БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра ЭТТ

РЕФЕРАТ

На тему:

«Волновые процессы и элементы векторного анализа»

МИНСК, 2008

1. Введение. Волновые процессы.

При взаимодействии среды с физическими полями и упругими материальными объектами, в средах возникают возмущения. Одним из таких возмущений являются волны.

Волны представляют собой изменения состояния среды (возмущения), распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию, без переноса вещества. Математически процесс распространения волн описывается с помощью волнового уравнения. В наиболее общем виде волновое уравнение записывается:

 (1.)

Где t-время; x, y, z –пространственные декартовые координаты, W=W(x,y,z,t)-функция возмущения среды в точке с координатами x,y,z в момент времени t, с- параметр, характеризующий скорость, которая в предельном случае достигает скорости света, - оператор Д’Аламбера (даламбериан); Δ- оператор Лапласа (лапласиан).

Частными видами волнового уравнения является двухмерное и одномерное волновые уравнения. Волновое уравнение допускает разделение переменных по координатам и времени: W=W(x, y, z,) φ(t). В представленном виде волновое уравнение называют неоднородным, т.к. в его правой части стоит заданная функция координат и времени, т.е. W=f(x,y,z,t).

Для рассмотрения задач квантовой механики, изучающей законы движения частиц в области микромира (в масштабах- 10-6-10-13 см. со скоростями как меньше v<<c, так и сравнимых со скоростью света v≈c), в 1926 году Эрвином Шредингером было предложено новое уравнение. Он в волновое уравнение ввел постулат де Бройля λ=h/p. Это известное сегодня уравнение Шредингера:

 (2.)

Где h- постоянная планка; m- масса частицы; ψ- волновая функция частицы, U- потенциальная энергия частицы, - оператор Лапласа.

Строгое решение уравнения (2) сегодня осуществлено только для атома водорода, что позволяет считать вычисленные при решении уравнения Шредингера для атома водорода волновые функции точными. Но уже для двух электронного атома, имеющего электронную конфигурацию 1S2 точное решение уравнения Шредингера принципиально невозможно. Запишем выражение для потенциальной энергии атома гелия:

 (3.)

Здесь Z=2, заряд ядра; первые два числа учитывают притяжение первого и второго электрона ядром, третий член выражает часть потенциальной энергии, обусловленной взаимным отталкиванием электронов. Для многоэлектронных атомов с числом электронов больше двух точное решение уравнения Шредингера невозможно, поскольку в гамильтониан H полной энергии атома с n электронами и соответствующим зарядом ядра:

 (4.)

входят не только оператор кинетической энергии и оператор потенциальной энергии для электронов, притягиваемых ядром, но и оператор энергии отталкивания электронов друг от друга. Так как последний оператор имеет противоположный знак, исключается возможность разделения переменных и становится принципиально невозможным точное решение уравнения Шредингера для многоэлектронных атомов.

Все дальнейшие попытки рассмотрения квантово механических многоэлектронных систем основано на использовании различных приближений методов и моделей. Наибольшее распространение получила модель водородоподобных атомов. На основе этой модели в одноэлектронном приближении для многоэлектронных атомов рассматривается взаимодействие одного внешнего электрона с ядром, заряд которого экранирован всеми остальными внутренними электронами. Подчеркнем, что в данной модели предполагается, что остальные электроны равномерно экранируют заряд ядра во всех направлениях. Константе экранирования σ учитывает это экранирование:

Zэф=Z-σ

В этой модели соответствующие орбитали отличаются от орбиталей атома водорода радиальными составляющими R(r), но имеют идентичные угловые составляющие Ve,m  и следовательно формы s-,p-,d-,f- орбиталей будет такой же как и у атома водорода. Этот расчет многоэлектронных атомов, основанный на работах Слетера, называется водородоподобным. Дальнейшее более точное приближение основано на работах Хартри и Фокса. В этом приближении учитывается усредненное отталкивание одного данного электрона от каждого из остальных электронов. Волновые функции атома в методе Хартри-Фокс представляют собой произведение водородоподобных волновых функций.

2. Волны и скорости волн

2.1Основные положения. Понятие волны.

Волной называют распространение возмущения в непрерывной среде. Волна

может распространяться также в пространственно периодической структуре, т.е. в твердом теле.

Волну представляют как возмущение в пространстве и времени, т.е. заданием возмущения как функции координат r = c временем t.

Скалярное возмущение w=w(r,t). Векторное возмущение W=W(r,t).

Волны бывают различными и могут распространяться в различных случаях:

1. В случае одновременной волны вдоль струны средой является упругая струна. Возмущению отвечает отклонение струны.
2. Поверхностная волна может возникнуть в среде, которой является двумерная поверхность жидкости или кристалла. Возмущение представляет собой отклонение частиц жидкости или атомов твердого тела на поверхности от их положения равновесия.
3. Известны звуковые или акустические волны. Они могут распространяться в веществах, находящихся в различных агрегатных состояниях: газообразном, жидком, твердом.

