ВВЕДЕНИЕ  
  
Вопрос о взаимосвязи математики и философии впервые был задан  
довольно давно. Аристотель, Бэкон, Леонардо да Винчи - многие вели-  
кие умы человечества занимались этим вопросом и достигали выдающихся  
результатов. Это не удивительно: ведь основу взаимодействия филосо-  
фии с какой-либо из наук составляет потребность использования аппа-  
рата философии для проведения исследований в данной области; матема-  
тика же, несомненно, более всего среди точных наук поддается фило-  
софскому анализу (в силу своей абстрактности). Наряду с этим прог-  
рессирующая математизация науки оказывает активное воздействие на  
философское мышление.  
Совместный путь математики и философии начался в Древней Гре-  
ции около VI века до н.э. Не стесненное рамками деспотизма, гречес-  
кое общество той поры было подобно питательному раствору, на котором  
выросло многое, что дошло до нас в сильно измененном временем виде,  
однако сохранив основную, заложенную греками идею: театр, поэзия,  
драматургия, математика, философия. В этой работе я попытался прос-  
ледить за процессом формирования, развития и взаимного влияния мате-  
матики и философии Древней Греции, а также привести различные точки  
зрения на движущие силы и результаты этого процесса.  
Известно, что греческая цивилизация на начальном этапе своего  
развития отталкивалось от цивилизации древнего Востока. Каково же  
было математическое наследство, полученное греками?  
Из дошедших до нас математических документов можно заключить,  
что в Древнем Египте были сильно отрасли математики, связанные с ре-  
шением экономических задач. Папирус Райнда (ок. 2000 г. до н.э.) на-  
чинался с обещания научить "совершенному и основательному исследова-  
нию всех вещей, пониманию их сущностей, познанию всех тайн". Факти-  
чески излагается искусство вычисления с целыми числами и дробями, в  
которое посвящались государственные чиновники для того, чтобы уметь  
решать широкий круг практических задач, таких, как распределение за-  
работной платы между известным числом рабочих, вычисление количества  
зерна для приготовления такого-то количества хлеба, вычисление по-  
верхностей и объемов и т.д. Дальше уравнений первой степени и прос-  
тейших квадратных уравнений египтяне, по-видимому, не пошли. Все со-  
держание известной нам египетской математики убедительно свидетель-  
ствует, что математические знания египтян предназначались для удов-  
летворения конкретных потребностей материального производства и не  
могли сколько-нибудь серьезно быть связанными с философией.  
Математика Вавилона, как и египетская, была вызвана к жизни  
потребностями производственной деятельности, поскольку решались за-  
дачи, связанные с нуждами орошения, строительства, хозяйственного  
учета, отношениями собственности, исчислением времени. Сохранившиеся  
документы показывают, что, основываясь на 60-ричной системе счисле-  
ния, вавилоняне могли выполнять четыре арифметических действия, име-  
лись таблицы квадратных корней, кубов и кубических корней, сумм  
квадратов и кубов, степеней данного числа, были известны правила  
суммирования прогрессий. Замечательные результаты были получены в  
области числовой алгебры. Хотя вавилоняне и не знали алгебраической  
символики, но решение задач проводилось по плану, задачи сводились к  
единому "нормальному" виду и затем решались по общим правилам, при-  
чем истолкование преобразований "уравнения" не связывалось с конк-  
ретной природой исходных данных. Встречались задачи, сводящиеся к  
решению уравнений третьей степени и особых видов уравнений четвер-  
той, пятой и шестой степени.  
Если же сравнивать математические науки Египта и Вавилона по  
способу мышления, то нетрудно будет установить их общность по таким  
характеристикам, как авторитарность, некритичность, следование за  
традицией, крайне медленная эволюция знаний. Эти же черты обнаружи-  
ваются и в философии, мифологии, религии Востока. Как писал по этому  
поводу Э.Кольман, "в этом месте, где воля деспота считалась законом,  
не было места для мышления, доискивающегося до причин и обоснований  
явлений, ни тем более для свободного обсуждения".  
Анализ древнегреческой математики и философии следует начать с  
милетской математической школы, заложившей основы математики как до-  
казательной науки.  
  
Милетская школа  
  
Милетская школа - одна из первых древнегреческих математических  
школ, оказавшая существенное влияние на развитие философских предс-  
тавлений того времени. Она существовала в Ионии в конце V - IV вв.  
до н.э.; основными деятелями ее являлись Фалес (ок. 624-547 гг. до  
н.э.), Анаксимандр (ок. 610-546 гг. до н.э.) и Анаксимен (ок.  
585-525 гг. до н.э.). Рассмотрим на примере милетской школы основные  
отличия греческой науки от догреческой и проанализируем их.  
Если сопоставить исходные математические знания греков с дости-  
жениями египтян и вавилонян, то вряд ли можно сомневаться в том, что  
такие элементарные положения, как равенство углов у основания равно-  
бедренного треугольника, открытие которого приписывают Фалесу Ми-  
летскому, не были известны древней математике. Тем не менее, гречес-  
кая математика уже в исходном своем пункте имела качественное отли-  
чие от своих предшественников.  
Ее своеобразие заключается прежде всего в попытке систематичес-  
ки использовать идею доказательства. Фалес стремится доказать то,  
что эмпирически было получено и без должного обоснования использова-  
лось в египетской и вавилонской математике. Возможно, в период наи-  
более интенсивного развития духовной жизни Вавилона и Египта, в пе-  
риод формирования основ их знаний изложение тех или иных математи-  
ческих положений сопровождалось обоснованием в той или иной форме.  
Однако, как пишет Ван дер Варден, "во времена Фалеса египетская и  
вавилонская математика давно уже были мертвыми знаниями. Можно было  
показать Фалесу, как надо вычислять, но уже неизвестен был ход рас-  
суждений, лежащих в основе этих правил".  
Греки вводят процесс обоснования как необходимый компонент ма-  
тематической действительности, доказательность действительно являет-  
ся отличительной чертой их математики. Техникой доказательства ран-  
ней греческой математики как в геометрии, так и в арифметике перво-  
начально являлась простая попытка придания наглядности. Конкретными  
разновидностями такого доказательства в арифметике было доказатель-  
ство при помощи камешков, в геометрии - путем наложения. Но сам факт  
наличия доказательства говорит о том, что математические знания  
воспринимаются не догматически, а в процессе размышления. Это, в  
свою очередь, обнаруживает критический склад ума, уверенность (может  
быть, не всегда осознанную), что размышлением можно установить пра-  
вильность или ложность рассматриваемого положения, уверенность в си-  
ле человеческого разума.  
