содержание

Прямое и косвенное доказательство 3

Прямое доказательство 4

Косвенное доказательство 5

Следствия, противоречащие фактам 7

Внутренне противоречивые следствия 7

Разделительное доказательство 9

Заключение 11

ЛИТЕРАТУРА 12

# Прямое и косвенное доказательство

Немецкий философ XIX в. А. Шопенгауэр считал математику доволь­но интересной наукой, но не имеющей никаких приложений, в том числе и в физике. Он даже отвергал саму технику строгих матема­тических доказательств. Шопенгауэр называл их мышеловками и приводил в качестве примера доказательство известной теоремы Пифагора. Оно является, конечно, точным; никто не может счесть его ложным. Но оно представляет собой совершенно искусственный способ рассуждения. Каждый шаг его убедителен, однако к концу до­казательства возникает чувство, что вы попали в мышеловку. Мате­матик вынуждает вас допустить справедливость теоремы, но вы не получаете никакого реального понимания. Это все равно, как если бы вас провели через лабиринт. Вы наконец выходите из лабирин­та и говорите себе: «Да, я вышел, но не знаю, как здесь очутился».

Позиция Шопенгауэра, конечно, курьез, но в ней есть момент, заслуживающий внимания. Нужно уметь проследить каждый шаг доказательства. Иначе его части лишатся связи, и оно в любой мо­мент может рассыпаться, как карточный домик. Но не менее важно понять доказательство в целом, как единую конструкцию, каждая часть которой необходима на своем месте. Как раз такого целост­ного понимания не хватало, по всей вероятности, Шопенгауэру. В итоге в общем-то простое доказательство представилось ему блужданием в лабиринте: каждый шаг пути ясен, но общая линия движения покрыта мраком.

Доказательство, не понятое как целое, ни в чем не убеждает. Даже если выучить его наизусть, предложение за предложением, к имеющемуся знанию предмета это ничего не прибавит. Следить за доказательством и лишь убеждаться в правильности каждого его последующего шага — это, по словам французского математика А. Пуанкаре, равносильно такому наблюдению за игрой в шахматы, когда замечаешь только то, что каждый ход подчинен правилам игры.

Минимальное требование — это понимание логического выве­дения как целенаправленной процедуры. Только в этом случае до­стигается интуитивная ясность того, что мы делаем.

«Я принужден сознаться, — заметил как-то Пуанкаре, — что положи­тельно не способен сделать без ошибки сложение. Моя память не плохая; но чтобы стать хорошим игроком в шахматы, она оказалась бы недоста­точной. Почему же она не изменяет мне в сложных математических рас­суждениях, в которых запутались бы большинство шахматных игроков? Это происходит, очевидно, потому, что в данном случае память моя на­правляется общим ходом рассуждения. Математическое доказательство не есть простое сцепление умозаключений: это умозаключения, расположен­ные в определенном порядке; и порядок, в котором расположены эти эле­менты. Если у меня есть чувство... этого порядка, вследствие чего я сразу могу обнять всю совокупность рассуждений, мне уже нечего бояться забыть какой-либо элемент; каждый из них сам собою займет свое место...»

То, что создает, по выражению Пуанкаре, «единство доказатель­ства», можно представить в форме общей схемы, охватывающей основные его шаги, воплощающей в себе общий принцип или его итоговую структуру. Именно такая схема остается в памяти, когда забываются подробности доказательства. С точки зрения общего движения мысли, все доказательства подразделяются на прямые и косвенные.

# Прямое доказательство

При прямом доказательстве задача состоит в том, чтобы подыскать такие убедительные аргументы, из которых по логическим правилам по­лучается тезис.

Например, нужно доказать, что сумма углов четырехугольника равна 360°. Из каких утверждений можно было бы вывести этот тезис? Отмечаем, что диагональ делит четырехугольник на два тре­угольника. Значит, сумма его углов равна сумме углов двух треуголь­ников. Известно, что сумма углов треугольника составляет 180°. Из таких положений выводим, что сумма углов четырехугольника равна 360°.

В построении прямого доказательства можно выделить два связанных между собою этапа: отыскание тех, признанных обос­нованными утверждений, которые способны быть убедительны­ми аргументами для доказываемого положения; установление логи­ческой связи между найденными аргументами и тезисом. Нередко первый этап считается подготовительным и под доказательством понимается дедукция, связывающая подобранные аргументы и доказываемый тезис.

Еще пример. Нужно доказать, что космические корабли под­чиняются действию законов небесной механики. Известно, что эти законы универсальны: им подчиняются все тела в любых точ­ках космического пространства. Очевидно также, что космичес­кий корабль есть космическое тело. Отметив это, строим соот­ветствующее дедуктивное умозаключение. Оно является прямым доказательством рассматриваемого утверждения.

# Косвенное доказательство

Косвенное доказательство устанавливает справедливость тезиса тем, что вскрывает ошибочность противоположного ему допущения, антитезиса.