Возмущение в этом случае представляет собой локальные изменения давления. Оно определяется средним локальным смещением атомов или молекул. В абсолютно твердом теле звуковые волны невозможны.

1. Электромагнитные волны могут распространяться в следующих случаях: вакууме, газе, жидкости и твердом теле. В этом случае возмущение представляет собой изменяющееся во времени электрическое и магнитное поля.
2. Волна может распространяться вдоль линейной цепочки. В этом случае

средой является линейно упорядоченное расположение идентичных

материальных точек m, расположенных на равных расстояниях и взаимодействующих друг с другом. Это взаимодействие задают коэф. жесткости. Возмущение представляет собой смещение этих точек вдоль цепочки.

Волна распространяется в среде как возмущение, обусловленное взаимодействием между частицами или возникающими локальными возмущениями. В большинстве случаев волна переносит энергию.

Различают продольные и поперечные волны. У поперечных волн возмущение перпендикулярно к направлению распространения волны (волны в струне, электромагнитные волны в вакууме, поверхностные волны). У поперечных волн в трехмерных средах имеют место поляризационные эффекты. В продольных волнах (например, звуковые волны в жидкостях и газах) возмущение параллельно направлению распространения. Поляризационных явлений в этих волнах нет. Различие продольных и поперечных волн в трехмерных средах следующие:

продольные волны: rot w(r,t)=0;

поперечные волны:div w(r,t)=0.

В кристаллах могут распространяться электромагнитные и акустические волны, содержащие как продольные, так и поперечные компоненты.

**2.2 Фазовая и групповая скорости.**

Фазовая и групповая скорости волны обозначаются соответственно U и Ur. Они принципиально отличаются друг от друга.

Фазовая скорость и характеризует скорость распространения гармонической волны (синусоидальной или косинусоидальной).

Распространение локального возмущения импульсного типа (волнового пакета) характеризуют групповой скоростью Ur . Она соответствует скорости, с которой переносится энергия в волне и передается сигнал.

Максимальная групповая скорость соответствует скорости света в вакууме.

Если групповая скорость и фазовая скорость в какой-либо волне отличаются говорят о наличии дисперсии. Дисперсия (рассеяние) - зависимость фазовой скорости гармонической волны от ее частицы .

2.3 Гармонические волны

Введем математическую интерпретацию возмущения в одномерной гармонической волне (w(x,t)).

 w(x,t)=W0cos(wt-kx-)= W0cos(2t-2)= W0cos(2t/T-2x/-)

W0-амплитуда; -фаза; w-круговая частота;

частота ; Т- период ; k- круговое волновое число ; - волновое число ; - длинна волны. При этом

;

Поясним рисунками для волн в фиксированном месте и в фиксированный момент времени .

 w(0,t) w(x,0)

 t x

 Т

Волновая картина в фиксированном Волновая картина в фиксир-й

месте. момент времени

Гармонические волны периодичны в пространстве и времени

В фиксированном месте:

 ;

В фиксированный момент времени;

 , ,

**2.4. Фазовая скорость**

Фазовая скорость и волны есть скорость распространения точек одинаковой фазы:

Эта скорость равна скорости гармонической волны. Фазовая скорость:

u=/k=

k=2 т.е.u=

Доказательство:

U

W(x,t)

t-kx- =const дифференцируем

t-k, U=lim(

u

W

W(x,t+)

U

X

Ux

x

UЕ=Ux/cos т.е. т.к. cos<1,.

то фазовая скорость может превышать скорости света

# Элементы векторного анализа

 Необходимо уметь анализировать не только скалярные, но и векторные функции точки.Скалярные функции: температура неравномерно нагретого тела, плотность неоднородного тела и т. д.Векторные функции: скорость частиц текущей жидкости, сила земного притяжения, магнитное и электрическое напряжение электрического поля.Рассмотрение скалярных и векторных функций точки привело к построению теории поля.

 Векторное поле а(М) называется дифференцируемым в точке М, если оно определено в окрестности точки М и если приращение ∆a=a(M’)-a(M) поля может быть представлено в виде:

 ∆a=А(∆r)+E(∆r);

∆r=**MM’**; A и E – линейные операторы;

А – не зависит от ∆r; E зависит, при ∆r=0 E=0;

 Необходимое и достаточное условие дифференцируемости векторного поля **а** заключается в дифференцируемости его координат P, Q, R. При этом линейный оператор А изображается матрицей:

 *дР/дх, дР/ду, дР/дz*

 А= *дQ/дх, дQ/ду, дQ/дz*

 *дR/дх, дR/ду, дR/дz*

и вектор-функция А(∆r) имеет вид:

 A(∆r)=1/2{A(∆r)+A\*(∆r)}+1/2[**p**A(r)].