Греки в течении одного-двух столетия сумели овладеть математи-  
ческим наследием предшественников, накопленного в течении тысячеле-  
тий, что свидетельствует об интенсивности, динамизме их математичес-  
кого познания. Качественное отличие исследований Фалеса и его после-  
дователей от догреческой математики проявляется не столько в конк-  
ретном содержании исследованной зависимости, сколько в новом способе  
математического мышления. Исходный материал греки взяли у предшест-  
венников, но способ усвоения и использования этого материала был но-  
вый. Отличительными особенностями их математического познания явля-  
ются рационализм, критицизм, динамизм.  
Эти же черты характерны и для философских исследований милетс-  
кой школы. Философская концепция и совокупность математических поло-  
жений формируется посредством однородного по своим общим характерис-  
тикам мыслительного процесса, качественно отличного от мышления  
предшествующей эпохи. Как же сформировался этот новый способ воспри-  
ятия действительности? Откуда берет свое начало стремление к научно-  
му знанию?  
Ряд исследователей объявляет отмеченные выше характеристики  
мыслительного процесса "врожденными особенностями греческого духа".  
Однако эта ссылка ничего не объясняет, так как непонятно, почему тот  
же "греческий дух" по прошествии эпохи эллинизма теряет свои качест-  
ва. Можно попробовать поискать причины такого миропонимания в соци-  
ально-экономической сфере.  
Иония, где проходила деятельность милетской школы, была доста-  
точно развитой в экономическом отношении областью. Поэтому именно  
она прежде прочих вступила на путь низвержения первобытно-общинного  
строя и формирования рабовладельческих отношений. В VIII-VI вв. до  
н.э. земля все больше сосредотачивалась в руках крупной родовой зна-  
ти. Развитие ремесленного производства и торговли еще в большей мере  
ускоряло процесс социально-имущественного расслоения. Отношения меж-  
ду аристократией и демосом становятся напряженными; со временем эта  
напряженность перерастает в открытую борьбу за власть. Калейдоскоп  
событий во внутренней жизни, не менее изменчивая внешняя обстановка  
формируют динамизм, живость общественной мысли.  
Напряженность в политической и экономической сферах приводит к  
столкновениям в области религии, поскольку демос , еще не сомневаясь  
в том, что религиозные и светские установления вечны, так как даны  
богами, требует, чтобы они были записаны и стали общедоступными, ибо  
правители искажают божественную волю и толкуют ее по-своему. Однако  
нетрудно понять, что систематическое изложение религиозных и мифоло-  
гических представлений (попытка такого изложения была дана Гесиодом)  
не могло не нанести серьезного удара религии. При проверке религиоз-  
ных измышлений логикой первые, несомненно, показались бы конгломера-  
том нелепостей.  
"Таким образом, материалистическое мировоззрение Фалеса и его  
последователей не является каким-то загадочным, не от мира сего по-  
рождением "греческого духа". Оно является продуктом вполне опреде-  
ленных социально-экономических условий и выражает интересы истори-  
чески-конкретных социальных сил, прежде всего торгово-ремесленных  
слоев общества"-пишет О.И.Кедровский.  
На основании всего вышеперечисленного еще нельзя с большой уве-  
ренностью утверждать, что именно воздействие мировоззрения явилось  
решающим фактором для возникновения доказательства; не исключено  
ведь, что это произошло в силу других причин: потребностей произ-  
водства, запросов элементов естествознания, субъективных побуждений  
исследователей. Однако можно убедиться, что каждая из этих причин не  
изменила принципиально своего характера по сравнению с догреческой  
эпохой непосредственно не приводит к превращению математики в дока-  
зательную науку. Например, для удовлетворения потребностей техники  
было вполне достаточно практической науки древнего Востока, в спра-  
ведливости положений которой можно было убедиться эмпирически. Сам  
процесс выявления этих положений показал, что они дают достаточную  
для практических нужд точность.  
Можно считать одним из побудительных мотивов возникновения до-  
казательства необходимость осмысления и обобщения результатов пред-  
шественников. Однако и этому фактору не принадлежит решающая роль,  
так как, например, существуют теории, воспринимаемые нами как оче-  
видные, но получившие строгое обоснование в античной математике  
(например, теория делимости на 2).  
Появление потребности доказательства в греческой математике по-  
лучает удовлетворительное объяснение, если учесть взаимодействие ми-  
ровоззрения на развитие математики. В этом отношении греки сущест-  
венно отличаются от своих предшественников. В их философских и мате-  
матических исследованиях проявляются вера в силу человеческого разу-  
ма, критическое отношение к достижениям предшественников, динамизм  
мышления. У греков влияние мировоззрения превратилось из сдерживаю-  
щего фактора математического познания в стимулирующий, в действенную  
силу прогресса математики.  
В том, что обоснование приняло именно форму доказательства, а  
не остановилось на эмпирической проверке, решающим является появле-  
ние новой, мировоззренческой функции науки. Фалес и его последовате-  
ли воспринимают математические достижения предшественников прежде  
всего для удовлетворения технических потребностей, но наука для них  
- нечто большее, чем аппарат для решения производственных задач. От-  
дельные, наиболее абстрактные элементы математики вплетаются в на-  
турфилософскую систему и здесь выполняют роль антипода мифологичес-  
ким и религиозным верованиям. Эмпирическая подтверждаемость для эле-  
ментов философской системы была недостаточной в силу общности их ха-  
рактера и скудности подтверждающих их фактов. Математические знания  
же к тому времени достигли такого уровня развития, что между отдель-  
ными положениями можно было установить логические связи. Такая форма  
обоснований оказалась объективно приемлемой для математических поло-  
жений.  
  
ПИФАГОРЕЙСКАЯ ШКОЛА  
  
На основании данного выше исследования милетской школы можно  
лишь убедиться в активном влиянии мировоззрения на процесс математи-  
ческого познания только при радикальном изменении социально-экономи-  
ческих условий жизни общества. Однако остаются открытыми вопросы о  
том, влияет ли изменение философской основы жизни общества на разви-  
тие математики, зависит ли математическое познание от изменения иде-  
ологической направленности мировоззрения, имеет ли место обратное  
воздействие математических знаний на философские идеи. Можно попы-  
таться ответить на поставленные вопросы, обратившись к деятельности  
пифагорейской школы.  
