Академия ФСО России

## Кафедра Физики

## Тема:

## «Законы Кирхгофа и их применение для расчета электрических цепей»

# Орел-2009

## **Содержание**

Первый закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа

Расчет сложных цепей с помощью уравнений Кирхгофа

**Первый закон Кирхгофа**

Алгебраическая сумма токов в ветвях, сходящихся к любому узлу электрической цепи, тождественно равна нулю. Согласно этому закону, если к некоторому узлу цепи подсоединено *n* ветвей с токами *i*1*, i*2*, ..., i*n, то в любой момент времени

,



где , если направление тока положительно и ориентировано от узла (ток выходит из узла), или , если ток входит в узел. Таким образом, любому узлу цепи соответствует уравнение, связывающее токи в ветвях цепи, соединенных с данным узлом.



В качестве примера приведем схему на рисунке 1.



Рис.1.

В соответствии с первым законом Кирхгофа:

.



Общее число уравнений, которое можно составить по первому закону Кирхгофа для цепи, равно числу узлов цепи .



Так, для четырех узлов графа (рисунок 2) можно составить следующие четыре уравнения:

Рис.2.

**4**

**2**

*i*1

*i*3

*i*2

*i*4

*i*6

*i*5

**3**

**1**

узел 1: ,



узел 2: ,



узел 3: ,



узел 4: *.*



Первый закон Кирхгофа часто называют законом Кирхгофа для токов и сокращенно в тексте обозначают ЗКТ.

Число независимых уравнений равно трем, так как любое из этих уравнений отличается от суммы трех остальных только знаком. Итак, если цепь содержит узлов, то для неё можно составить по первому закону Кирхгофа независимых уравнений. Совокупность из *N* узлов цепи, уравнения для которых образуют систему линейно независимых уравнений, называют ***совокупностью независимых узлов цепи***.



## **Примеры на применение первого закона Кирхгофа. Параллельное соединение элементов**

В качестве примера на применение первого закона Кирхгофа рассмотрим параллельное соединение нескольких элементов активных сопротивлений, конденсаторов, катушек индуктивности.

Особенностью параллельного соединения нескольких элементов является равенство напряжений, приложенных к зажимам любого из элементов, входящих в соединение. Цепь при таком соединении характеризуется только одним независимым узлом.

Пусть параллельно соединены *n* элементов активного сопротивления. Если выбрать направления отчетов токов в элементах такими как это показано на рисунке 3, то согласно первому закону Кирхгоффа при параллельном соединении элементов запишем:

Рис.3.

*i*1

*i*2

*i*n

*i*

*G*1

*G*2

*G*n

*u*

;



учитывая, что , имеем ,



где .



Зависимость не отличается от зависимости между напряжением на зажимах и током в элементе активного сопротивления с проводимостью *G*. Следовательно, цепь, составленная из нескольких сопротивлении, включенных параллельно, может быть заменена одним активным сопротивлением, при этом проводимость эквивалентного элемента равна сумме проводимостей элементов, входящих в соединение.



При параллельном соединении конденсаторов (рисунок 4) ток ветви можно определить по формуле: .



Рис.4.

*i*

*u*

*i*

1

*i*

2

*i*

n

## *C*

1

## *C*

2

*C*

n

Для вычисления общего тока необходимо просуммировать токи ветвей:

,



где *.*.



Таким образом, при параллельном соединении нескольких конденсаторов эквивалентная ёмкость равна сумме емкостей, входящих в соединение.

В случае параллельного соединения катушек индуктивностей (рисунок 5) ток каждой из ветвей равен: .

*i*

*i*

1

*i*

2

*i*

n

## *L*

1

# L

2

*L*

n

*u*



Рис.5.

Уравнение для вычисления общего тока имеет вид:

.



Следовательно , то есть .



Это означает, что значение эквивалентной индуктивности будит меньше наименьшего из значений соединённых параллельно индуктивностей.

**Второй закон Кирхгофа**

Второй закон Кирхгофа формулируется следующим образом: алгебраическая сумма напряжений ветвей в любом контуре цепи тождественно равна нулю. Для замкнутого контура, изображённого на рисунке 6, можно записать соотношение:

.



Рис.6.

*u*3

*u*2

*u*5

*u*1

*u*4

*e*5

*e*3

В соответствии со вторым законом Кирхгофа при обходе контура по часовой стрелке справедливо соотношение:

.



Изменение направления обхода эквивалентно изменению знаков напряжений на противоположные (умножению на минус единицу).

**Примеры на применение второго закона Кирхгофа**

## **Последовательное соединение элементов**

Пусть *n* элементов активного сопротивления соединены последовательно (рисунок 7).