#  Дивергенция

 Сумма диагональных элементов матрицы, представляющей симметричную линейную вектор-функцию ½{A(∆r)+A\*(∆r)} не зависит от выбора системы координат: она называется дивергенцией (расхождением) векторного поля **а** и обозначается div**a:**

 div**a**=*дP/дх+дQ/ду+дR/дz.*

Вектор **Р** называется вихрем (ротором) поля **а** и записывается в виде:

 rot**a**=(*дR/ду-дQ/дz ,дР/дz-Rд/дх, дQ/дх-дР/ду* );

Если V поле скоростей текущей жидкости и rot**V≠**0, то частица движется по замкнутым линиям (образуются вихри). div**V** в этом случае характеризует интенсивность источника div**V**>0 и стока div**V**<0, находящегося в этой точке или отсутствие источника и стока.

 Сегодня общепринято представлять уравнения Максвелла в векторной форме. Описания в декартовых координатах менее информативно.

Мы в основном будем пользоваться следующимиобозначениями:

1.Всегда используется правая системакоординат: т.е. такая вкоторой положительная ось Х совмещается с осью У,если наблюдатель смотрит вдоль положительного направления оси Z.

2.Векторы обозначаются буквами:

**Е** – жирный шрифт – вектор;

Е – его модуль

е – единичный вектор в направлении вектора **Е**.

Амплитуда вектора, который изменяется по синусоиде, обозначается символом с индексом:

 **Е=**еЕ

и (5)

 Е=Ео ехрi(t-xz).

3.Произведение двух векторов **Е** и **Н** записывается

 - скалярное произведение модуль котрого равен ЕНcos  ЕН

 **-** векторное произведение, модуль которого равен ЕНsin **EH**,

Вращение от **Е** к **Н** происходит по часовой стрелке, если смотреть по направлению векторного произведения.

 4. i,j,k – символы обозначающие единичные векторы OX, OY,OZ.

Дифференциальный векторный оператор (набла):

 =i/x+j/y+k/z;(2) (6)

 5.Градиент скалярной функции V определяется следующим образом:

 gradV=iV/x+jV/y+kV/z; (7)

V – скалярная величина

gradV – вектор, который может меняться от точки к точке как по величине, так и по направлению.

 6.Компоненты вектора **Е** по осям координат координат обозначаются Ex, Ey, Ez, т.е.

 **E**=iEx+jEykEz (8)

 7.Дивергенция векторной функции **Е** определяется как

 div**E=****E=** Ex/x+Ey/y+Ez/z; (9)

Дивергенция вектора **Е –** это скалярная величина.

Вихрь. Вихрь вектора **E –** это векторная величина

 rot**E=**x**E**=i (Ez/y-Ey/z)+j (Ex/z-Ez/x)+k (Ey/x-Ex/y); (10)

иногда пишут curl**E** вместо rot**Е.**

Дивергенция представима в виде суммы следующих скалярных проезведений:

 div**E=**i**E**/x+j**E**/y+k**E**/z (11)

 8.Вихрь представим в виде суммы следующих векторных произведений:

rot**E**= i**(****E**/x)+j(**E**/y)+k(**E**/z)

 Оператор Лапласа:

= 2/x2+2/y2+2/z2

Для скалярной функции 

=2/x2+2/y2+2/z2

 Для вектора **Е**

**Е=**2**Е**/x2+2**Е**/y2+2**Е**/z2

**Е=**iEx+jEy+kEz

**Е=**iЕx+jЕy+kЕz.

Вихрь (ротор) – это векторная функция, компоненты которой по осям x,y,z равны соответственно:

(Ez/y-Ey/z); (Ex/z-Ez/x); (Ey/x-Ex/y)

Эта запись циклическая перестановка индексов.

 9.Применения оператора 2 к скаляру V означает

 2V=\*V= div(gradV)= 2V/x2+2V/y2+2V/z2; (12)

2V – скаляр.

 10.Применение оператора 2 к вектору **Е** означает

 2**Е=**i2Ex+j2Ey+k2Ez=i(2Ex/x2+2Ey/y2+2Ez/z2)+

 +j(2Ex/x2+2Ey/y2+ 2Ez/z2)+k(2Ex/x2+2Ey/y2+2Ez/z2); (13)

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Гурский Л.И., Зеленин В.А., Жебин А.П., Вахрин Г.Л. Структура, топология и свойства пленочных резисторов.—Мн.: Навука i тэхнiка, 2007 -- 250 с.
2. Гурский Л.И., Румак Н.В., Куксо В.В. Зарядовые свойства МОП-структур.—Мн.: Навука i тэхнiка, 2000 -- 200 с.
3. Мищенко В.А., Городецкий Л.М., Гурский Л.И. и др. Интеллектуальные системы автоматизированного проектирования БИС и СБИС. Мн.: Радио и связь -- 2005. - 450 с.