Пифагореизм как направление духовной жизни существовал на про-  
тяжении всей истории Древней Греции, начиная с VI века до н. э. и  
прошел в своем развитии ряд этапов. Вопрос о их временной длитель-  
ности сложен и до сих пор не решен однозначно. Основоположником шко-  
лы был Пифагор Самосский (ок. 580-500 до н.э.). Ни одна строка, на-  
писанная Пифагором, не сохранилась; вообще неизвестно, прибегал ли  
он к письменной передаче своих мыслей.Что было сделано самим Пифаго-  
ром, а что его учениками, установить очень трудно. Свидетельства о  
нем древнегреческих авторов противоречивы; в какой-то мере различные  
оценки его деятельности отражают многообразие его учения.  
В пифагореизме выделяют две составляющие: практическую ("пифа-  
горейский образ жизни") и теоретическую (определенная совокупность  
учений). В религиозном учении пифагорейцев наиболее важной считалась  
обрядовая сторона, затем имелось в виду создать определенное душев-  
ное состояние и лишь потом по значимости шли верования, в трактовке  
которых допускались разные варианты. По сравнению с другими религи-  
озными течениями у пифагорейцев были специфические представления о  
природе и судьбе души. Душа - существо божественное, она заключена в  
тело в наказание за прегрешения. высшая цель жизни - освободить душу  
из телесной темницы, не допустить в другое тело, которое якобы со-  
вершается после смерти. Путем для достижения этой цели является вы-  
полнение определенного морального кодекса, "пифагорейский образ жиз-  
ни". В многочисленной системе предписаний, регламентировавших почти  
каждый шаг жизни, видное место отводилось занятиям музыкой и научны-  
ми исследованиями.  
Теоретическая сторона пифагореизма тесно связана с практи-  
ческой. В теоретических изысканиях пифагорейцы видели лучшее  
средство освобождения души из круга рождений, а их результаты стре-  
мились использовать для рационального обоснования предполагаемой  
доктрины. Вероятно, в деятельности Пифагора и его ближайших учеников  
научные положения были перемешаны с мистикой, религиозными и мифоло-  
гическими представлениями. Вся эта "мудрость" излагалась в качестве  
изречений оракула, которым придавался скрытый смысл божественного  
откровения.  
Основными объектами научного познания у пифагорейцев были мате-  
матические объекты, в первую очередь числа натурального ряда (вспом-  
ним знаменитое "Число есть сущность всех вещей"). Видное место отво-  
дилось изучению связей между четными и нечетными числами. В области  
геометрических знаний внимание акцентируется на наиболее абстрактных  
зависимостях. Пифагорейцами была построена значительная часть плани-  
метрии прямоугольных фигур; высшим достижением в этом направлении  
было доказательство теоремы Пифагора, частные случаи которой за 1200  
лет до этого приводятся в клинописных текстах вавилонян. Греки дока-  
зывают ее общим образом. Некоторые источники приписывают пифагорей-  
цам даже такие выдающиеся результаты, как построение пяти правильных  
многогранников.  
Числа у пифагорейцев выступают основополагающими универсальными  
объектами, к которым предполагалось свести не только математические  
построения, но и все многообразие действительности. Физические, эти-  
ческие, социальные и религиозные понятия получили математическую ок-  
раску. Науке о числах и других математических объектах отводится ос-  
новополагающее место в системе мировоззрения, то есть фактически ма-  
тематика объявляется философией. Как писал Аристотель, "...у чисел  
они усматривали, казалось бы, много сходных черт с тем, что сущест-  
вует и происходит, - больше, чем у огня, земли и воды... У них,  
по-видимому, число принимается за начало и в качестве материи для  
вещей, и в качестве выражения для их состояний и свойств... Напри-  
мер, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то - душа  
и ум, другое - удача, и можно сказать - в каждом из остальных случа-  
ев точно также. "  
Если сравнивать математические исследования ранней пифагорейс-  
кой и милетской школ, то можно выявить ряд существенных различий.  
Так, математические объекты рассматривались пифагорейцами как перво-  
сущность мира, то есть радикально изменилось само понимание природы  
математических объектов. Кроме того, математика превращена пифаго-  
рейцами в составляющую религии, в средство очищения души, достижения  
бессмертия. И наконец, пифагорейцы ограничивают область математичес-  
ких объектов наиболее абстрактными типами элементов и сознательно  
игнорируют приложения математики для решения производственных задач.  
Но чем же обусловлены такие глобальные расхождения в понимании при-  
роды математических объектов у школ, существовавших практически в  
одно и то же время и черпавших свою мудрость, по-видимому, из одного  
и того же источника - культуры Востока? Впрочем, Пифагор, скорее  
всего, пользовался достижениямимилетской школы, так как у него, как  
и у Фалеса, обнаруживаются основные признаки умственной деятельнос-  
ти, отличающиеся от догреческой эпохи; однако математическая дея-  
тельность этих школ носила существенно различный характер.  
Аристотель был одним из первых, кто попытался объяснить причины  
появления пифагорейской концепции математики. Он видел их в пределах  
самой математики: "Так называемые пифагорейцы, занявшись математи-  
ческими науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них,  
стали считать их началами всех вещей." Подобна точка зрения не лише-  
на основания хотя бы в силу применимости математических положений  
для выражения отношений между различными явлениями. На этом основа-  
нии можно, неправомерно расширив данный момент математического поз-  
нания, прийти к утверждению о выразимости всего сущего с помощью ма-  
тематических зависимостей, а если считать числовые отношения универ-  
сальными, то "число есть сущность всех вещей". Кроме того, ко време-  
ни деятельности пифагорейцев математика прошла длинный путь истори-  
ческого развития; процесс формирования ее основных положений терялся  
во мраке веков. Таким образом, появлялось искушение пренебречь им и  
объявить математические объекты чем-то первичным по отношению к су-  
ществующему миру. Именно так и поступили пифагорейцы.  