Как с иронией замечает американский математик Д. Пойа, «косвенное доказательство имеет некоторое сходство с надувательским приемом политикана, поддерживающего своего кандидата тем, что опорочивает репутацию кандидата другой партии».

В косвенном доказательстве рассуждение идет как бы окольным путем. Вместо того чтобы Прямо отыскивать аргументы для выве­дения из них доказываемого положения, формулируется антитезис, отрицание этого положения. Далее тем или иным способом пока­зывается несостоятельность антитезиса. По закону исключенного третьего, если одно из противоречащих друг другу утверждений ошибочно, второе должно быть верным. Антитезис ошибочен, зна­чит, тезис является верным.

Поскольку косвенное доказательство использует отрицание до­казываемого положения, оно является, как говорят, доказательством от противного.

Допустим, нужно построить косвенное доказательство такого весьма тривиального тезиса: «Квадрат не является окружностью». Выдвигается антитезис: «Квадрат есть окружность». Необходимо показать ложность этого утверждения. С этой целью выводим из него следствия. Если хотя бы одно из них окажется ложным, это будет означать, что и само утверждение, из которого выведено след­ствие, также ложно. Неверным является, в частности, такое след­ствие: у квадрата нет углов. Поскольку антитезис ложен, исходный тезис должен быть истинным.

Другой пример. Врач, убеждая пациента, что тот не болен грип­пом, рассуждает так. Если бы действительно был грипп, имелись бы характерные для него симптомы: головная боль, повышенная температура и т.п. Но ничего подобного нет. Значит, нет и гриппа.

Это опять-таки косвенное доказательство. Вместо прямого обо­снования тезиса выдвигается антитезис, что у пациента в самом деле грипп. Из антитезиса выводятся следствия, но они опровер­гаются объективными данными. Это говорит, что допущение о гриппе неверно. Отсюда следует, что тезис «Гриппа нет» истинен.

Доказательства от противного обычны в наших рассуждениях, особенно в споре. При умелом применении они могут обладать осо­бенной убедительностью.

Итак, ход мысли в косвенном доказательстве определяется тем, что вместо обоснования справедливости тезиса стремятся показать не­состоятельность его отрицания. В зависимости от того, как реша­ется последняя задача, можно выделить несколько разновидностей косвенного доказательства.

## Следствия, противоречащие фактам

Чаще всего ложность антитезиса удается установить простым сопоставлением вытекаю­щих из него следствий с фактами. Так обстояло, в частности, дело в примере с гриппом.

Друг изобретателя паровой машины Д. Уатта шотландский уче­ный Д. Блэк ввел понятие о скрытой теплоте плавления и испаре­ния, важное для понимания работы такой машины. Блэк, наблюдая обычное явление — таяние снега в конце зимы, рассуждал так: если бы снег, скопившийся за зиму, таял сразу, как только температура воздуха стала выше нуля, то неизбежны были бы опустошительные наводнения, а раз этого не происходит, значит, на таяние снега должно быть затрачено определенное количество теплоты. Ее Блэк и назвал скрытой.

Это — косвенное доказательство. Следствие антитезиса, а зна­чит, и он сам, опровергается ссылкой на очевидное обстоятельство: в конце зимы наводнений обычно нет, снег тает постепенно.

## Внутренне противоречивые следствия

По логическому зако­ну непротиворечия одно из двух противоречащих друг другу ут­верждений является ложным. Поэтому, если в числе следствий ка­кого-либо положения встретились и утверждение и отрицание одного и того же, можно сразу же заключить, что это положение ложно.

Например, положение «Квадрат — это окружность» ложно, по­скольку из него выводится как то, что квадрат имеет углы, так и то, что у него нет углов.

Ложным будет также положение, из которого выводится внут­ренне противоречивое высказывание или высказывание о тожде­стве утверждения и отрицания.

Один из приемов косвенного доказательства — выведение из антитезиса логического противоречия. Если антитезис содержит противоречие, он явно ошибочен. Тогда его отрицание — тезис до­казательства — верно.

Хорошим примером такого рассуждения служит известное до­казательство Евклида, что ряд простых чисел бесконечен.

Простые — это натуральные числа больше единицы, делящиеся только на себя и на единицу. Простые числа - это как бы «первич­ные элементы», на которые все целые числа (больше 1) могут быть разложены. Естественно предположить, что ряд простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11,13,... — бесконечен. Для доказательства данного тезиса допустим, что это не так, и посмотрим, к чему ведет такое допуще­ние. Если ряд простых чисел конечен, существует последнее простое число ряда — А. Образуем далее другое число: В = (2 • 3 • 5 •... • А) + 1. Число В больше А, поэтому В не может быть простым числом. Зна­чит, В должно делиться на простое число. Но если В разделить на любое из чисел 2, 3, 5, .... А, то в остатке получится 1. Следователь­но, В не делится ни на одно из указанных простых чисел и является, таким образом, простым. В итоге, исходя из предположения, что существует последнее простое число, мы пришли к противоречию: существует число одновременно и простое, и не являющееся про­стым. Это означает, что сделанное предположение ложно и пра­вильно противоположное утверждение: ряд простых чисел беско­нечен.

