АКАДЕМИЯ ГРАЖДАНСКОЙ ЗАЩИТЫ

## Реферат по теме:

«Влияние математики на

философию и логику»

Выполнил: Русскин А. В.

Проверил: Ксенофонтов В. Н.

Новогорск - 2005

Содержание.

1. Введение……………………………………………………………3
2. Влияние математики на философию…………….………………..4
3. Соотношение математики и логики………………….…………...19
4. Заключение…………………………………………………………31
5. Литература………………………………………………………….32

1. Введение.

Математика оказала огромное влияние на философию и логику. Это просматривается в работах Зенона, Пифагора и пифагорейцев, Декарта, Рассела, Платона, Канта и многих других. Многие мыслители пришли к философии и логике через математику. Числа и числовые отношения рассматривались как ключ к пониманию вселенной и ее структуры. Так, Галилей говорил: “ Книга природы написана на языке математики.”

2. Влияние математики на философию.

# Влияние математики на философию просматривается в

знаменитых рассуждения древнегреческого философа Зенона «Ахиллес и черепаха», «Дихотомия» и др., называемых обычно *апо-риями* (затруднениями). Они были направлены будто бы против движения и существования многих вещей. Сама идея доказать, что мир — это одна-единственная и к тому же неподвижная вещь, нам сегодня кажется странной. Странной она казалась и древним. Нас-только странной, что доказательства, приводившиеся Зеноном, сразу же были отнесены к простым уловкам, причем лишенным в общем-то особой хитрости. Такими они и считались две с лишним тысячи лет, а иногда считаются и теперь. Посмотрим, как они формулиру-ются, и обратим внимание на их внешнюю простоту и незамыслова-тость.

В «Ахиллес и черепаха» говорится, что самое быстрое существо не способно догнать самое медленное, быстроногий Ахиллес ни-когда не настигнет медлительную черепаху. Пока Ахиллес добежит до черепахи, она продвинется немного вперед. Он быстро преодо-леет и это расстояние, но черепаха уйдет еще чуточку вперед.

И так до бесконечности. Всякий раз, когда Ахиллес будет достигать места, где была перед этим черепаха, она будет оказываться хотя бы немного, но впереди.

В «Дихотомии» обращается внимание на то, что движущийся предмет должен дойти до половины своего пути прежде, чем он достигнет его конца. Затем он должен пройти половину оставшейся половины, затем половину этой четвертой части и т.д. до бесконечности. Предмет будет постоянно приближаться к конечной точке, но так никогда ее не достигнет.

Это рассуждение можно несколько переиначить. Чтобы пройти половину пути, предмет должен пройти половину этой половины, а для этого нужно пройти половину этой четверти и т.д. Предмет в итоге так и не сдвинется с места.

Этим простеньким на вид рассуждениям посвящены сотни фило-софских и научных работ. В них десятками разных способов доказы-вается, что допущение возможности движения не ведет к абсурду, что наука геометрия свободна от парадоксов и что математика спо-собна описать движение без противоречия.

Обилие опровержений доводов Зенона показательно. Не вполне ясно, в чем именно состоят эти доводы, что они доказывают. Не ясно, как это «что-то» доказывается и есть ли здесь вообще доказа-тельство? Чувствуется только, что какие-то проблемы или затруд-нения все-таки есть. И прежде чем опровергать Зенона, нужно выяс-нить, что именно он намеревался сказать и как он обосновывал свои тезисы. Сам он не формулировал прямо ни проблем, ни своих реше-ний этих проблем. Есть, в частности, только коротенький рассказ, как Ахиллес безуспешно пытается догнать черепаху.

Извлекаемая из этого описания мораль зависит, естественно, от того более широкого фона, на котором оно рассматривается и меня-ется с изменением этого фона.

Рассуждения Зенона сейчас, надо думать, окончательно выведены из разряда хитроумных уловок. Они, по словам Б. Рассела, «в той или иной форме затрагивают основания почти всех теорий прост-ранства, времени и бесконечности, предлагавшихся с его времени до наших дней».

Понять, какой вклад внесла математика в философию, можно, изучая учения Пифагора и пифагорейцев. Интересно понимание числа у ранних пифагорейцев.

С самого начала существования религиозного ордена, учрежденного Пифагором, в нем ставились практически-нравственные и религиозные цели: очищение человеческой души для спасения ее от круговорота рождений и смертей. Поэтому существовал целый ряд строгих предписаний, регламентировавших жизнь членов ордена. Одним из важнейших средств очищения пифагорейцы считали научные занятия, прежде всего занятия математикой и музыкой. Как отмечает А.О. Маковельский, "вера в религиозно-катартическое действие науки дала силы Пифагору положить основание чистой математики".