*R*1

*R*2

*R*n

*u*1

*u*2

*u*n

*i*

*u*

Рис.7.

В соответствии с выбранным направлением обхода по второму закону Кирхгофа получим уравнение:

*.*



характерной особенностью последовательного соединения является равенство токов в каждом из элементов, входящих в соединение.

При запишем:



, то есть .



Таким образом, при последовательном соединении нескольких резисторов эквивалентное сопротивление равно сумме сопротивлений, входящих в соединение.

При последовательном соединении катушек индуктивности (рисунок 8) можно записать:

*.*



Рис.8.

*L*1

*L*2

*L*n

*u*1

*u*2

*u*n

*i*

*u*

Если , то ,



следовательно .



Это означает, что эквивалентная индуктивность равна сумме индуктивностей, входящих в последовательное соединение.

В случае последовательного соединения конденсаторов (рисунок 9) по второму закону Кирхгофа можно записать:

*.*

*C*1

*C*2

*C*n

*u*1

*u*2

*u*n

*i*

*u*



Рис.9.

Заменяя получим: .



Обратная ёмкость всех конденсаторов, соединенных последовательно, равна сумме обратных ёмкостей конденсаторов, входящих в соединение:

.



При этом эквивалентная ёмкость соединения будет меньше наименьшей ёмкости конденсатора, входящего в последовательное соединение.

## **Расчет сложных цепей с помощью уравнений Кирхгофа**

**Пример 1**

Далеко не во всех случаях цепь представляет собой совокупность лишь последовательно и параллельно соединенных ветвей. В качестве примера рассмотрим вариант расчета с помощью уравнений Кирхгофа электрической цепи (рисунок 10). Цепь содержит = 4 узлов и= 6 ветвей, включая источники напряжения.



*R*1

*R*0

*R*0

*R*0

*R*2

*U*

*i*1

*i*2

*i*3

*i*4

*i*6

*i*5

III

I

II

3

2

1

0

Рис.10.

Для определения всех токов и напряжений в схеме достаточно найти значения токов во всех ветвях цепи. Зная ток, проходящий через любую из ветвей цепи, можно найти как напряжение этой ветви, так и напряжение между любой парой узлов цепи.

Если мы зададимся произвольно положительными направлениями токов в ветвях цепи и пронумеруем произвольно эти токи, то по первому закону Кирхгофа можно составить уравнений относительно токов в ветвях цепи.



По второму закону Кирхгофа будет линейно-независимых уравнений для напряжений ветвей схемы.



Совокупность из уравнений по первому закону Кирхгофа, и уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, образует систему линейно – независимых уравнений. Эта система будет неоднородной системой уравнений, так как ее свободными членами являются заданные напряжения источников.



Подобная система уравнений имеет единственное решение, позволяющее найти токи в ветвях цепи, а по ним и значения напряжений между любой парой узлов цепи.

Для примера составим систему уравнений по первому закону Кирхгофа (рисунок 10).

Число уравнений: .



Узел 1: ,



узел 2: ,



узел 3: .



В тоже время по второму закону Кирхгофа для контуров I, II, III можно составить систему из уравнений.



.



Контур I: ,



контур II: ,



контур III: .



Таким образом, решая систему из 6 уравнений с шестью неизвестными токами, например по методу Крамера, определим неизвестные. Если в цепи будет источник тока, то в системе уравнений неизвестным будет напряжение на зажимах этого источника, а ток через источник будет равен току задающего источника. Общее число неизвестных сохранится прежним.

## **Пример 2**

Для цепи (рисунок 11) определить токи и , если *E =* 20 В, *I*0 *=* 2 A, *R*1 *=* 15 Ом, *R*2= 85 Ом.



Рис.11.

*I*0

*E*

*R*1

*R*2

*i*1

*i*2

2

1

### **Решение**

Выберем направления токов *,* и обхода в контуре, составим уравнения по законам Кирхгофа. Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа:



.



Число уравнений по второму закону Кирхгофа:

*.*



Уравнение токов для узла 1:

*.* (a)



Уравнение по второму закону Кирхгофа:

. (б)



Подставим в уравнения (а) и (б) числовые значения получим:

*,*



.



Решив эту систему, определим токи и :



*; .*



**Литература**

1. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1986.
2. Бакалов В.П. и др. Теория электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1998.
3. Качанов Н. С. и др. Линейные радиотехнические устройства. М.: Воен. издат., 1974.
4. В.П. Попов Основы теории цепей – М.: Высшая школа, 2000