В этом косвенном доказательстве из антитезиса выводится ло­гическое противоречие, что прямо говорит о ложности антитезиса и соответственно об истинности тезиса. Такого рода доказательства широко используются в математике.

Если имеется в виду только та часть подобных доказательств, в которой показывается ошибочность какого-либо предположения, они именуются по традиции приведением к абсурду. Ошибочность предположения вскрывается тем, что из него выводится откровен­ная нелепость.

Имеется еще одна разновидность косвенного доказательства, когда прямо не приходится искать ложные следствия. Дело в том, что для доказательства утверждения достаточно показать, что оно логически вытекает из своего собственного отрицания.

Этот прием опирается на закон Клавия, говорящий, что если из ложности утверждения вытекает его истинность, то утверждение истинно.

К примеру, если из допущения, что дважды два равно пяти, вы­ведено, что это не так, тем самым доказано, что дважды два не равняется пяти.

По такой схеме рассуждал еще Евклид в своей «Геометрии». Эту же схему использовал однажды древнегреческий философ Демо­крит в споре с другим древнегреческим философом, софистом Протагором. Протагор утверждал, что истинно все то, что кому-либо приходит в голову. На это Демокрит ответил, что из положения «Каждое высказывание истинно» вытекает истинность и его отри­цания «Не все высказывания истинны». И значит, это отрицание, а не положение Протагора на самом деле истинно.

## Разделительное доказательство

Во всех рассмотренных кос­венных доказательствах выдвигаются две альтернативы: тезис и антитезис. Затем показывается ложность последнего, в итоге оста­ется только тезис.

Можно не ограничивать число принимаемых во внимание воз­можностей только двумя. Это приведет к так называемому раздели­тельному косвенному доказательству, или доказательству через исклю­чение. Оно применяется в тех случаях, когда известно, что дока­зываемый тезис входит в число альтернатив, полностью исчерпы­вающих все возможные альтернативы данной области.

Например, нужно доказать, что одна величина равна другой. Ясно, что возможны только три варианта: или две величины равны, или первая больше второй, или, наконец, вторая больше первой. Если удалось показать, что ни одна из величин не превосходит дру­гую, два варианта будут отброшены и останется только третий: ве­личины равны.

Доказательство идет по простой схеме: одна за другой исклю­чаются все возможности, кроме одной, которая и является доказы­ваемым тезисом. В стандартных косвенных доказательствах альтер­нативы — тезис и антитезис — исключают друг друга в силу законов логики. В разделительном доказательстве взаимная несовмести­мость возможностей и то, что ими исчерпываются все мыслимые альтернативы, определяются не логическими, а фактическими об­стоятельствами. Отсюда обычная ошибка разделительных доказа­тельств: рассматриваются не все возможности.

С помощью разделительного доказательства можно попытать­ся, например, показать, что в Солнечной системе жизнь есть только на Земле. В качестве возможных альтернатив выдвинем утвержде­ния, что жизнь есть на Меркурии, Венере, Земле и т.д., перечисляя все планеты Солнечной системы. Опровергая затем все альтерна­тивы, кроме одной — говорящей о наличии жизни на Земле, получим доказательство исходного утверждения.

Нужно заметить, что в ходе доказательства рассматриваются и опровергаются допущения о существовании жизни на других пла­нетах. Вопрос о том, если ли жизнь на Земле, вообще не поднима­ется. Ответ получается косвенным образом: путем показа того, что ни на одной другой планете нет жизни. Это доказательство оказа­лось бы, конечно, несостоятельным, если бы, допустим, выясни­лось, что, хотя ни на одной планете, кроме Земли, жизни нет, живые существа имеются на одной из комет или на одной из так называемых малых планет, тоже входящих в состав Солнечной сис­темы.

# Заключение

Заканчивая разговор о косвенных доказательствах, обратим внимание на их своеобразие, ограничивающее в известной мере их применимость.

Нет сомнения, что косвенное доказательство представляет собой эффективное средство обоснования. Но, имея с ним дело, мы вынуждены все время сосредоточиваться не на верном положе­нии, справедливость которого необходимо обосновать, а на оши­бочных утверждениях. Сам ход доказательства состоит в том, что из антитезиса, являющегося ложным, мы выводим следствия до тех пор, пока не придем к утверждению, ошибочность которого несо­мненна.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Арно А., Николь П. Логика, или Искусство мыслить, М,: Наука, 1981.
2. Гарднер М. А ну-ка, догадайся! М.: Мир, 1984.
3. Горский Д.П., Ивин А.А., Никифоров А.Л. Краткий словарь по логике. М,: Просвещение, 1991.
4. Ивин А,А. Искусство правильно мыслить. М,: Просвещение, 1991.
5. Ивин А. А, По законам логики. М., 1983.
6. Кириллов В. И. Упражнения по логике, М,, 1994.
7. Ковальски Р. Логика в решении проблем, М.: Наука, 1991.
8. Поварнин С. И. Искусство спора. М., 1995.