Действительно, именно в Греции мы наблюдаем изменение роли математического знания по сравнению с той, какую оно играло в Египте и Вавилоне. Там математика, как уже отмечалось, носила практически-прикладной характер, она была техникой расчета, решения задач. При характерном для древнего мира делении всех сфер жизни на сакральные и профанные (священные и светские) математика принадлежала ко второй. Без ее помощи не могли обойтись землемеры и купцы, строители и мореходы, но она не имела непосредственного отношения к мифологическим представлениям и религиозным культам. Но это не противоречит тому известному факту, что некоторым числам в древнем мире придавалось сакрально-мифологическое значение; к ним относится, например, число пять в Древнем Китае или число семь, игравшее важную роль в религиозно-мифологических и магических представлениях вавилонян и египтян более чем за два тысячелетия до н.э. Вот что пишет американская исследовательница Л. Торндайк, анализируя сакральное значение семерки в Древней Вавилонии: "В древневавилонском эпосе о сотворении мира, например, семь духов бури, семь злых болезней, семь областей подземного мира, закрытых семью дверями, семь поясов надземного мира и неба и т.д. ...Число семь было очень распространено, носило священный и мистический характер, считалось совершенным и обладающим особой силой"21. Число семь считалось сакральным не только у вавилонян, но и у древних евреев и греков: в Ветхом Завете, у Гесиода и Гомера семерка выступает как священное число. Как мы увидим далее, ранним греческим философам, и особенно пифагорейцам, отнюдь не было чуждо выделение сакральных чисел, к которым, кроме семерки, относили также тройку, а позднее - десятку (декаду). Но не само это выделение священного числа и не перечисление различных "семериц" или "декад" из разных областей природной жизни или человеческих установлений составляли главное направление развития пифагорейской мысли.

Что же касается древних восточных культур, то в них математическое исчисление, носившее практически-прикладной характер, не было внутренне связано с выделением священных чисел - семерок, пятерок или троек. Священное число выступало вовсе не как математическая реалия - к нему обращались скорее либо в магических заклинаниях, где перечислялись различные "семерицы" или практиковались тройные, семеричные и т.д. ритуальные повторы, либо в других ритуальных культовых действиях. Подбирались и перечислялись группы явлений или процессов, которые представали как воплощение "семериц" и "троек", и эта процедура тоже представляла собой одну из древних форм упорядочения и классификации явлений, подобно тому как в племенах первобытных народов упорядочение производится, например, по странам света, которым соответствуют определенные цвета (черный, белый, красный и желтый), виды животных и т.д. Таким образом, ни развитие математической техники счета и решения задач, принадлежавшее сфере хозяйственно-практической, ни выделение священных чисел, имевшее ритуальное, культовое и мифологическое значение, не привело на Древнем Востоке к возникновению математики как системы теоретического знания.

Пифагорейцы первыми возвысили математику до ранее неведомого ей ранга: числа и числовые отношения они стали рассматривать как ключ к пониманию вселенной и ее структуры. Они впервые пришли к убеждению, что "книга природы написана на языке математики",

как спустя почти два тысячелетия выразил эту мысль Галилей.

Для представлений о науке, как они сложились к XVII-XVIII вв., особенно у философов эпохи Просвещения, характерно убеждение в том, что наука по своему существу противоположна религии. Это представление отражает тот период в развитии науки, когда ученым приходилось вести борьбу с религией за возможность свободного научного исследования. Но применительно к другим периодам развития науки это представление оказывается не всегда справедливым. Исторически научное знание вступало в самые различные - и порой весьма неожиданные - отношения с мифологической, религиозной и художественной формами сознания. Так, перемещение математических исследований из сферы практически-прикладной в сферу философско-теоретическую, еще не отделившуюся от религиозно-мистического восприятия мира, послужило тем историческим фактором, благодаря которому математика превратилась в теоретическую науку.

Нет ничего удивительного в том, что мыслители, впервые попытавшиеся не просто технически оперировать с числами (т.е. вычислять), но понять саму сущность числа, сущность множества и характер отношений различных множеств друг к другу, решали эту задачу первоначально в форме объяснения всей структуры мироздания с помощью числа как первоначала. Прежде чем появилась математика как теоретическая система, возникло учение о числе как некотором божественном начале мира, и это, казалось бы, не математическое, а философско-теоретическое учение сыграло роль посредника между древней восточной математикой как собранием образцов для решения отдельных практических задач и древнегреческой математикой как системой положений, строго связанных между собой с помощью доказательства. Вот почему нам кажется неправомерной попытка некоторых историков науки принципиально отделить пифагорейских математиков эпохи Платона от ранних пифагорейцев.

Исторические источники свидетельствуют, что Пифагор занимался не только математикой. Так, Гераклит упрекает его в "многознании": "Пифагор, сын Мнесарха, предался исследованию больше всех людей и, выбрав для себя эти сочинения, составил себе (из них) свою мудрость: многознание и обман". Помимо учения о бессмертии души, ее божественной природе и ее перевоплощениях, Пифагор учил о том, что все в мире есть число, занимался исследованием числовых отношений как в чистом виде, так и применительно к музыкальной гармонии, которая, по преданию, именно им была открыта. Ему, видимо, принадлежит также учение о беспредельном и пределе и представление о беспредельном как четном, а о пределе - как нечетном числе.