В советской философской науке проблема появления пифагорейской  
концепции математики рассматривалась, естественно, с позиций  
марксистско-ленинской философии. Так, О.И.Кедровский пишет: "...Вы-  
работанная им (Пифагором) концепция объективно оказалась идеологией  
вполне определенных социальных слоев общества. Это были ...предста-  
вители аристократии, теснимые демосом... Для них характерно стремле-  
ние уйти от тягот земной жизни, обращение к религии и мистике". Эта  
точка зрения, как и первая, не лишена смысла; истина же, вероятно,  
находится где-то посередине. Однако, на мой взгляд, крах пифагорейс-  
кого учения следует связывать в первую очередь не с вырождением  
аристократии как класса, а с попыткой пифагорейцев извратить саму  
природу процесса математического познания, лишив математику таких  
важных источников прогресса, как приложения к производству, открытое  
обсуждение результатов исследований, коллективное творчество, удер-  
жать прогресс математики в рамках рафинированного учения для посвя-  
щенных. Кстати, сами пифагорейцы подорвали свой основополагающий  
принцип "число есть сущность всех вещей", открыв, что отношение диа-  
гонали и стороны квадрата не выражается посредством целых чисел.  
Таким образом,уже в исходном пункте своего развития теорети-  
ческая математика была подвержена влиянию борьбы двух типов миро-  
воззрения - материалистического и религиозно-идеалистического. Мы же  
убедились, что наряду с влиянием мировоззрения на развитие математи-  
ческого познания имеет место и обратное воздействие.  
  
ЭЛЕЙСКАЯ ШКОЛА  
  
Элейская школа довольно интересна для исследования, так как это  
одна из древнейших школ, в трудах которой математика и философия до-  
статочно тесно и разносторонне взаимодействуют. Основными представи-  
телями элейской школы считают Парменида (конец VI - V в. до н.э.) и  
Зенона (первая половина V в. до н.э.).  
Философия Парменида заключается в следующем: всевозможные сис-  
темы миропонимания базируются на одной из трех посылок: 1)Есть толь-  
ко бытие, небытия нет; 2)Существует не только бытие, но и небытие;  
3)Бытие и небытие тождественны. Истинной Парменид признает только  
первую посылку. Согласно ему, бытие едино, неделимо, неизменяемо,  
вневременно, закончено в себе, только оно истинно сущее; множествен-  
ность, изменчивость, прерывность, текучесть - все это удел мнимого.  
С защитой учения Парменида от возражений выступил его ученик  
Зенон. Древние приписывали ему сорок доказательств для защиты учения  
о единстве сущего (против множественности вещей) и пять доказатель-  
ств его неподвижности (против движения). Из них до нас дошло всего  
девять. Наибольшей известностью во все времена пользовались зеноновы  
доказательства против движения; например, "движения не существует на  
том основании, что перемещающееся тело должно прежде дойти до поло-  
вины, чем до конца, а чтобы дойти до половины, нужно пройти половину  
этой половины и т.д.".  
Аргументы Зенона приводят к парадоксальным, с точки зрения  
"здравого смысла", выводам, но их нельзя было просто отбросить как  
несостоятельные, поскольку и по форме, и по содержанию удовлетворяли  
математическим стандартам той поры. Разложив апории Зенона на сос-  
тавные части и двигаясь от заключений к посылкам, можно реконструи-  
ровать исходные положения, которые он взял за основу своей концеп-  
ции. Важно отметить, что в концепции элеатов, как и в дозеноновской  
науке фундаментальные философские представления существенно опира-  
лись на математические принципы. Видное место среди них занимали  
следующие аксиомы:  
1. Сумма бесконечно большого числа любых, хотя бы и бесконечно  
малых, но протяженных величин должна быть бесконечно большой;  
2. Сумма любого, хотя бы и бесконечно большого числа непротя-  
женных величин всегда равна нулю и никогда не может стать некоторой  
заранее заданной протяженной величиной.  
Именно в силу тесной взаимосвязи общих философских представле-  
ний с фундаментальными математическими положениями удар, нанесенный  
Зеноном по философским воззрениям, существенно затронул систему ма-  
тематических знаний. Целый ряд важнейших математических построений,  
считавшихся до этого несомненно истинными, в свете зеноновских пост-  
роений выглядели как противоречивые. Рассуждения Зенона привели к  
необходимости переосмыслить такие важные методологические вопросы,  
как природа бесконечности, соотношение между непрерывным и прерыв-  
ным и т.п. Они обратили внимание математиков на непрочность фунда-  
мента их научной деятельности и таким образом оказали стимулирующее  
воздействие на прогресс этой науки.  
Следует обратить внимание и на обратную связь - на роль матема-  
тики в формировании элейской философии. Так, установлено, что апории  
Зенона связаны с нахождением суммы бесконечной геометрической прог-  
рессии. На этом основании советский историк математики Э. Кольман  
сделал предположение, что "именно на математический почве суммирова-  
ния таких прогрессий и выросли логико-философские апории Зенона".  
Однако такое предположение, по-видимому, лишено достаточных основа-  
ний, так как оно слишком жестко связывает учение Зенона с математи-  
кой при том, что имеющие исторические данные не дают основания ут-  
верждать, что Зенон вообще был математиком.  
Огромное значение для последующего развития математики имело  
повышение уровня абстракции математического познания, что произошло  
в большой степени благодаря деятельности элеатов. Конкретной формой  
проявления этого процесса было возникновение косвенного доказатель-  
ства ("от противного"), характерной чертой которого является доказа-  
тельство не самого утверждения, а абсурдности обратного ему. Таким  
образом был сделан шаг к становлению математики как дедуктивной нау-  
ки, созданы некоторые предпосылки для ее аксиоматического построе-  
ния.  
Итак, философские рассуждения элеатов, с одной стороны, явились  
мощным толчком для принципиально новой постановки важнейших методо-  
логических вопросов математики, а с другой - послужили источником  
возникновения качественно новой формы обоснования математических  
знаний.  
  
ДЕМОКРИТ  
  
Аргументы Зенона вскрыли внутренние противоречия, которые имели  
место в сложившихся математических теориях. Тем самым факт существо-  
вания математики был поставлен под сомнение. Какими же путями разре-  
шались противоречия, выявленные Зеноном ?  
