** і **n = 2f +1**, то **у = 4 (k2 – f2 – f – 1)+ 3**, що неможливе, бо, як вище було вже відмічено, будь-який квадрат повинен мати вид **4k + 1**, або **4k**. Отже, **m** – непарно, а **n** – парно.

Хай **n = 2q**. Тоді **x2 = 4mq** і тому **mq = (x/2)2**. Оскільки **НОД (m; q)= 1**, а x парно, то, виходячи з **леми 1**, **m = z12**; **q = t2,** де **z1** і **t** – деякі цілі взаємно прості позитивні числа. Зокрема, рівняння **y2 = m2 – n2** те ж саме, що **і y2 = (z12)2 – (2t2)2**, тобто (**2t2)2+ y2= (z12)2.**

Оскільки **НОД (t; z1)= 1**, то до цієї нерівності знову застосовна **лема 2**. Отже, існують такі позитивні взаємно прості числа **а** і **b < а** різній парності, що **2t2 = 2ab**, тобто t2 **= ab;** y2 **= a2 – b2;** z12 = **a2 + b2.** Оскільки НОД (**а; b)= 1,** з рівності t2 **= ab** по лемі **1** витікає, що істоті цілі числа x1 і y1**,** для яких а **= x12;** b **= y12.** Тому z12 = **a2 + b2** те ж, що і x14 + **y14 = z12.** Це означає, що числа x1**,** y1**,** z1 складають примітивне вирішення рівняння (2)**,** що складається з позитивних чисел. Тому через вибір рішення (**x; у; z),** повинно мати місце нерівність z1 **і** z**,** а тому і нерівність z12 іz**,** т.е., враховуючи, що z **= m2 + n2,** m **і** m2 **+ n2,** чого бути не може, оскільки m, **n > 0.**

Таким чином, припущення про існування у записаного вище рівняння (2) цілочисельних рішень приводить до суперечності. Отже, *це рівняння не має рішень в цілих відмінних від нуля числах.*

**Примітки до доказів**

**Доказ леми 1** тут дане не те, яке було відоме ще з середньовіччя, а то, що придумав я сам, засноване більшою мірою на логічних виводах. Теорема Ферма для показника 4 (і леми, що все додаються для її доказу) – це єдина теорема, доведена тут, оскільки доказ її вважається елементарним, тобто заснованим на простих перетвореннях алгебри чисел, відомим ще індусам. Доказ же цей був тут необхідний, оскільки ще навіть у Ферма воно було, тільки в декілька іншій формі.

У Франції не так давно з'явилася книга, що є, ніби як, повним доведенням Великої *теореми Ферма,* але в ній використано стільки нових в математиці абстрактних понять, що перевірити ці праці, окрім автора, ніхто не може.

**Список літератури**

1. М.М. Постников «Теорема Ферма», М., 1978

2. Б.В. Болгарський «Нариси по історії математики», Мінськ, 1979

3. М.Я. Вигодський «Довідник по елементарній математиці», М., 1974.

Мережа Internet