С представлением о противоположности предела и беспредельного связана также космология ранних пифагорейцев, согласно которой мир вдыхает в себя окружающую его пустоту и таким образом в нем возникает множественность вещей. Число, т.е. множество единиц, возникает тоже из соединения предела и беспредельного. Мир, следовательно, мыслится здесь как нечто завершенное, замкнутое (предел), а окружающая его пустота - как нечто аморфное, неопределенное, лишенное границ - беспредельное. Противоположность "предел - беспредельное" первоначально была близка к таким мифологическим противоположностям, носящим ценностно-символический характер, как свет - тьма, доброе - злое, чистое - нечистое и т.д. Из этих противоположностей строится все существующее, и само число рассматривается тоже как состоящее из противоположностей - чета и нечета. Как сообщает Аристотель, "элементами числа они ( пифагорейцы) считают чет и нечет, из коих первый является неопределенным, а второй определенным; единое состоит у них из того и другого - оно является и четным и нечетным, число <образуется> из единого, а <различные> числа, как было сказано, это - вся вселенная".

В пифагорейском союзе первоначально уделялось много внимания числовой символике. Так, к уже ранее найденным семеркам - семь элементов, семь сфер вселенной, семь частей тела, семь возрастов человека, семь времен года и т.д. - пифагорейцы прибавили семь музыкальных тонов и семь планет. Однако уже первые операции над числами привели к тому, что семерка уступила место десятке. Десятка "рождает" - значит, в десятке уже скрыто содержится ряд важных числовых соотношений и фигур.

Новое понимание числа могло возникнуть только тогда, когда существенным стало различение чисел четных и нечетных, первых (простых) и вторых (сложных) и когда стремление проанализировать отношения между числами, формы их связи между собой привело к установлению отношений прежде всего двух последовательных чисел натурального ряда, n и n + 1. В этом смысле первая десятка, по убеждению пифагорейцев, уже содержит в себе все возможные типы числовых отношений (а пифагорейцы признавали 10 видов этих отношений).

Делая, таким образом, первые - и решающие - шаги в создании математики как теоретической системы, ранние пифагорейцы в то же время рассматривали открываемые ими отношения чисел как символы некоторой божественной реальности. Согласно свидетельству Прокла (из комментариев к "Началам" Евклида), "у пифагорейцев мы найдем, что одни углы посвящены одним богам, другие - другим. Так, например, поступил Филолай, посвятивший одним богам угол треугольника, другим - (угол) четырехугольника и иные (углы) иным (богам), и приписавший один и тот же (угол) нескольким богам, и одному и тому же богу несколько углов соответственно различным силам, (находящимся) в нем"40.

Здесь нетрудно увидеть единство, в каком для сознания пифагорейцев выступали соотношения чисел и связь божественных сил и природных стихий.

Итак, декада содержит в себе все виды числовых отношений, а эти отношения лежат в основе как природных процессов, так и жизни человеческой души. Числовые отношения составляют самую сущность природы, и именно в этом смысле пифагорейцы говорят, что "все есть число". Поэтому познание природы возможно только через познание числа и числовых отношений. Платон ограничил значение числа, полагая, что последнее не само выражает сущность всего существующего, а есть лишь путь к постижению этой сущности. Число, как мы дальше увидим, Платон помещает как бы посредине между чувственным миром и миром истинно сущего. Аристотель подверг критике пифагорейский тезис "все есть число" с другой позиции, чем Платон. Если для пифагорейцев математика лежит в фундаменте всякого знания о природе, то Аристотель в корне переосмысливает соотношение математики и физики, создавая направление научного исследования ("научную программу"), в корне отличное от пифагорейского.

В декаде, по убеждению пифагорейцев, не только содержатся все возможные отношения чисел, но она являет также природу числа как единства предела и беспредельного. Декада - это "предел" числа, ибо, перешагнув этот предел, число вновь возвращается к единице. Но поскольку можно все время выходить за пределы декады, поскольку она не кладет конца счету, то в ней присутствует и беспредельное. В этом отношении декада есть как бы модель всякого числа, числа вообще. Как мы уже отмечали, декада пифагорейцев предстает также как священная четверица, которая, по преданию, была клятвой пифагорейцев.

Таким образом, в астрономии, музыке, геометрии и арифметике пифагорейцы увидели общие числовые пропорции, гармонические соотношения, познание которых, согласно им, и есть познание сущности и устройства мироздания. Из отрывков, которые древние свидетельства приписывают Филолаю, мы видим, что пифагорейцы уже в V в. до н.э. размышляли над вопросом о возможности познания и сформулировали положение, впоследствии ставшее кардинальным для математического естествознания, а именно: точное знание возможно лишь на основе математики. У Платона же мы находим изложение пифагорейского учения о числовых пропорциях геометрических величин, а также систематизацию различных областей математического знания, соединение их в единую систему наук.

Аристотель сообщает следующее: "...пифагорейцы признают одно - математическое - число, только не с отдельным бытием, но, по их словам, чувственные сущности состоят из этого числа: ибо все небо они устраивают из чисел, только у них это - не числа, состоящие из <отвлеченных> единиц, но единицам они приписывают <пространственную> величину; а как получилась величина у первого единого, это, по-видимому, вызывает затруднение у них".

Пространственные вещи у пифагорейцев состоят из чисел. А это, в свою очередь, возможно в том случае, если, как и подчеркивает Аристотель, числа имеют некоторую величину, так что могут мыслиться занимающими пространство. И не в том смысле, что то или иное число можно изобразить в качестве геометрической фигуры - как, например, 4 - это площадь квадрата со стороной, равной 2, а именно в том смысле, что само число, как единица, двойка, тройка и т.д., пространственно, а значит, тело состоит, складывается из чисел.