Простейшим выходом из создавшегося положения бал отказ от абс-  
тракций в пользу того, что можно непосредственно проверить с помощью  
ощущений. Такую позицию занял софист Протагор. Он считал, что "мы не  
можем представить себе ничего прямого или круглого в том смысле, как  
представляет эти термины геометрия; в самом деле, круг касается пря-  
мой не в одной точке". Таким образом, из математики следует убрать  
как ирреальные: представления о бесконечном числе вещей, так как  
никто не может считать до бесконечности;бесконечную делимость, пос-  
кольку она неосуществима практически и т.д. Таким путем математику  
можно сделать неуязвимой для рассуждений Зенона, но при этом практи-  
чески упраздняется теоретическая математика. Значительно сложнее бы-  
ло построить систему фундаментальных положений математики, в которой  
бы выявленные Зеноном противоречия не имели бы места. Эту задачу ре-  
шил Демокрит, разработав концепцию математического атомизма.  
Демокрит бал, по мнению Маркса, "первым энциклопедическим умом  
среди греков". Диоген Лаерций (III в. н.э.) называет 7О его сочине-  
ний, в которых были освещены вопросы философии, логики, математики,  
космологии, физики, биологии, общественной жизни, психологии, этики,  
педагогики, филологии, искусства, техники и другие. Аристотель писал  
о нем: "Вообще, кроме поверхностных изысканий, никто ничего не уста-  
новил, исключая Демокрита. Что же касается его, то получается такое  
впечатление, что он предусмотрел все, да и в методе вычислений он  
выгодно отличается от других".  
Вводной частью научной системы Демокрита была "каноника", в ко-  
торой формулировались и обосновывались принципы атомистической фило-  
софии. Затем следовала физика, как наука о различных проявлениях бы-  
тия, и этика. Каноника входила в физику в качестве исходного разде-  
ла, этика же строилась как порождение физики. В философии Демокрита  
прежде всего устанавливается различие между "подлинно сущим" и тем,  
что существует только в "общем мнении". Подлинно сущими считались  
лишь атомы и пустота. Как подлинно сущее, пустота (небытие) есть та-  
кая же реальность, как атомы (бытие). "Великая пустота" безгранична  
и заключает в себе все существующее, в ней нет ни верха, ни низа, ни  
края, ни центра, она делает прерывной материю и возможным ее движе-  
ние. Бытие образуют бесчисленные мельчайшие качественно однородные  
первотельца, различающиеся между собой по внешним формам, размеру,  
положению и порядку, они далее неделимы вследствие абсолютной твер-  
дости и отсутствия в них пустоты и "по величине неделимы". Атомам  
самим по себе свойственно непрестанное движение, разнообразие кото-  
рого определяется бесконечным разнообразием форм атомов. Движение  
атомов вечно и в конечном итоге является причиной всех изменений в  
мире.  
Задача научного познания, согласно Демокриту, чтобы наблюдаемые  
явления свести к области "истинного сущего" и дать им объяснение ис-  
ходя из общих принципов атомистики. Это может быть достигнуто пос-  
редством совместной деятельности ощущений и разума. Гносеологическую  
позицию Демокрита Маркс сформулировал следующим образом: "Демокрит  
не только не удалялся от мира, а, наоборот, был эмпирическим естест-  
воиспытателем". Содержание исходных философских принципов и гносео-  
логические установки определили основные черты научного метода Де-  
мокрита:  
а) В познании исходить от единичного;  
б) Любые предмет и явление разложимы до простейших элементов  
(анализ) и объяснимы исходя из них (синтез);  
в) Различать существование "по истине" и "согласно мнению";  
г) Явления действительности - это отдельные фрагменты упорядо-  
ченного космоса, который возник и функционирует в результате дейс-  
твий чисто механической причинности.  
Математика по праву должна считаться у Демокрита первым разде-  
лом собственно физики и следовать непосредственно за каноникой. В  
самом деле, атомы качественно однородны и их первичные свойства име-  
ют количественный характер. Однако было бы неправильно трактовать  
учение Демокрита как разновидность пифагореизма, поскольку Демокрит  
хотя и сохраняет идею господства в мире математической закономернос-  
ти, но выступает с критикой априорных математических построений пи-  
фагорейцев, считая, что число должно выступать не законодателем при-  
роды, а извлекаться из нее. Математическая закономерность выявляется  
Демокритом из явлений действительности, и в этом смысле он предвос-  
хищает идеи математического естествознания. Исходные начала матери-  
ального бытия выступают у Демокрита в значительной степени как мате-  
матические объекты, и в соответствии с этим математике отводится  
видное место в системе мировоззрения как науке о первичных свойствах  
вещей. Однако включение математики в основание мировоззренческой  
системы потребовало ее перестройки, приведения математики в соот-  
ветствие с исходными философскими положениями, с логикой, гносеоло-  
гией, методологией научного исследования. Созданная таким образом  
концепция математики, называемая концепцией математического атомиз-  
ма, оказалась существенно отличной от предыдущих.  
У Демокрита все математические объекты (тела, плоскости, линии,  
точки) выступают в определенных материальных образах. Идеальные  
плоскости, линии, точки в его учении отсутствуют. Основной процеду-  
рой математического атомизма является разложение геометрических тел  
на тончайшие листики (плоскости), плоскостей - на тончайшие нитки  
(линии), линий - на мельчайшие зернышки (атомы). Каждый атом имеет  
малую, но ненулевую величину и далее неделим. Теперь длина линии оп-  
ределяется как сумма содержащихся в ней неделимых частиц. Аналогично  
решается вопрос о взаимосвязи линий на плоскости и плоскостей в те-  
ле. Число атомов в конечном объеме пространства не бесконечно, хотя  
и настолько велико, что недоступно чувствам. Итак, главным отличием  
учения Демокрита от рассмотренных ранее является отрицание им беско-  
нечной делимости. Таким образом он решает проблему правомерности те-  
оретических построений математики, не сводя их к чувственно воспри-  
нимаемым образам, как это делал Протагор. Так, на рассуждения Прота-  
гора о касании окружности и прямой Демокрит мог бы ответить, что  
чувства, являющиеся отправным критерием Протагора, показывают ему,  
что чем точнее чертеж, тем меньше участок касания; в действительнос-  
ти же этот участок настолько мал, что не поддается чувственному ана-  
лизу, а относится к области истинного познания.  