Но в таком случае единицы, или монады, пифагорейцев естественно предстают как телесные единицы, и не случайно пифагореец Экфант, по сообщению Аэтия, "первый объявил пифагорейские монады телесными".

При этом единицы, или монады, должны быть неделимыми - это их важнейший атрибут, без которого они не могли бы быть первыми началами всего сущего. То, что пифагорейцы действительно мыслили числа как неделимые единицы, из которых составлены тела, можно заключить из следующей полемики с ними Аристотеля: "То, что они не приписывают числу отдельного существования, устраняет много невозможных последствий; но что тела у них составлены из чисел и что число здесь математическое, это - вещь невозможная. Ведь и говорить о неделимых величинах неправильно, и <даже> если бы это было допустимо в какой угодно степени, во всяком случае единицы величины не имеют, а с другой стороны, как возможно, чтобы пространственная величина слагалась из неделимых частей? Но арифметическое число во всяком случае состоит из <отвлеченных> единиц; между тем они говорят, что числа - это вещи; по крайней мере, математические положения они прилагают к телам, как будто тела состоят из этих чисел". В пифагорейском понимании числа, таким образом, оказываются связанными два момента: неотделенность чисел от вещей и соответственно составленность вещей из неделимых единиц – чисел.

Связь математики и философии так же видна в рассуждениях Канта об априорности восприятия пространства и времени.

Кант пересматривает прежнее представление о человеческой чувственности, согласно которому чувственность лишь доставляет нам многообразие ощущений, в то время как принцип единства ис-ходит из понятий разума.

Многообразие ощущений, говорит Кант, действительно дает нам чувственное восприятие; ощущение – это содержание, материя чувственности. Но помимо того наша чувственость имеет свои до-опытные, априорные формы, в которые с самого начала как бы “ук-ладываются” эти ощущения, с помощью которых ощущения как бы упорядочиваются. Эти формы – пространство и время. Пространство – априорная форма внешнего чувства ( или внешнего созерцания), тогда как время – априорная форма чувства внутреннего (внутренне-го созерцания).

Синтетические суждения могут быть априорными в том случае, если они опираются на форму чувственности, а не на чувственный материал. А таковы, по Канту, именно суждения математики, кото-рая конструирует свой предмет, опираясь либо на чистое созерцание пространства (геометрия), либо на чистое созерцание времени (арифметика). Это не значит, конечно, что тем самым математика не нуждается в понятиях рассудка; но из одних только понятий, без об-ращения к интуиции, т.е. созерцанию пространства и времени, она не может обойтись. Исходные положения геометрии, например, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками, не могут быть получены аналитически, ибо, говорит Кант, из самого понятия прямой нельзя логически вывести признак величины расстояния; тут имеет место синтез разных понятий, а он не может основыватьься на случайном, единичном опыте, поскольку тогда математическое зна-ние не было бы всеобщим. Только чистая форма чувственности – пространство – позволяет нам, опираясь на созерцание, в то же вре-мя получить необходимую связь двух разных понятий. Мы чертим прямую линию и непосредственно видим, что она есть кратчайшее расстояние между двумя точками. Таким образом, рассмотрение пространства и времени не как форм бытия вещей самих не себе, а как априорных форм чувственности познающего субъекта позволяет Канту дать обоснование объективной значимости идеальных конст-рукций - прежде всего конструкций математики. Тем самым и дается ответ на вопрос: как возможны синтетические суждения a priori.

Интересны слова Бертрана Рассела: “Я пришел к философии через математику,или скорей через желание найти некоторые основания для веры в истинность математики. С ранней юности я страстно верил, что в ней может быть такая вещь, как знание, что сочеталось с большой трудностью в принятии многого того, что проходит как знание. Казалось, что наилучший шанс обнаружить бесспорную истину будет в чистой математике, однако некоторые из аксиом Евклида были, очевидно, сомнительными, а исчисление бесконечно малых, когда я его изучал, содержало массу софизмов, с которыми я не мог справиться сам. Но я не имел никаких оснований сомневаться в истинности арифметики, хотя тогда я не знал, что арифметика может рассматриваться как охватывающая всю традиционную чистую математику. В возрасте восемнадцати лет я прочел “Логику” Милля, но был глубоко разочарован его доводами для оправдания арифметики и геометрии. Я не прочел еще Юма, но мне казалось, что чистый эмпиризм (который я был расположен принять) должен скорее привести к скептицизму, чем к подтверждению выдвигаемых Миллем научных доктрин. В Кембридже я прочел Канта и Гегеля, так же как и Логику” Брэдли, которая глубоко повлияла на меня. (Брэдли Фрэнсис Герберт (1846—1924) — главный представитель английского абсолютного идеализма. Критиковал традицию британского номинализма и эмпиризма, а также ассоциативную психологию. По Брэдли, в процессе познания всегда дается нечто универсальное, поэтому ориентация эмпиристов на фиксацию и обобщение изолированных фактов несостоятельна. Объективно-идеалистическая метафизика Брэдли построена на противопоставлении противоречивой сферы “видимости” и подлинной реальности — “Абсолюта” Для его “Принципов логики” (1883) характерно влияние гегелевской диалектической логики и антипсихологистская установка. Брэдли негативно воспринял новую математическую логику *- прим.ред.).* Несколько лет я был учеником Брэдли, но примерно в 1898 г я изменил свои взгляды в значительной мере в результате дискуссии с Д. Э. Муром Я не мог больше полагать, что познание оказывает влияние на то, что познается. Также я убедился в справедливости плюрализма Анализ математических утверждений склонил меня к тому, что они не могут быть объяснены даже как частичные истины, если не допускается плюрализм и реальность отношений Случай привел меня в это время к изучению Лейбница, и я пришел к заключению (впоследствии подтвержденному мастерскими исследованиями Кутюра), что большинство его характерных мнений было обязано чисто логической доктрине, что каждое суждение имеет субъект и предикат. (Кутюра Луи (1868-1914) - французский логик, одним из первых обративший внимание на современное значение логических идей Лейбница) Эту доктрину Лейбниц разделял со Спинозой, Гегелем и Брэдли. Мне показалось, что если ее отвергнуть, то весь фундамент метафизики этих философов разрушится. Я, таким образом, вернулся к проблеме, которая вначале привела меня к философии, а именно к основаниям математики, применив к ней новую логику, разработанную в основном Пеано и Фреге, которая доказала (по крайней мере, так я считаю) значительно большую плодотворность, чем логика традиционной философии. (Пеано Джузеппе (1858-1932) - итальянский математик, разработавший систему логических аксиом, на основе которых должна была строиться арифметика). В первую очередь я обнаружил, что многие из прежних философских аргументов о математике (заимствованных в основном от Канта) оказались тем временем несостоятельными благодаря прогрессу математики. Неевклидовы геометрии подорвали аргументацию трансцендентальной эстетики. Вейерштрасс показал, что дифференциальное и интегральное исчисления не требуют концепции бесконечно малых, и, следовательно, все то, что было сказано философами о таких предметах, как непрерывность пространства, времени и движения должно рассматриваться как явная ошибка. (Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815-1897) - немецкий математик, занимавшийся логическим обоснованием математического анализа). Кантор освободил концепцию бесконечного числа от противоречий и тем самым справился с антиномиями как Канта, так и Гегеля. Наконец, Фреге показал детально, как арифметика может быть выведена из чистой логики без привлечения каких-либо новых идей или аксиом, таким образом, опровергнув утверждение Канта, что “7 + 5 - 12” является синтетическим — по крайней мере в обычной интерпретации этого утверждения. (Кантор Георг (1845—1918) - немецкий математик, один из создателей современной теории множеств. Фреге Готлоб (1848—1925) — немецкий математик и логик, один из создателей логической семантики). Поскольку все эти результаты были получены не с помощью какого-либо героического метода, а посредством терпеливых детальных рассуждений, я стал думать, что философия, вероятно, заблуждалась, применяя героические средства для разрешения интеллектуальных трудностей, которые можно было преодолеть просто с помощью большей внимательности и аккуратности в рассуждениях. Такой взгляд со временем все больше и больше укреплялся и привел меня к сомнению относительно того, отличается ли философия как исследование от науки и обладает ли она своим собственным методом, являющимся чем-то большим, чем неудачным наследием теологии.”

3. Соотношение математики и логики.

Чтобы правильно поставить сам вопрос о соотношении математики и логики, необходимо, очевидно, рассмотреть его в исторической перспективе. Это обстоятельство не игнорирует и сам Б. Рассел. «Математика и логика,— пишет он,— исторически говоря, были целиком различными занятиями. Математика обычно ассоциировалась с естествознанием, логика — с греками. Но обе развились в настоящее время: логика стала более математической, а математика — более логической. Следствием этого является то, что сейчас стало совсем невозможно провести разграничительную линию между ними: фактически они стали единым исследованием. Они отличаются друг от друга так же, как юноша от мужчины: логика есть юность математики, а математика — зрелость логики».

В этом отрывке Рассел справедливо подчеркивает тесное взаимодействие между математикой и логикой в процессе их исторического развития, выявившееся с особой силой в нашем столетии. Именно в силу этого оказывается весьма трудным решить, какая из этих. наук генетически предшествовала другой. Многие специалисты склоняются к мысли, что математическое знание по крайней мере в полуэмпирической форме существовало задолго до того, как были открыты правила дедуктивных рассуждений. Прежде чем греческие геометры стали логически систематизировать результаты, найденные их предшественниками — египтянами, должна быжа существовать довольно развитая совокупность математических знаний, непосредственно связанных с различными вычислениями и измерениями. С другой стороны, трудно допустить, чтобы при получении этого знания не применялись те или иные принципы позднее возникшей логики.

Применение логических правил рассуждения нельзя отождествлять с обоснованием и дальнейшей разработкой этих правил. Человек, не знакомый с логикой, может тем не менее рассуждать правильно, т. е. приходить к истинным заключениям. Разумеется, только у греков математика превратилась в систематизированное научное знание, стала теоретической наукой, в которой широко использовались не только дедуктивные рассуждения, но и позднее возникший аксиоматический метод.

Все это показывает, что генетически логика вряд ли могла возникнуть раньше математики. Во всяком случае, если говорить о ясно сформулированных принципах дедуктивных рассуждений и их использовании и математике, то впервые они были развиты греческими философами. Аристотель и стоики в значительной мере усовершенствовали и систематизировали эти принципы, так что их работа представляет скорее не начало, а завершение длительного этапа многочисленных исследований в этой области, восходящих еще к VI в. до н. э.