Руководствуясь положениями математического атомизма, Демокрит  
проводит ряд конкретных математических исследований и достигает вы-  
дающихся результатов (например, теория математической перспективы и  
проекции). Кроме того, он сыграл, по свидетельству Архимеда, немало-  
важную роль в доказательстве Эвдоксом теорем об объеме конуса и пи-  
рамиды. Нельзя с уверенностью сказать, пользовался ли он при решении  
этой задачи методами анализа бесконечно малых. А.О.Маковельский пи-  
шет: "Демокрит вступил на путь, по которому дальше пошли Архимед и  
Кавальери. Однако, подойдя вплотную к понятию бесконечно малого, Де-  
мокрит не сделал последнего решительного шага. Он не допускает безг-  
раничного увеличения числа слагаемых, образующих в своей сумме дан-  
ный объем. Он принимает лишь чрезвычайно большое, не поддающееся ис-  
числению вследствие своей огромности число этих слагаемых".  
Выдающимся достижением Демокрита в математике явилась также его  
идея о построении теоретической математики как системы. В зародыше-  
вой форме она представляет собой идею аксиоматического построения  
математики, которая затем была развита в методологическом плане Пла-  
тоном и получила логически развернутое положение у Аристотеля.  
  
ПЛАТОНОВСКИЙ ИДЕАЛИЗМ  
  
Сочинения Платона (427-347 гг. до н.э.) - уникальное явление в  
отношении выделения философской концепции. Это высокохудожественное,  
захватывающее описание самого процесса становления концепции, с сом-  
нениями и неуверенностью, подчас с безрезультатными попытками разре-  
шения поставленного вопроса, с возвратом к исходному пункту, много-  
численными повторениями и т.п. Выделить в творчестве Платона ка-  
кой-либо аспект и систематически изложить его довольно сложно, так  
как приходится реконструировать мысли Платона из отдельных высказы-  
ваний, которые настолько динамичны, что в процессе эволюции мысли  
порой превращаются в свою противоположность.  
Платон неоднократно высказывал свое отношение к математике и  
она всегда оценивалась им очень высоко: без математических знаний  
"человек с любыми природными свойствами не станет блаженным", в сво-  
ем идеальном государстве он предполагал "утвердить законом и убедить  
тех, которые намереваются занять в городе высокие должности, чтобы  
они упражнялись в науке счисления". Систематическое широкое исполь-  
зование математического материала имеет место у Платона, начиная с  
диалога "Менон", где Платон подводит к основному выводу с помощью  
геометрического доказательства. Именно вывод этого диалога о том,  
что познание есть припоминание, стал основополагающим принципом пла-  
тоновской гносеологии.  
Значительно в большей мере, чем в гносеологии, влияние матема-  
тики обнаруживается в онтологии Платона. Проблема строения матери-  
альной действительности у Платона получила такую трактовку: мир ве-  
щей, воспринимаемый посредством чувств, не есть мир истинно сущест-  
вующего; вещи непрерывно возникают и погибают. Истинным бытием обла-  
дает мир идей, которые бестелесны, нечувственны и выступают по отно-  
шению к вещам как их причины и образы, по которым эти вещи создают-  
ся. Далее, помимо чувственных предметов и идей он устанавливает ма-  
тематические истины, которые от чувственных предметов отличаются  
тем, что вечны и неподвижны, а от идей - тем, что некоторые матема-  
тические истины сходна друг с другом, идея же всякий раз только од-  
на. У Платона в качестве материи началами являются большое и малое,  
а в качестве сущности - единое, ибо идеи (они же числа) получаются  
из большого и малого через приобщение их к единству. Чувственно  
воспринимаемый мир, согласно Платону, создан Богом. Процесс построе-  
ния космоса описан в диалоге "Тимей". Ознакомившись с этим описани-  
ем, нужно признать, что Создатель был хорошо знаком с математикой и  
на многих этапах творения существенно использовал математические по-  
ложения, а порой и выполнял точные вычисления.  
Посредством математических отношений Платон пытался охарактери-  
зовать и некоторые явления общественной жизни, примером чего может  
служить трактовка социального отношения "равенство" в диалоге "Гор-  
гий" и в "Законах". Можно заключить, что Платон существенно опирался  
на математику при разработке основных разделов своей философии: в  
концепции "познание - припоминание", учении о сущности материального  
бытия, об устройстве космоса, в трактовке социальных явлений и т.д.  
Математика сыграла значительную роль в конструктивном оформлении его  
философской системы. Так в чем же заключалась его концепция матема-  
тики?  
Согласно Платону, математические науки (арифметика, геометрия,  
астрономия и гармония) дарованы человеку богами, которые "произвели  
число, дали идею времени и возбудили потребность исследования все-  
ленной". Изначальное назначение математики в том, чтобы "очищался и  
оживлялся тот орган души человека, расстроенный и ослепленный иными  
делами", который "важнее, чем тысяча глаз, потому что им одним со-  
зерцается истина". "Только никто не пользуется ею (математикой) пра-  
вильно, как наукою, влекущей непременно к сущему". "Неправильность"  
математики Платон видел прежде всего в ее применимости для решения  
конкретных практических задач. Нельзя сказать, чтобы он вообще отри-  
цал практическую применимость математики. Так, часть геометрии нужна  
для "расположения лагерей", "при всех построениях как во время самих  
сражений, так и во время походов". Но, по мнению Платона, "для таких  
вещей ...достаточна малая часть геометрических и арифметических вык-  
ладок, часть же их большая, простирающаяся далее, должна ...способс-  
твовать легчайшему усвоению идеи блага". Платон отрицательно отзы-  
вался о тех попытках использования механических методов для решения  
математических задач, которые имели место в науке того времени. Его  
неудовлетворенность вызывало также принятое современниками понимание  
природы математических объектов. Рассматривая идеи своей науки как  
отражение реальных связей действительности, математики в своих ис-  
следованиях наряду с абстрактными логическими рассуждениями широко  
использовали чувственные образы, геометрические построения. Платон  
всячески старается убедить, что объекты математики существуют обо-  
собленно от реального мира, поэтому при их исследовании неправомерно  
прибегать к чувственной оценке.  
Таким образом, в исторически сложившейся системе математических  
знаний Платон выделяет только умозрительную, дедуктивно построенную  
компоненту и закрепляет за ней право называться математикой. История  
математики мистифицируется, теоретические разделы резко противопос-  
тавляются вычислительному аппарату, до предела сужается область при-  
ложения. В таком искаженном виде некоторые реальные стороны матема-  
тического познания и послужили одним из оснований для построения  
системы объективного идеализма Платона. Ведь сама по себе математика  
к идеализму вообще не ведет, и в целях построения идеалистических  
систем ее приходится существенно деформировать.  