Вряд ли, однако, тесную взаимосвязь и взаимодействие между логикой и математикой можно рассматривать как аргумент в пользу их идентичности, или тождества. И такое доказательство их идентичности вовсе не есть дело деталей, как в этом пытается уверить нас Рассел, хотя, как показала дальнейшая критика, не все эти детали являются убедительными и бесспорными. «...Начиная с предпосылок,— пишет он,— которые всеми будут допускаться как принадлежащие к логике, и придя посредством дедукции к результатам, которые с очевидностью принадлежат к математике, мы находим, что там не имеется пункта, где может быть проведена разграничительная линия, с логикой слева и математикой справа».

Но как мы уже видели, такие аксиомы, как аксиома бесконечности или аксиома свободного выбора, относятся скорее к теории множеств, т. е. к математике, чем к логике. Даже само определение понятия числа в терминах теории классов, которое играет такую важную роль в осуществлении программы логицизма, является в сущности определением в рамках теории множеств, поскольку термин класс всегда можно заменить термином множество. Наконец, некоторые исходные понятия теории множеств неявно используются в самом построении логических исчислений, которые применяются Фреге и Расселом при дедукции теорем из аксиом.

Все это показывает, что в подлинном смысле слова речь может идти не о строгой дедукции всей чистой математики из логики, а о тесной взаимосвязи между ними в процессе математического познания и исследования оснований обеих наук. Впрочем, это обстоятельство в ряде мест своей книги «Введение в математическую философию» и в приведенных выше цитатах признает, кажется, и сам Рассел.

С философской точки зрения при решении вопроса о соотношении логики и математики более существенными являются аргументы, относящиеся не столько к технической стороне самих деталей дедукции математики из логики, сколько к выяснению общности и различия их объектов исследования. Как мы подробно покажем в последней главе, предметом изучения современной математики являются различные абстрактные формы и структуры, которые обладают той особенностью, что в рамках математического исследования они могут рассматриваться независимо от конкретного содержания предметов и процессов, которым присущи эти формы и структуры. Простейшими из таких структур являются количественные отношения и пространственные формы, которые изучаются в элементарной и высшей математике. В процессе дальнейшего абстрагирования и обобщения возникают новые более сложные структуры и их комбинации, которые были названы абстрактными структурами. Такие структуры оказываются применимыми для изучения не только отношений между величинами, числами и обычными пространственными фигурами, но и объектов совершенно иной природы. С их помощью можно исследовать, например, логические отношения между высказываниями и анализировать теорию дедуктивного вывода, как это делается в математической логике.

При рассмотрении вопроса о соотношении логики и математики нередко возникают недоразумения в силу неоднозначности употребления самого термина «логика».

Во-первых, можно говорить о логике как науке, изучающей законы правильного мышления. В этом смысле логика понимается как исследование структур и форм мысли и поэтому справедливо называется формальной логикой.

Во-вторых, в рамках самой формальной логики можно выделить такую важную и доминирующую ее отрасль, как теория дедуктивного вывода, и соответственно говорить о дедуктивной логике.

В-третьих, нередко под логикой понимают применение математических методов для построения формальной теории дедуктивного вывода. Для этого обычно строятся различные формально-логические системы, или языки, с помощью которых оказывается возможным точно выразить логические взаимосвязи между высказываниями в процессе вывода. Поскольку при этом высказывания рассматриваются как некоторые дискретные объекты, то в принципе вполне допустимо интерпретировать отображающие их формальные системы с помощью объектов нелогической природы. Хорошо известно, например, что исчисление высказываний интерпретируется с помощью релейно-контактных схем и других технических устройств. Этот пример показывает, что в данном случае речь действительно идет о применении некоторых общих формальных методов к логике. Поэтому совершенно справедливо такая отрасль исследований получила название математической логики.

В-четвертых, в рамках не только общей, но и математической логики можно выделить целый ряд разделов, теорий и формально-логических систем, которые исследуют разные аспекты не только дедуктивной теории вывода, но и тесно связанных с ней проблем, например определения терминов и понятий, семантической теории значений и т. п. В этом смысле часто говорят, например, о многозначной, модальной, вероятностной, эпистемической, нормативной и других логиках. Подобного рода не-классические логики анализируют такие типы логического вывода, в котором высказывания характеризуются не с помощью двух значений истинности, какими являются истина и ложь, но учитывают и некоторые иные их характеристики, например возможность и необходимость, степень подтверждения, или вероятность и другие. В настоящее время исследования по неклассическим логикам получили заметный размах в связи с потребностями не только специальных наук, но и философии, в силу чего возникло даже особое направление под названием философской логики.

Какую же логику имеют в виду Рассел и его последователи, когда говорят о дедукции из нее чистой математики?

Как мы уже видели, для такой дедукции у Фреге используется формальная система «Основных законов арифметики», а у Рассела и Уайтхеда — логицистическая система «Principia Mathematica». Поэтому когда они говорят о логике, то подразумевают под ней математическую логику, представленную в виде формализованной логико-математической системы, т. е. речь в этом случае идет о логике в четвертом значении термина «логика». При этом важно обратить внимание на то, что в такой системе логические термины и принципы строго не отделены от математических, а иногда отдельные принципы вроде аксиомы бесконечности и свободного выбора без какой-либо аргументации объявляются логическими, хотя большинство математиков относит их к теории множеств, а следовательно, к математике.

Если бы логицисты под логикой понимали математическую логику в собственном смысле этого слова, т. е, подразумевали под ней применение математических методов к логике, что соответствует третьему значению термина «логика» в вышеприведенной классификации, тогда было бы невозможно вывести из нее чистую математику. К тому же при таком понимании следовало скорее рассматривать саму логику или по крайней мере ее формально-логические системы как часть математики, кав науки об абстрактных структурах. Именно так подходят к решению этого вопроса формалисты и интуиционисты.

Таким образом, несостоятельность программы логицизма, выдвинутой Г. Фреге и Б. Расселом на ранней стадии эволюции этого направления, подтверждается не только чисто научными, логико-математическими аргументами, но более общими, философскими соображениями. Вот почему логицизм в той форме, в какой он был сформулирован Б. Расселом и который часто называют радикальным, в настоящее время утратил прежнюю популярность.

В 60-е годы известный американский логик и математик Алонзо Чёрч на Стэнфордском конгрессе по логике, методологии и философии науки предложил новый вариант логицизма, который можно назвать умеренным логицизмом". Радикальный логицизм, по мнению Чёрча, характеризует отношение между логикой и математикой, исходя из двух основных принципов:

(1) все математические понятия могут быть определены в терминах чисто логических понятий или, как предпочитает говорить Чёрч, «математический словарь есть

часть логического словаря»;

(2) все математические предложения (аксиомы, постулаты) могут быть выведены из чисто логических законов посредством использования чисто логических способов рассуждения.

Чёрч считает, что второй принцип радикального логицизма оказался несостоятельным и поэтому математику нельзя рассматривать буквально как часть логики. Что касается первого принципа, то он склоняется к мнению, что утверждение о том, что математический словарь есть часть логического словаря, подтверждается всем ходом исследований по основаниям математики. Такое заявление, хотя и не говорит о том, что математика буквально составляет часть логики, но оно устанавливает первичность логики по отношению к математике в смысле предшествования. Это значит, что никакой математический термин, утверждение и доказательство не могут быть осмысленными, если не будут осмысленны соответствующие логические термины. Поскольку обратное не имеет места, то в строгом смысле здесь можно говорить о первичности логики по отношению к математике только в смысле обоснования, т. е. логика необходима для построения математики.

Что же касается заявления умеренного логицизма о том, что математический словарь составляет часть логического словаря, то обоснованность его зависит от ответа на главный вопрос: определимо ли понятие множества (или класса) и некоторые тесно связанные с ним теоретико-множественные понятия в чисто логических терминах? Рассел и его последователи считают понятие множества понятием логики и соответственно этому рассматривают теоретико-множественные аксиомы, в том числе и аксиому бесконечности, как логические аксиомы. Сторонники умеренного логицизма, хотя и отвергают полное отождествление теории множеств в его аксиоматической форме с логистической системой, тем не менее молчаливо допускают экспликацию понятия множества в чисто логических терминах. Некоторые вообще считают этот вопрос чисто терминологическим. Большинство же творчески работающих математиков и специалистов по ее основаниям выступают против растворения теории множеств в логике. Конечно, подобного рода вопросы нельзя решать путем подсчета голосов.

Какие же аргументы можно выдвинуть в пользу того, что понятие множества, хотя и является весьма общим и абстрактным, но тем не менее специфично именно для математики, а не для логики?

Во-первых, понятие множества, как и формализующие его аксиоматические системы, можно интерпретировать с помощью объектов самой различной природы. Логические же термины во всех интерпретациях имеют одно и то же значение. Это, разумеется, не значит, что эти термины и логические связки, такие, как отрицание, конъюнкция и т. п., во всех логических системах, например классической и конструктивной, понимаются одинаково. Но если мы выбрали определенную логику, то ее термины, операции и правила вывода должны пониматься всегда одинаково, независимо от интерпретации других математических терминов.

Во-вторых, понятие множества в прежнем, канторов-ском, смысле, как мы видели, оказалось затронутым парадоксами. Поэтому в настоящее время оно уточняется с помощью различных аксиоматических систем. Эти системы часто исходят из разных задач и оказываются взаимно несовместимыми. К тому же результаты Гёделя и П. Коэна свидетельствуют о возможности существования несовместимых друг с другом теорий множеств в рамках одной и той же аксиоматизации. Если мы согласимся включить такие несовместимые друг с другом аксиоматические теории множеств в состав логики, тогда последняя превратится в весьма запутанную и внутренне противоречивую науку.

В-третьих, против включения теории множеств и тем более всей чистой математики в состав логики свидетельствует и тот факт, что некоторые основные арифметические и теоретико-множественные понятия используются, хотя и неявно, уже в самом процессе построения формально-логических систем, которые впоследствии применяются для дедукции математики из логики. В самом деле, уже в исчислении высказываний мы апеллируем к счетно бесконечному списку пропозициональных переменных и других неопределяемых символов исчисления. Все это показывает, что хотя логика и необходима для построения чистой математики, но, с другой стороны, она уже предполагает некоторые фундаментальные понятия арифметики и теории множеств.