Вопрос о влиянии, оказанном Платоном на развитие математики,  
довольно труден. Длительное время господствовало убеждение, что  
вклад Платона в математику был значителен. Однако более глубокий  
анализ привел к изменению этой оценки. Так, О.Нейгебауэр пишет: "Его  
собственный прямой вклад в математические знания, очевидно, был ра-  
вен нулю... Исключительно элементарный характер примеров математи-  
ческих рассуждений, приводимых Платоном и Аристотелем, не подтверж-  
дает гипотезы о том, что Эвдокс или Теэтет чему-либо научились у  
Платона... Его совет астрономам заменить наблюдения спекуляцией мог  
бы разрушить один из наиболее значительных вкладов греков в точные  
науки". Такая аргументация вполне убедительна; можно также согла-  
ситься и с тем, что идеалистическая философия Платона в целом сыгра-  
ла отрицательную роль в развитии математики. Однако не следует забы-  
вать о сложном характере этого воздействия.  
Платону принадлежит разработка некоторых важных методологичес-  
ких проблем математического познания: аксиоматическое построение ма-  
тематики, исследование отношений между математическими методами и  
диалектикой, анализ основных форм математического знания. Так, про-  
цесс доказательства необходимо связывает набор доказанных положений  
в систему, в основе которой лежат некоторые недоказуемые положения.  
Тот факт, что начала математических наук "суть предположения", может  
вызвать сомнение в истинности всех последующих построений. Платон  
считал такое сомнение необоснованным. Согласно его объяснению, хотя  
сами математические науки, "пользуясь предположениями, оставляют их  
в неподвижности и не могут дать для них основания", предположения  
находят основания посредством диалектики. Платон высказал и ряд дру-  
гих положений, оказавшихся плодотворными для развития математики.  
Так, в диалоге "Пир" выдвигается понятие предела; идея выступает  
здесь как предел становления вещи.  
Критика, которой подвергались методология и мировоззренческая  
система Платона со стороны математиков, при всей своей важности не  
затрагивала сами основы идеалистической концепции. Для замены разра-  
ботанной Платоном методологии математики более продуктивной систе-  
мой нужно было подвергнуть критическому разбору его учение об идеях,  
основные разделы его философии и как следствие этого = его воззрение  
на математику. Эта миссия выпала на долю ученика Платона - Аристоте-  
ля.  
  
СИСТЕМА ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ АРИСТОТЕЛЯ  
  
К.Маркс назвалАристотеля (384-322 гг. до н.э.) "величайшим фи-  
лософом древности". Основные вопросы философии, логики, психологии,  
естествознания, техники, политики, этики и эстетики, поставленные в  
науке Древней Греции, получили у Аристотеля полное и всестороннее  
освещение. В математике он, по-видимому, не проводил конкретных ис-  
следований, однако важнейшие стороны математического познания были  
подвергнуты им глубокому философскому анализу, послужившему методо-  
логической основой деятельности многих поколений математиков.  
Ко времени Аристотеля теоретическая математика прошла значи-  
тельный путь и достигла высокого уровня развития. Продолжая традицию  
философского анализа математического познания, Аристотель поставил  
вопрос о необходимости упорядочивания самого знания о способах усво-  
ения науки, о целенаправленной разработке искусства ведения познава-  
тельной деятельности, включающего два основных раздела: "образован-  
ность" и "научное знание дела". Среди известных сочинений Аристотеля  
нет специально посвященных изложению методологических проблем мате-  
матики. Но по отдельным высказываниям, по использованию математичес-  
кого материала в качестве иллюстраций общих методологических положе-  
ний можно составить представление о том, каков был его идеал постро-  
ения системы математических знаний.  
Исходным этапом познавательной деятельности, согласно Аристоте-  
лю, является обучение, которое "основано на (некотором) уже ранее  
имеющемся знании... Как математические науки, так и каждое из прочих  
искусств приобретается (именно) таким способом". Для отделения зна-  
ния от незнания Аристотель предлагает проанализировать "все те мне-  
ния, которые по-своему высказывали в этой области некоторые мыслите-  
ли" и обдумать возникшие при этом затруднения. Анализ следует прово-  
дить с целью выяснения четырех вопросов: "что (вещь) есть, почему  
(она) есть, есть ли (она) и что (она) есть".  
Основным принципом, определяющим всю структуру "научного знания  
дела", является принцип сведения всего к началам и воспроизведения  
всего из начал. Универсальным процессом производства знаний из на-  
чал, согласно Аристотелю, выступает доказательство. "Доказательством  
же я называю силлогизм, - пишет он, - который дает знания". Изложе-  
нию теории доказательного знания полностью посвящен "Органон" Арис-  
тотеля. Основные положения этой теории можно сгруппировать в разде-  
лы, каждый из которых раскрывает одну из трех основных сторон мате-  
матики как доказывающей науки: "то, относительно чего доказывается,  
то, что доказывается и то, на основании чего доказывается". Таким  
образом, Аристотель дифференцированно подходил к объекту, предмету и  
средствам доказательства.  
Существование математических объектов признавалось задолго до  
Аристотеля, однако пифагорейцы, например, предполагали, что они на-  
ходятся в чувственных вещах, платоники же, наоборот, считали их су-  
ществующими отдельно. Согласно Аристотелю:  
1. В чувственных вещах математические объекты не существуют,  
так как "находиться в том же самом месте два тела не в состоянии";  
2. "Невозможно и то, чтобы такие реальности существовали обо-  
собленно".  
Аристотель считал предметом математики "количественную опреде-  
ленность и непрерывность". В его трактовке "количеством называется  
то, что может быть разделено на составные части, каждая из кото-  
рых ...является чем-то одним, данным налицо. То или другое количест-  
во есть множество, если его можно счесть, это величина, если его  
можно измерить". Множеством при этом называется то, "что в возмож-  
ности (потенциально) делится на части не непрерывные, величиною -  
то, что делится на части непрерывные". Прежде чем дать определение  
непрерывности, Аристотель рассматривает понятие бесконечного, так  
как "оно относится к категории количества" и проявляется прежде все-  
го в непрерывном. "Что бесконечное существует, уверенность в этом  
возникает у исследователей из пяти оснований: из времени (ибо оно  
бесконечно); из разделения величин..; далее, только таким образом не  
иссякнут возникновение и уничтожение, если будет бесконечное, откуда  
берется возникающее. Далее, из того, что конечное всегда граничит с  
чем-нибудь, так как необходимо, чтобы одно всегда граничило с дру-  
гим. Но больше всего -...на том основании, что мышление не останав-  
ливается: и число кажется бесконечным, и математические величины".  