В-четвертых, сам характер логики как нормативного мышления предполагает, что эти мыслительные операции должны совершаться над некоторыми внелогическими объектами. Это обстоятельство справедливо подчеркивают как формалисты, так и интуиционисты. Утверждение Гильберта о том, что математика не может целиком основываться на логике. В качестве предварительного условия для применения логики он считает необходимым наличие определенных внелогических конкретных объектов. По мнению Карри, сказать, что математика есть логика,— это значит заменить один неопределенный термин другим.

Интуиционисты считают логику частью математики, а ее принципы наиболее общими теоремами математики. «Логические теоремы,— подчеркивает Гейтинг,— являются математическими теоремами. Логика не может служить основанием математики, напротив, она представляет концептуально усложненную и утонченную часть математики». Отношение между логикой и математикой, по его мнению, примерно таково же, как отношение между частными и общими утверждениями математики. Нo не всякое общее утверждение математики относится к логике.

Дискуссии, которые возникают в связи с отношением логики и математики, очень часто происходят из-за неопределенности исходных терминов. Не составляют здесь исключения и формально-логические системы, с помощью которых обычно пытаются осуществить дедукцию математики из логики. Действительно, в такой формализованной системе, как «Principia Mathematica», чисто логическая часть не отделена от математической. Естественно поэтому Рассел мог бросить вызов и заявить: «Если существуют люди, которые не допускают тождества логики и математики, мы можем поспорить с ними и попросить их указать нам, в каком пункте в последовательности определений и дедукций «Principia Mathematica» кончается логика и начинается математика» ".

Конечно, в такой ситуации спор окажется беспредметным. Но, как показал Д. А. Бочвар, в формализованной системе типа «Principia Mathematica» всегда можно выделить чисто логическую часть и специфическую, математическую. Он справедливо отмечает, что в логике мы никогда не имеем дела с индивидуальными предикатами, такими, как «быть числом», «конгруэнтный», «параллельный» и т. п. Когда логическая система включается в состав более обширной формализованной системы, в которой наряду с логическими терминами и предикатами встречаются математические, пусть даже неявно, то это не приводит к поглощению математики логикой.

Формализованная аксиоматическая теория математики, как и любой другой науки, обязательно содержит индивидуальные термины и предикаты специальной теории. Без них не было бы смысла говорить о применении логики к другим наукам. Не случайно поэтому при формализации математики говорят о логико-математических системах. «Математика,— резюмирует Д. А. Бочвар,— не выводима из формальной логики, ибо для построения математики необходимы аксиомы, устанавливающие определенные факты области объектов и прежде всего — существование в последней определенных объектов. Но такие аксиомы обладают уже внелогической природой».

Все вышесказанное, на наш взгляд, достаточно убедительно показывает, что о приоритете логики над математикой нельзя говорить не только в генетическом отношении, т. е. в смысле исторического возникновения этих наук, но и в смысле обоснования математики всецело и исключительно с помощью понятий и принципов логики. Можно поэтому присоединиться к мнению американского философа Г. Мельберга, который считает, что между математическими и логическими понятиями существует симметрическое отношение, которое не может привести к установлению ассимметрического отношения приоритета логики над математикой ". В связи с этим он выдвигает взамен радикального и умеренного логицизма логицизм плюралистический.

Такой логицизм в сущности весьма далек от тех амбициозных программ, которые пытались осуществить основатели этого направления обоснования математики. Пожалуй, в нем сформулированы те рациональные идеи, которые остаются в результате критического анализа логицистической программы. Мельберг называет его плюралистическим потому, что он не дает никакой монополии какой-либо частной системе логики, будь то классическая двухзначная логика, или логика конструктивная, или какая-либо иная неклассическая логика.

Плюралистический логицизм особо подчеркивает роль логических законов при доказательстве теорем в аксиоматических системах математики. «Особенность математического познания, которую выделяет плюралистический логицизм,— пишет Мельберг,— состоит в том, что он подчеркивает, что для каждой математической теории существует некоторая логика, способная обеспечить необходимые средства дедукции всех существенных теорем этой теории, без обращения к какой-либо экстралогической интуиции». Тот факт, что логика играет решающую роль в развертывании математической теории, по его мнению, служит основанием для того, чтобы рассматривать эту концепцию как версию логицизма.

4. Заключение.

Анализируя работы Зенона, Пифагора, Платона, Канта, Рассела и других, можно сделать вывод о том, какой большой вклад внесла математика в философию. Мыслители не просто оперировали с числами, они пытались дать объяснение всей структуры мироздания с помощью числа как первоначала. Они уделяли много внимания числовой символике. Многие философы ассоциировали числа с различными понятиями мира. Поэтому благодаря пониманию числовых отношений приходили к разгадке мироздания.

Об одностороннем влиянии математики на логику говорить трудно, это спорный вопрос. На протяжении многих веков шли споры об этом.

1. Литература.
2. Гайденко П. История новоевропейской философии в ее связи с наукой.
3. Гайденко П. История греческой философии в ее связи с наукой.
4. Рузавин Г.И. Философские проблемы оснований математики.
5. Ивин А.А. Логика.
6. Рассел Б. Логический атомизм.