Существует ли бесконечное как отдельная сущность или оно является  
акциденцией величины или множества? Аристотель принимает второй ва-  
риант, так как "если бесконечное не есть ни величина, ни множество,  
а само является сущностью..., то оно будет неделимо, так как делимое  
будет или величиной, или множеством. Если же оно не делимо, оно не  
бесконечно в смысле непроходимого до конца". Невозможность математи-  
ческого бесконечного как неделимого следует из того, что математи-  
ческий объект - отвлечение от физического тела, а "актуально недели-  
мое бесконечное тело не существует". Число "как что-то отдельное и в  
то же время бесконечное" не существует, ведь "...если возможно пе-  
ресчитать счислимое, то будет возможность пройти до конца и беско-  
нечное". Таким образом, бесконечность здесь в потенции существует,  
актуально же - нет.  
Опираясь на изложенное выше понимание бесконечного, Аристотель  
определяет непрерывность и прерывность. Так, "непрерывное есть само  
по себе нечто смежное. Смежное есть то, что, следуя за другим, каса-  
ется его". Число как типично прерывное (дискретное) образование фор-  
мируется соединением дискретных, далее неделимых элементов - единиц.  
Геометрическим аналогом единицы является точка; при этом соединение  
точек не может образовать линию, так как "точкам, из которых было бы  
составлено непрерывное, необходимо или быть непрерывными, или ка-  
саться друг друга". Но непрерывными они не будут: "ведь края точек  
не образуют чего-нибудь единого, так как у неделимого нет ни края,  
ни другой части". Точки не могут и касаться друг друга, поскольку  
касаются "все предметы или как целое целого, или своими частями, или  
как целое части. Но так как неделимое не имеет частей, им необходимо  
касаться целиком, но касающееся целиком не образует непрерывного".  
Невозможность составления непрерывного из неделимых и небходи-  
мость его деления на всегда делимые части, установленные для величи-  
ны, Аристотель распространяет на движение, пространство и время,  
обосновывая (например, в "Физике") правомерность этого шага. С дру-  
гой стороны, он приходит к выводу, что признание неделимых величин  
противоречит основным свойствам движения. Выделение непрерывного и  
прерывного как разных родов бытия послужило основой для размежевания  
в логико-гносеологической области, для резкого отмежевания арифмети-  
ки от геометрии.  
"Началами... в каждом роде я называю то, относительно чего не  
может быть доказано, что оно есть. Следовательно, то, что обозначает  
первичное и из него вытекающее, принимается. Существование начал не-  
обходимо принять, другое - следует доказать. Например, что такое  
единица или что такое прямое или что такое треугольник (следует при-  
нять); что единица и величина существует, также следует принять,  
другое - доказать". В вопросе о появлении у людей способности позна-  
ния начал Аристотель не соглашается с точкой зрения Платона о врож-  
денности таких способностей, но и не допускает возможности приобре-  
тения их; здесь он предлагает следующее решение: "необходимо обла-  
дать некоторой возможностью, однако не такой, которая превосходила  
бы эти способности в отношении точности". Но такая возможность, оче-  
видно, присуща всем живым существам; в самом деле, они обладают при-  
рожденной способностью разбираться, которая называется чувственным  
восприятием. Формирование начал идет "от предшествующего и более из-  
вестного для нас", то есть от того, что ближе к чувственному воспри-  
ятию к "предшествующему и более известному безусловно" (таким явля-  
ется общее). Аристотель дает развернутую классификацию начал, исходя  
из разных признаков.  
Во-первых, он выделяет "начала, из которых (что-либо) доказыва-  
ется, и такие, о которых (доказывается)". Первые "суть общие (всем  
начала)", вторые - "свойственные (лишь данной науке), например, чис-  
ло, величина". В системе начал общие занимают ведущее место, но их  
недостаточно, так как "среди общих начал не может быть таких, из ко-  
торых можно было бы доказать все". Этим и объясняется, что среди на-  
чал должны быть "одни свойственны каждой науке в отдельности, другие  
- общие всем". Во-вторых, начала делятся на две группы в зависимости  
от того, что они раскрывают: существование объекта или наличие у не-  
го некоторых свойств. В-третьих, комплекс начал доказывающей науки  
делится на аксиомы, предположения, постулаты, исходные определения.  
Выбор начал у Аристотеля выступает определяющим моментом пост-  
роения доказывающей науки; именно начала характеризуют науку как  
данную, выделяют ее изряда других наук. "То, что доказывается",  
можно трактовать очень широко. С одной стороны, это элементарный до-  
казывающий силлогизм и его заключения. Из этих элементарных процес-  
сов строится здание доказывающей науки в виде отдельно взятой тео-  
рии. Из них же создается и наука как система теорий. Однако не вся-  
кий набор доказательств образует теорию. Для этого он должен удов-  
летворять определенным требованиям, охватывающим как содержание до-  
казываемых предложений, так и связи между ними. В пределах же науч-  
ной теории необходимо имеет место ряд вспомогательных определений,  
которые не являются первичными, но служат для раскрытия предмета те-  
ории.  
Хотя вопросы методологии математического познания и не были из-  
ложены Аристотелем в какой-то отдельной работе, но по содержанию в  
совокупности они образуют полную систему. В основе философии матема-  
тики Аристотеля лежит понимание математических знаний как отражения  
объективного мира. Эта установка сыграла важную роль в борьбе Арис-  
тотеля с платоновым идеализмом; ведь "если в явлениях чувственного  
мира не находится вовсе математическое, то каким образом возможно,  
что к ним прилагаются его свойства?" - писал он. Разумеется, матери-  
ализм Аристотеля был непоследовательным, в целом его воззрения в  
большей степени соответствовали потребностям математического позна-  
ния, сем взгляды Платона. В свою очередь математика была для Аристо-  
теля одним из источников формирования ряда разделов его философской  
системы.